Краткие сообщения

01

Применение принципа Д'Аламбера в задаче подвижной гравиметрии

© А.С. Девятисильный

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН,
690041 Владивосток, Россия
e-mail: devyatis@iacp.dvo.ru

(Поступило в Редакцию 25 марта 2010 г.)

Дано краткое обоснование физически и математически корректной модели гравиинерциальной системы и представлены результаты вычислительного эксперимента, иллюстрирующие ее эффективность.

В работе [1] отмечена физическая (теоретико-механическая) общность и совместимость задач гравиметрии и инерциальной навигации и представлена модель гравиинерциальной системы (ГИС/GIS) на базе трехкомпонентного (3D — по числу ньютонометров, или акселерометров [2]) метода инерциальной навигации (ИНМ/INM) при условии доступности информации о модуле радиуса-вектора положения объекта в геоцентрической системе координат. Источниками такой информации являются, например, навигационные спутниковые системы типа ГЛОНАСС (GLONASS).

Исходное математическое описание модели ГИС в настоящей статье, как и в [1], ограничивается постановкой обратной задачи в форме уравнений „состояние–измерение", где уравнения состояния — это уравнения пространственного движения объекта, отождествляемого с материальной точкой, или динамическая группа уравнений (ДГУ) 3D-ИНМ [3], так что

$$\dot{q}_i = -e_{ikj}\omega_k q_j + p_i, \quad q_i(0) = q_{i,0},$$

$$\dot{p}_i = -e_{ikj}\omega_k p_j + G_i(q) + F_i, \quad p_i(0) = p_{i,0},$$

$$J = |q| + \varepsilon, \tag{1}$$

где J и ε — соответственно измерение и его погрешность; e_{ikj} — псевдотензор Леви–Чивита; $q = (q_i)$, $p = (p_i)$, $\omega = (\omega_i)$, $G = (G_i)$, $F = (F_i)$ — соответственно векторы координат, удельных импульсов, абсолютной угловой скорости вращения приборной платформы, напряженности гравитационного поля Земли (GE-поля) и удельных сил негравитационной природы в проекциях на оси координатного ортогонального трехгранника (обозначим его через $oy = oy_1y_2y_3$) с началом в центре Земли и осями, параллельными осям приборного трехгранника $\tilde{o}y = \tilde{o}y_1y_2y_3$, в идеальном случае ориентированного так, что ось $\tilde{o}y_3$ направлена по радиусу-вектору положения объекта, а оси $\tilde{o}y_1$ и $\tilde{o}y_2$ — соответственно на географические Восток и Север; заметим, что в (1), как и всюду далее, действует правило суммирования по повторяющимся индексам.

Как следует из изложенного, $|q| = r = q_3$ и $J = r + \varepsilon$.

Цель настоящей статьи — отличная от [1] прикладная интерпретация модели (1). Напомним, что, согласно концепции ИНМ, модель (1) должна быть дополнена моделями измерений величин F_i и ω_i $(i = \overline{1,3})$, реализуемых с помощью инерциальных измерителей — ньютонометров (акселерