

01;05;09

## Моделирование процессов обострения фронта электромагнитной волны в нелинейном диэлектрике

© М.М. Резинкина<sup>1</sup>, О.Л. Резинкин<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Научно-технический центр магнетизма технических объектов НАН Украины, 61106 Харьков, Украина  
e-mail: marinar2@mail.ru

<sup>2</sup> Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт", 61002 Харьков, Украина  
e-mail: olegrezinkin@rambler.ru

(Поступило в Редакцию 17 ноября 2009 г. В окончательной редакции 29 июня 2010 г.)

Приведены результаты физического и численного моделирования процессов обострения фронта электромагнитной волны в нелинейном диэлектрике. Описана методика математического моделирования распространения волны в терминах модифицированного векторного магнитного потенциала. Показано, как уровень напряженности приложенного электрического поля, а также степень нелинейности диэлектрика влияют на обострение фронта электромагнитной волны.

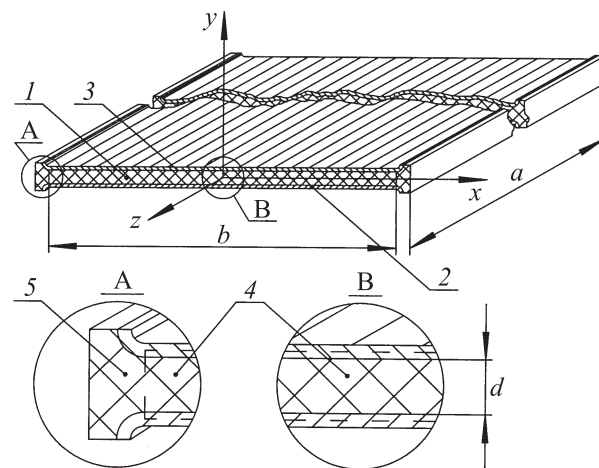
### Введение

Короткие электромагнитные импульсы большой мощности применяются для исследований в области физики плазмы, в качестве источников питания лазеров и импульсных усилителей, для получения мощного электромагнитного излучения, в радиолокации, а также в других областях науки и техники [1]. Одним из перспективных методов получения мощных электромагнитных импульсов с коротким временем нарастания является формирование ударных электромагнитных волн в среде с нелинейными электрическими или магнитными свойствами [1,2]. Непосредственное генерирование импульсов с крутыми фронтами тока и напряжения путем коммутации емкостных или индуктивных накопителей энергии на нагрузку в ряде случаев не представляется возможным.

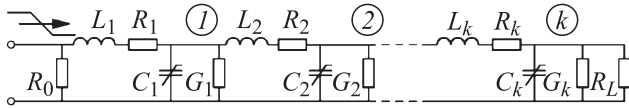
Импульсы с коротким фронтом (порядка наносекунд и менее) можно получить при помощи дополнительного обострения уже сгенерированной электромагнитной волны в двухпроводных линиях передачи (рис. 1), состоящих из потенциальной (3) и заземленной (2) обкладок (протяженных проводников), между которыми размещено рабочее тело (1) — сегнетоэлектрик [1,2]. Использование в качестве рабочего тела таких формирующих линий (ФЛ) материалов с нелинейной электрической проницаемостью [3] имеет ряд преимуществ по сравнению с генерированием электромагнитных импульсов в нелинейной среде ферромагнетика [4]. Поскольку волновое сопротивление линий на нелинейных диэлектриках на много порядков ниже, чем при использовании нелинейных магнитных материалов, они позволяют достичь значительно более высоких уровней импульсной мощности и обеспечить работу на низкоомную нагрузку.

Для генерирования ударных электромагнитных волн мега- и гигаваттной мощности необходимо создать заполненную нелинейной рабочей средой двухпроводную

формирующую линию, работающую при высоких напряжениях. Для обеспечения электрической прочности формирующей линии при напряжении порядка единиц–десятков киловольт толщина ее рабочей среды для известных в настоящее время нелинейных диэлектриков должна быть не меньше нескольких миллиметров. В качестве рабочей среды ФЛ может быть использована керамика на основе твердых растворов сегнетоэлектриков [5]. Изготовление достаточно толстых изделий из сегнетокерамики без трещин и других неоднородностей, снижающих электрическую прочность, является сложной и трудоемкой задачей. Поэтому при выборе конфигурации линии, генерирующей высоковольтные



**Рис. 1.** Схематическое изображение формирующей линии (ФЛ), в которой моделируется распространение электромагнитной волны. 1 — рабочая среда линии; 2, 3 — заземленная и потенциальная обкладки соответственно; 4 — расчетная область (границы показаны штриховой линией:  $-b/2 = X_{\min}$ ,  $b/2 = X_{\max}$ ,  $-d/2 = Y_{\min}$ ,  $d/2 = Y_{\max}$ ,  $-a = Z_{\min}$ ,  $Z_{\max} = 0$ ), 5 — зона окранны;  $d$  — толщина диэлектрика;  $a$  — длина ФЛ,  $b$  — ширина ФЛ.



**Рис. 2.** Эквивалентная электрическая схема формирующей линии.

ударные волны, целесообразно проведение физического и математического моделирования возникающих при этом переходных процессов. Использование результатов моделирования позволяет дать рекомендации по требуемой величине нелинейности диэлектрической проницаемости рабочей среды, а также ее геометрической конфигурации.

Исследование переходных процессов в ФЛ возможно при ее представлении в виде эквивалентной электрической схемы, состоящей из набора параллельно включенных емкостей ( $C_1-C_k$  — рис. 2) и последовательно включенных индуктивностей ( $L_1-L_k$  — рис. 2) — так называемой длинной линии с сосредоточенными параметрами или искусственной линии (см., например, [6,7]). Такой подход возможен, так как электромагнитные процессы в данной схеме описываются уравнениями, подобными тем, что описывают полевые процессы в двухпроводных длинных линиях (см., например, [1,6]). Другим возможным решением является расчет электромагнитного поля при распространении волны. Наконец, можно провести физическое моделирование исследуемых процессов путем измерения токов и напряжений в соответствующей электрической схеме.

Целью настоящей работы является проведение физического и математического моделирования процессов обострения электромагнитной волны в диэлектрике с нелинейными параметрами для определения степени влияния основных факторов, а также сравнение результатов, полученных с помощью различных моделей.

## 1. Формулировка задачи расчета переходного процесса распространения электромагнитной волны в нелинейном диэлектрике

Для того чтобы рассчитать процесс распространения электромагнитной волны с коротким фронтом (порядка единиц–десятков наносекунд), задача должна быть сформулирована с учетом диэлектрической вязкости рабочей среды. Используем для решения так называемый модифицированный векторный магнитный потенциал  $\mathbf{A}$  (см., например, [8,9]). Такой подход обеспечивает существенное уменьшение числа решаемых уравнений. При этом скалярный электрический потенциал полагается равным нулю (см., например, [10–14]). Тогда напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$  и индукцию магнитного поля  $\mathbf{B}$

можно выразить через  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}; \quad (1)$$

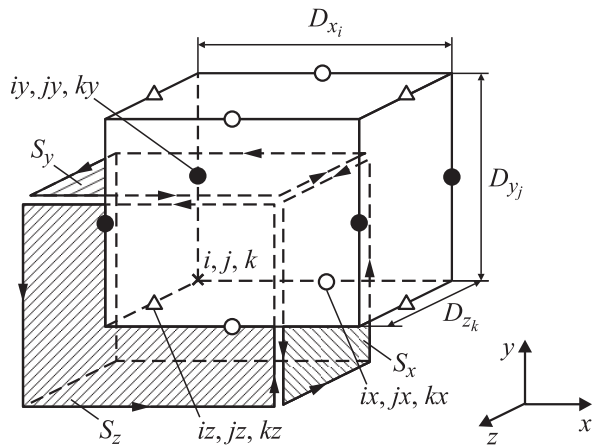
$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (2)$$

Вследствие наличия нелинейной зависимости относительной диэлектрической проницаемости рабочей среды — сегнетоэлектрика — от напряженности электрического поля, а также необходимости учета диэлектрической вязкости (т.е. зависимости от времени)  $\varepsilon(E, t)$  решение поставленной задачи в аналитическом виде не представляется возможным, поэтому необходимо применять численные методы.

Известно, что напряженность электрического поля увеличивается на окраинах ФЛ. Для ослабления этого эффекта обычно применяют специальные приемы, например плавное увеличение толщины изоляции на краях (см. 5 на рис. 1). В рассматриваемом случае ширина линии на порядок и более превышает толщину диэлектрика, а значит, доля площади зоны окраины в общей площади зоны под обкладками невелика. Для того чтобы исследовать влияние основных факторов на обострение электромагнитной волны при прохождении по ФЛ, будем моделировать данный процесс без учета краев: влияние краев ФЛ будет предметом отдельного рассмотрения.

Для решения задачи расчета электромагнитного поля был использован численный метод конечных объемов, называемый также методом конечного интегрирования (см., например, [15,16]). Данный метод предполагает наложение на рассматриваемую область расчетной сетки и интегрирование уравнений Максвелла по объемам или граням образовавшихся ячеек. Такой подход позволяет получить решаемые уравнения, используя законы сохранения (заряда или тока соответственно). В результате не требуется дополнительно вводить условия на границах раздела сред, поскольку они учитываются автоматически. Данный метод позволяет также учесть при расчете распределения электромагнитного поля нелинейность электрических параметров сред.

Для нахождения распределения электромагнитного поля разобьем рассматриваемую область на ячейки-параллелепипеды (рис. 3). Данное разбиение произведено так, что узлы расчетной секции ( $i, j, k$ ) лежат на границах раздела сред. Под ( $i, j, k$ )-й ячейкой подразумевается параллелепипед, вершинами которого являются следующие узлы: ( $i, j, k$ ), ( $i+1, j, k$ ), ( $i, j+1, k$ ), ( $i, j, k+1$ ), ( $i, j+1, k+1$ ), ( $i+1, j, k+1$ ), ( $i+1, j+1, k$ ), ( $i+1, j+1, k+1$ ). В пределах каждой из ячеек электрические параметры среды полагаются одинаковыми. Идентификаторы  $ix, jy, kz$  и т.д. соответствуют номерам узлов, в которых определяются значения компонент векторного потенциала  $\mathbf{A}$ . Так, например,  $x$ -ая компонента  $\mathbf{A}(A_x)$  определяется в узлах  $ix, jx, kx$ .



**Рис. 3.** Ячейка расчетной схемы. Величины  $ix, jy, kz$  и тому подобные — идентификаторы, которые соответствуют номерам узлов, в которых определяются значения компонент векторного потенциала  $\mathbf{A}$ .

Решаемое уравнение получим путем интегрирования I уравнения Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля;  $\mathbf{D}$  — индукция электрического поля;  $\gamma$  — удельная электропроводность по каждому из трех сечений, перпендикулярных координатным осям. Так, уравнение для  $A_z$  —  $z$ -й компоненты вектора  $\mathbf{A}$  получим в результате интегрирования (3) по сечению  $S_z$  ( $z = \text{const}$ , см. рис. 3) и использования теоремы Стокса:

$$\oint_{l_z} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{S_z} \gamma E_n ds + \int_{S_z} \frac{\partial D_n}{\partial t} ds, \quad (4)$$

где  $l_z$  — контур, охватывающий площадку  $S_z$ ;  $E_n$  — проекция вектора  $\mathbf{E}$  на нормаль к плоскости  $S_z$ .

Чтобы снизить порядок уравнений вида (4), они были проинтегрированы по времени:

$$\int_0^t \oint_{l_z} \mathbf{H} d\mathbf{l} dt = \int_0^t \int_{S_z} \gamma E_n ds dt + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_z} D_n ds dt. \quad (5)$$

Выразив  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  через  $\mathbf{A}$  (см. (1), (2)), учтя нулевые начальные условия, для момента времени  $t$  окончательно получим:

$$\frac{1}{\mu_0} \int_0^t \oint_{l_z} \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} d\mathbf{l} dt = \int_{S_z} -\gamma A_z ds + \epsilon_0 \int_{S_z} -\epsilon \frac{\partial A_z}{\partial t} ds, \quad (6)$$

где  $\mu, \epsilon$  — относительные магнитная и диэлектрическая проницаемости, которые могут зависеть от напряженностей и времени;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Н/м;  $\epsilon_0 = 0.885 \cdot 10^{-11}$  Ф/м.

Запишем уравнения вида (6) для остальных компонент вектора  $\mathbf{A}$ , проинтегрировав (4) по соответствующим площадкам (см. рис. 3):  $S_x$  для  $A_x$  и  $S_y$  для  $A_y$ :

$$\frac{1}{\mu} \int_0^t \oint_{l_x} \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} d\mathbf{l} dt = \int_{S_x} -\gamma A_x ds + \epsilon_0 \int_{S_x} -\epsilon \frac{\partial A_x}{\partial t} ds; \quad (7)$$

$$\frac{1}{\mu} \int_0^t \oint_{l_y} \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} d\mathbf{l} dt = \int_{S_y} -\gamma A_y ds + \epsilon_0 \int_{S_y} -\epsilon \frac{\partial A_y}{\partial t} ds. \quad (8)$$

Условия на границах расчетной области (4 на рис. 1. Граница показана штриховой линией) — в плоскостях  $X_{\min}, X_{\max}, Y_{\min}, Y_{\max}, Z_{\min}, Z_{\max}$  — были следующими. Поскольку увеличение напряженности электрического поля на закраинах ФЛ не учитывалось, то при  $x = X_{\min}$  и  $x = X_{\max}$ :  $A_x = 0, \partial A_y / \partial x = 0, \partial A_z / \partial x = 0$ . Принимая во внимание, что толщина обкладок (линии 2, 3 на рис. 1), выполняемых обычно из меди, существенно превышает величину скин-слоя при распространении волны, токи будут сосредоточены в тонких слоях на поверхности обкладок. Поэтому за пределами скин-слоя в плоскостях  $y = Y_{\min}$  и  $y = Y_{\max}$  напряженности электрического и магнитного поля равны нулю, а значит, нулевыми задаются и компоненты  $\mathbf{A}$ :  $A_x = 0, A_y = 0, A_z = 0$ . В плоскости  $z = Z_{\min}$ :  $\partial A_y / \partial t = -E_0$  (где  $E_0$  — напряженность падающей электромагнитной волны),  $A_x = 0, A_z = 0$ ; в плоскости  $z = Z_{\max}$ :  $A_x = 0, A_y = 0, A_z = 0$  (рассматривался режим короткого замыкания). Начальные условия для всех компонент векторного потенциала — нулевые.

Система решаемых уравнений получена в результате записи выражений вида (6)–(8) в разностном виде для каждого узла расчетной сетки. Дискретизация данных уравнений производилась путем представления компонент  $\text{rot } \mathbf{A}$  в виде конечных разностей и нахождения циркуляции  $\text{rot } \mathbf{A}$  при обходе прямоугольных контуров  $l_x, l_y, l_z$ , охватывающих площадки  $S_x, S_y, S_z$  (см. рис. 3). Интегралы по  $S_x, S_y, S_z$  (слагаемые в правой части (6)–(8)) полагались равными произведению их площади на значения подынтегральной функции в соответствующем узле,  $\epsilon$  и  $\gamma$  усреднялись по окружающим узел ячейкам. Интегралы по времени от слагаемых, в которые входит циркуляция  $\text{rot } \mathbf{A}$ , заменялись суммами по формуле трапеций. Слагаемые этих сумм, содержащие компоненты  $\mathbf{A}$  с предыдущих временных шагов, полагались известными. В результате получены разностные уравнения, которые, например, для  $y$ -й компоненты модифицированного векторного потенциала имеют вид:

$$0.5 \frac{\Delta t}{\mu_0} \left( \Lambda_{xx} A_y^m + \sum_{m=1}^{n-1} \Lambda_{xx} A_y^m + \Lambda_{zz} A_y^n + \sum_{m=1}^{n-1} \Lambda_{zz} A_y^m - \sum_{m=1}^n \Lambda_{yx} A_x^m - \sum_{m=1}^n \Lambda_{yz} A_z^m \right) = \frac{A_{y_{i,j,k}}^n S G_{y_{i,j,k}} + S E_{y_{i,j,k}}^m (A_{y_{i,j,k}}^{n-1} - A_{y_{i,j,k}}^{n-1})}{\Delta t}, \quad (9)$$

где

$$\Lambda_{xx}A_y^n = 0.5 \sum_{ii=i-1}^{ii=i} (-1)^{ii-i+2} \left( \frac{Dz_{k-1}}{\mu_{ii,j,k-1}} + \frac{Dz_k}{\mu_{ii,j,k}} \right) \times \frac{A_{y_{ii+1,j,k}}^n - A_{y_{ii,j,k}}^n}{Dx_{ii}};$$

$$\Lambda_{zz}A_y^n = 0.5 \sum_{kk=k-1}^{kk=k} (-1)^{kk-k+2} \left( \frac{Dx_{i-1}}{\mu_{i-1,j,kk}} + \frac{Dx_i}{\mu_{i,j,kk}} \right) \times \frac{A_{y_{i,j,kk+1}}^n - A_{y_{i,j,kk}}^n}{Dz_{kk}};$$

$$\Lambda_{yx}A_x^m = 0.5 \sum_{ii=i-1}^{ii=i} (-1)^{ii-i+2} \left( \frac{Dz_{k-1}}{\mu_{ii,j,k-1}} + \frac{Dz_k}{\mu_{ii,j,k}} \right) \times \frac{A_{x_{ii,j+1,k}}^m - A_{x_{ii,j,k}}^m}{Dy_j};$$

$$\Lambda_{yz}A_z^m = 0.5 \sum_{kk=k-1}^{kk=k} (-1)^{kk-k+2} \left( \frac{Dx_{i-1}}{\mu_{i-1,j,kk}} + \frac{Dx_i}{\mu_{i,j,kk}} \right) \times \frac{A_{z_{i,j+1,kk}}^m - A_{z_{i,j,kk}}^m}{Dy_j};$$

$$SG_{y_{i,j,k}} = 0.25$$

$$\times \sum_{ii=i-1}^{ii=i} (\gamma_{ii,j,k} Dx_{ii} Dz_k + \gamma_{ii,j,k-1} Dx_{ii} Dz_{k-1});$$

$$SE_{y_{i,j,k}}^m = 0.25\epsilon_0$$

$$\times \sum_{ii=i-1}^{ii=i} (\epsilon_{ii,j,k}^m Dx_{ii} Dz_k + \epsilon_{ii,j,k-1}^m Dx_{ii} Dz_{k-1});$$

$Dx_i$ ,  $Dy_j$ ,  $Dz_k$  — шаги по пространству в направлениях  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответственно (см. рис. 3);  $\mu_{i,j,k}$ ,  $\gamma_{i,j,k}$  — относительная магнитная проницаемость и удельная электропроводность  $(i, j, k)$ -й ячейки соответственно;  $\epsilon_{i,j,k}^m$  — относительная диэлектрическая проницаемость  $(i, j, k)$ -й ячейки в момент времени  $t_m$ ;  $A_{y_{i,j,k}}^n$  — значение  $y$ -й компоненты векторного магнитного потенциала в  $(i, j, k)$ -м узле в  $n$ -й момент времени. Сдвоенные индексы  $ii$ ,  $kk$  и т.п. являются индексами суммирования.

Расположение слагаемых в левой и правой частях (9) соответствует расположению слагаемых в (8). Выражения для остальных компонент  $\mathbf{A}$  записывались аналогичным образом. Для решения полученной системы разностных уравнений была использована схема переменных направлений [17]. Применение данной схемы при решении стационарной задачи итерационным методом подробнее описано в работе [18].

## 2. Физическое и математическое моделирование процессов изменения профиля волны при ее распространении по линии с нелинейной диэлектрической проницаемостью

Представим ФЛ в виде эквивалентной электрической схемы, содержащей  $k$  звеньев, каждое из которых состоит из последовательно включенной индуктивности и параллельно включенной нелинейной емкости (см. рис. 2). Такая замена правомочна вследствие подобия уравнений, которыми описываются электромагнитные процессы в данной электрической схеме и в ФЛ, состоящей из потенциальной и заземленной проводящих обкладок, между которыми находится диэлектрик (см., например, [1,6]). Уравнения, описывающие переходные процессы в  $k$ -м звене такой схемы замещения, представляют собой 1-й и 2-й законы Кривгофа:

$$-V_k G_k - \frac{dQ_k}{dt} = I_{k+1} - I_k; \quad (10)$$

$$L_k \frac{dI_k}{dt} + R_k I_k = V_k + V_{k-1}, \quad (11)$$

где  $L_k$ ,  $R_k$ ,  $C_k$ ,  $G_k$  — значения индуктивности, сопротивления, емкости и проводимости утечки для  $k$ -го звена линии;  $Q_k = C_k V_k$  — заряд нелинейной емкости  $C_k$ ;  $V_k$  — напряжение на нелинейной емкости  $C_k$ ;  $I_k$  — ток через индуктивность  $L_k$ .

Учтя зависимости диэлектрической проницаемости, а значит и емкости, от уровня приложенного напряжения, запишем второе слагаемое левой части (10) в виде:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d[C(V)V]}{dt} = \frac{dC(V)}{dV} \frac{dV}{dt} V + C(V) \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dt} C_{eq}, \quad (12)$$

где

$$C_d = \frac{dC(V)}{dV}; \quad C_{eq} = C_d V + C(V). \quad (13)$$

Известно, что изменение диэлектрической проницаемости сегнетоэлектриков от уровня напряженности электрического поля происходит с некоторой задержкой по времени, определяемой так называемой диэлектрической вязкостью [19]. По аналогии с магнитной вязкостью [20] представим изменение значения диэлектрической проницаемости в момент времени  $t_m$  в виде:

$$\Delta\epsilon(t_m) = [\epsilon_\infty(E_m) - \epsilon(t_{m-1})] \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_R}\right) \right], \quad (14)$$

где  $\epsilon_\infty(E_m)$  — значение диэлектрической проницаемости, которое установится в момент времени  $t \gg \tau_R$  ( $t \rightarrow \infty$ ) после приложения к диэлектрику электрического поля напряженностью  $E_m$ ;  $\epsilon(t_{m-1})$  — значение диэлектрической проницаемости в момент времени  $t_{m-1}$ ,  $\Delta t = t_m - t_{m-1}$  — шаг по времени;  $\tau_R$  — время релаксации. Тогда

$$\epsilon(t_m) = \epsilon(t_{m-1}) + \Delta\epsilon(t_m). \quad (15)$$

Изменение величины емкости  $C_{eq_k}$  (см. (13)) при приложении к ней напряжения  $V_k(t_m)$  учитывалось по аналогии с (14), (15):

$$C_{eq_k}(t_m) = C_{eq_k}(t_{m-1}) + [C_{eq_\infty}(V_k(t_m)) - C_{eq_k}(t_{m-1})] \times \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_R}\right) \right], \quad (16)$$

где  $C_{eq_\infty}(V_k(t_m))$  — значение  $C_{eq}$ , которое установится в момент времени  $t \gg \tau_R$  после приложения напряжения  $V_k(t_m)$ .

При расчете процесса распространения волны в ФЛ использовалось значение  $\tau_R = 5$  ns, что соответствует динамическим характеристикам примененных при физическом моделировании варикапов.

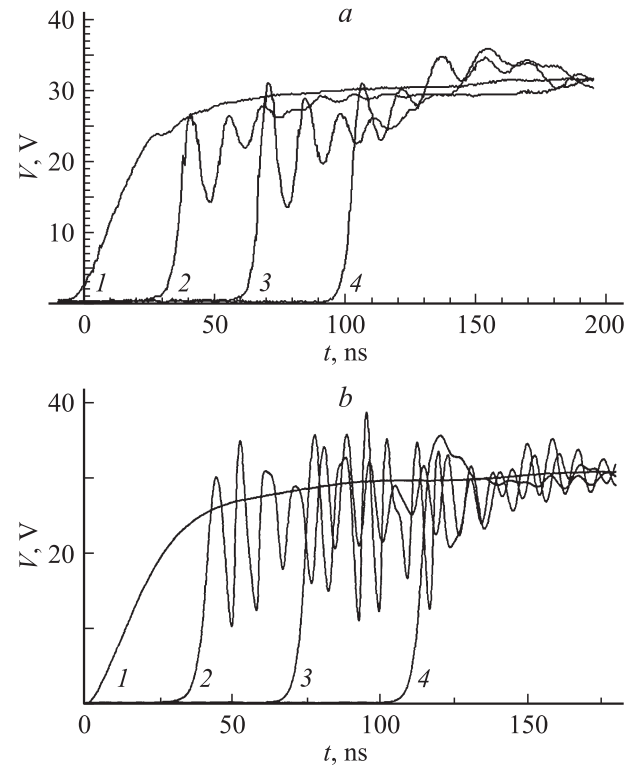
Операторы дифференцирования по времени, входящие в уравнения (10), (11), представлялись в виде разностей. Полученная система уравнений решалась итерационным методом с учетом нелинейного изменения величины емкости  $C_{eq_k}$  (см. (13), (16)). При расчете значения токов в элементах схемы и напряжений на них в начальный момент времени принимались нулевыми. Полагалось, что на первое звено линии падает электромагнитная волна с заданным напряжением  $V_0$ .

Для физического моделирования процессов обострения электромагнитной волны в рассматриваемой линии была собрана схема, состоящая из  $k = 15$  идентичных  $L-C$  цепочек (см. рис. 2) со следующими параметрами:  $L_k = 3.3 \mu\text{H}$ ,  $C_0 = C_{k|V < 0.5\text{V}} \approx 40$  pF,  $R_k = 1 \Omega$ ,  $1/C_k = 0.01$  MΩ,  $R_0 = 75 \Omega$ ,  $R_L = 765 \Omega$ . На вход линии подавался прямоугольный импульс амплитудой  $V_0 = 30$  V с фронтом длительностью 40 ns (по уровням  $0.1 \times V_0 - 0.9 \times V_0$ ). В данной физической модели в качестве индуктивностей использовались дроссели серии LQH43C с индуктивностью  $3.3 \mu\text{H}$  и активным сопротивлением  $1 \Omega$ . Нелинейными емкостями служили варикапы ВВ133. Зависимость их емкости от приложенного напряжения может быть приближенно (с относительной погрешностью не более 5%) представлена в виде:

$$C(V) [\text{F}] = 0.8 \left[ 42 \exp\left(-\frac{V}{4.2}\right) + 2.5 \right] \cdot 10^{-12}.$$

Источником импульсов напряжения, подаваемых на вход схемы, изображенной на рис. 2, служил генератор импульсов Г5-54, подключенный через отрезок кабеля с волновым сопротивлением  $50 \Omega$ . Длина этого отрезка была выбрана достаточно большой для того, чтобы поддерживать выходное сопротивление источника на входе схемы постоянным в течение всего времени распространения импульса по линии.

На рис. 4 показаны временные зависимости напряжения, полученные экспериментально (рис. 4, *a*), а также с помощью расчетов, основанных на решении системы нелинейных уравнений вида (10), (11) (рис. 4, *b*). Из рис. 4 видно, что по мере продвижения волны по линии происходит обострение ее фронта: для физического моделирования — от 40 до 7.2 ns, для численного



**Рис. 4.** Временные развертки напряжения: 1 — на входе линии; 2 — на 4-й ступени обострения; 3 — на 9-й ступени; 4 — в конце линии. *a* — результаты физического моделирования (осциллограммы); *b* — результаты численного моделирования, основанные на решении системы уравнений вида (10), (11) с учетом (12), (13), (16).

моделирования — до 6.6 ns. Различия результатов физического и емкостного моделирования вероятно объясняются тем, что при расчетах не учитывались частотные зависимости параметров дросселей.

Рассмотрим вариант использования описанной методики расчета электромагнитного поля с помощью модифицированного векторного потенциала на примере математического моделирования процесса продвижения электромагнитной волны в ФЛ, содержащей в качестве рабочего тела сегнетоэлектрик (см. рис. 1). Как уже упоминалось выше, распространение электромагнитной волны моделировалось без учета электромагнитных процессов на окраинах ФЛ. При этом для сравнения может быть использовано решение, полученное при представлении двухпроводной линии, по которой распространяется волна, в виде электрической цепи (см. рис. 2). Легко показать, что эквивалентные параметры такой цепи, имитирующей реальную двухпроводную линию, могут быть рассчитаны следующим образом:

$$L_k = \mu_0 \Delta z \frac{d}{b}; \quad C_k = \epsilon \epsilon_0 \Delta z \frac{b}{d}, \quad (17)$$

где  $b$  — ширина линии;  $d$  — толщина диэлектрика — рабочего тела линии;  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость рабочего тела ФЛ;  $\Delta z = a/N_z$  — шаг по пространству в

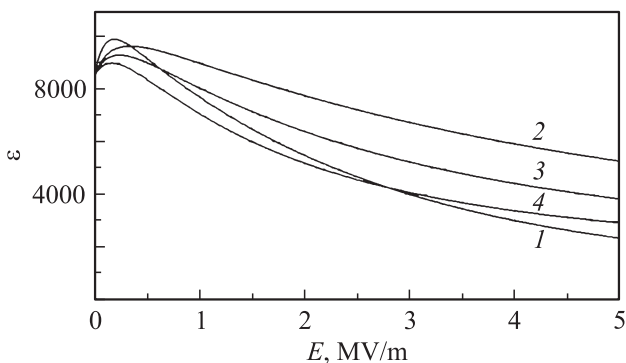
направлении распространения волны;  $a$  — длина линии в направлении распространения волны;  $N_z$  — число разбиений в направлении оси  $z$ .

Рассмотрим линию со следующими геометрическими параметрами:  $b = 50$  mm,  $d = 2$  mm,  $a = Z_{\max} = 0.5$  m, работающую в режиме короткого замыкания ( $R_L = 0$ , рис. 2). Качество звеньев линии  $N_z$  выберем равным 350;  $\varepsilon|_{E \rightarrow 0} = 8500$ . Тогда индуктивность и емкость линии, рассчитанные по (17), равны:  $L_k = 0.1$  nH;  $C_k|_{E \rightarrow 0} = 3.76$  pF. Проводимость утечки через диэлектрик и активное сопротивление обкладок будем полагать пренебрежимо малыми. При моделировании электрических свойств рабочего тела использовались электрические параметры сегнетокерамики на основе допированного цирконием твердого раствора титанатов бария и стронция  $\text{Ba}_{0.8}\text{Sr}_{0.2}\text{TiO}_3$  при температуре Кюри. Экспериментально полученная зависимость относительно дифференциальной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_d = (1/\varepsilon_0)(\partial D/\partial E)$  от величины напряженности электрического поля  $|\mathbf{E}|$  для данного состава показана на рис. 5 (см. кривую 1). Путем интегрирования этой кривой по напряженности электрического поля получена зависимость относительной диэлектрической проницаемости от  $|\mathbf{E}|$ :

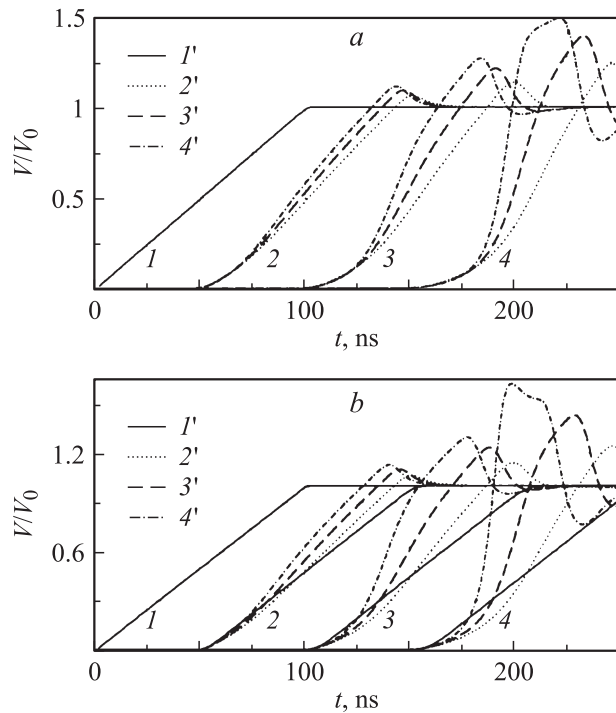
$$\varepsilon = (1/E) \int \varepsilon_d dE,$$

которая также представлена на рис. 5 (кривая 2). Влияние диэлектрической вязкости учитывалось путем использования для расчета  $\varepsilon(t)$  формул (14), (15). Расчет проводился при значении времени релаксации  $\tau_R = 10$  ns, что соответствует динамическим характеристикам рассматриваемого сегнетоэлектрика.

Исследуем процесс распространения по линии с описанными параметрами прямоугольной электромагнитной волны, имеющей нарастающий фронт длительностью 80 ns по уровням  $0.1 \times V_0 - 0.9 \times V_0$ . На рис. 6 приведены рассчитанные временные зависимости относительной величины напряжения  $V/V_0$  (где  $V_0$  — напряжение падающей волны) в различных сечениях



**Рис. 5.** Зависимости диэлектрической проницаемости от величины напряженности электрического поля. 1 — относительная дифференциальная диэлектрическая проницаемость; 2–4 — относительная диэлектрическая проницаемость: 2 —  $k_\varepsilon = 1.1$ ; 3 — 1.34; 4 — 1.52.



**Рис. 6.** Рассчитанные зависимости изменения во времени напряжения в различных сечениях ФЛ: 1 —  $Z = 0$ ; 2 —  $0.25Z_{\max}$ ; 3 —  $0.5Z_{\max}$ ; 4 —  $0.75Z_{\max}$ . *a* — при различных напряжениях падающей волны  $V_0$ , kV: 2' — 4; 3' — 6; 4' — 8. *b* — при различной крутизне зависимости  $\varepsilon(E)$ : 1' — отсутствие зависимости  $\varepsilon$  от  $|\mathbf{E}|$ ; 2' —  $k_\varepsilon = 0.9$ ; 3' — 0.75; 4' — 0.66.

ФЛ: в начале ФЛ —  $z = 0$  (кривые 1) и  $0.25Z_{\max}$  (2), в середине —  $z = 0.5Z_{\max}$  (3) и в конце линии —  $z = 0.75Z_{\max}$  (4). Расчеты проводились с помощью решения схемной (уравнения (10), (11)) и полевой (уравнения (6)–(8)) задач. Сравнение результатов такого моделирования показало их совпадение в пределах относительной погрешности не более 1%. Представленные на рис. 6, *a* зависимости соответствуют различным уровням приложенного напряжения:  $V_0 = 4$  kV (линии 2'),  $V_0 = 6$  kV (3'),  $V_0 = 8$  kV (4'). Как видно из рис. 6, *a*, по мере продвижения электромагнитной волны по линии происходит обострение ее фронта. Так, длительность фронта, определяемая по уровням  $0.1 \times V_0 - 0.9 \times V_0$ , изменяется от  $\tau_{F0} = 80$  ns в начале до  $\tau_{FL} = 54$  ns в конце линии при приложении напряжения с амплитудой  $V_0 = 4$  kV. При приложении  $V_0 = 6$  kV рассчитанная величина  $\tau_{FL}$  составляет 39 ns, при  $V_0 = 8$  kV —  $\tau_{FL} = 22$  ns.

Исследовано также влияние степени крутизны кривой  $\varepsilon(E)$  на процесс обострения фронта импульса при продвижении по ФЛ с нелинейной диэлектрической проницаемостью. Для этого использованы кривые  $\varepsilon(E)$ , аналогичные приведенной на рис. 5 (кривая 2), но с большими значениями крутизны спада (см. рис. 5, кривые 3, 4), что соответствует различным температурным режимам работы нелинейного диэлектрика. Введем коэффициент  $k_\varepsilon = \varepsilon(E_0)\varepsilon(0)$ , характеризующий перепад

значений  $\epsilon$  в том случае, когда диэлектрическая проницаемость максимальна, а также при приложении на входе ФЛ напряженности:  $E_0 = V_0/d = 2 \text{ MV/m}$  ( $V_0 = 4 \text{ kV}$ ,  $d = 2 \text{ mm}$ ). Кривая 2 на рис. 5 соответствует  $k_\epsilon = 0.9$ , 3 — 0.75, 4 — 0.66. На рис. 6, b представлены рассчитанные временные зависимости  $V/V_0$  в сечениях ФЛ  $z = \text{const}$  при приложении напряжения  $V_0 = 4 \text{ kV}$ . Зависимости на рис. 6, b соответствуют различной степени нелинейности сегнетоэлектрика — рабочего тела линии:  $k_\epsilon = 0.9$  (линии 2'),  $k_\epsilon = 0.75$  (3'),  $k_\epsilon = 0.66$  (4'). Линии 1' соответствуют отсутствию зависимости  $\epsilon$  от  $E$ . Результаты расчета электромагнитных процессов при распространении волны по ФЛ с описанными выше параметрами показывают, что ее фронт обостряется от  $\tau_{F0} = 80 \text{ ns}$  до  $\tau_{FL} = 54 \text{ ns}$  при  $k_\epsilon = 0.9$ ; при  $k_\epsilon = 0.75$ :  $\tau_{FL} = 37 \text{ ns}$ ; при  $k_\epsilon = 0.66$ :  $\tau_{FL} = 16.7 \text{ ns}$  (см. рис. 6, b).

Сравнение кривых, представленных на рис. 6, демонстрирует эффективность использования в качестве рабочего тела ФЛ сегнетоэлектриков с максимально возможной степенью нелинейности. Такой путь получения крутых фронтов электромагнитных волн является более предпочтительным, чем увеличение напряженности электрического поля, вызывающее необходимость обеспечения функционирования ФЛ при повышенных напряжениях. При снижении коэффициента  $k_\epsilon$ , характеризующего соотношение между минимальным и максимальным уровнями относительной диэлектрической проницаемости, с 0.9 до 0.66 степень обострения фронта волны  $K_w = \tau_{F0}/\tau_{FL}$  увеличивается с 1.48 до 4.8 при одном и том же напряжении падающей волны (см. рис. 6, b). В то же время рост приложенного напряжения с  $V_0 = 4$  до  $8 \text{ kV}$  приводит к увеличению  $K_w$  с 1.48 лишь до 3.6 (см. рис. 6, a).

## Заключение

С помощью физического и математического моделирования исследованы процессы обострения электромагнитной волны при ее прохождении по формирующей линии, диэлектрическая проницаемость рабочего тела которой нелинейна. Обоснована правомерность использования предложенных математических моделей для описания происходящих процессов. Из сравнения данных, полученных с помощью рассмотрения переходного процесса в эквивалентной электрической схеме с нелинейными емкостями, и данных физического моделирования следует, что длительности фронта совпадают в пределах 10%. Показано, что модифицированный векторный магнитный потенциал может быть использован для моделирования процессов распространения электромагнитной волны в нелинейном диэлектрике. Данные, полученные с помощью решения схемной и полевой задач, для случая, когда эффектами на окраинах ФЛ можно пренебречь, совпадают в пределах 1%. С помощью численного моделирования проанализировано влияние амплитуды волны и степени нелинейности диэлектрика

на процесс обострения фронта волны. Так, например, рост напряжения падающей волны в 2 раза приводит к снижению длительности фронта в 2.4 раза, а увеличение перепада  $\epsilon$  в 1.38 раза вызывает снижение длительности фронта в 3.2 раза.

## Список литературы

- [1] Месяц Г.А. Импульсная энергетика и электроника. М.: Наука, 2004. 704 с.
- [2] Катаев И.Г. Ударные электромагнитные волны. М.: Сов. радио, 1963. 148 с.
- [3] Богатырев Ю.К. // Изв. вузов. Радиофизика. 1965. № 8. С. 1171–1177.
- [4] Гапонов А.В., Фрейдман Г.И. // ЖЭТФ. 1959. Т. 36. С. 957–958.
- [5] Вербичкая Т.Н. Вариконды. М.: Госэнергоиздат, 1958. 64 с.
- [6] Branch G., Smith P.W. // J. Phys. 1996. Vol. 29. P. 2170–2178.
- [7] Финкельштейн М.И. Искусственные линии. М.: Военное изд-во, 1961. 88 с.
- [8] Biro O., Preis K. // IEEE Trans. on Magnetics. 1989. Vol. 25. N 4. P. 3145–3159.
- [9] Clemens M., Weiland T. // IEEE Trans. on Magnetics. 2003. Vol. 39. N 3. P. 1175–1178.
- [10] Джексон Дж. Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965. 702 с.
- [11] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высш. шк., 1970. 710 с.
- [12] Стрэттон Дж.А. Теория электромагнетизма. М.; Л.: ОГИЗ Гостехиздат, 1948. 539 с.
- [13] Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: ИЛ, 1954. 604 с.
- [14] Морс Ф.М., Фейсбах Г. Методы теоретической физики. М.: ИЛ, 1959. Т. 1. 930 с.
- [15] Clemens M., Weiland T. // IEEE Trans. on Magnetics. 2002. Vol. 38. N 2. P. 569–572.
- [16] Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 150 с.
- [17] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.
- [18] Резинкина М.М. // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 11. С. 17–24.
- [19] Садыков С.А., Бородин В.З., Агаларов А.Ш. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 6. С. 108–112.
- [20] Физическая энциклопедия [http://www.femto.com.ua/articles/part\\_1/2039.html](http://www.femto.com.ua/articles/part_1/2039.html).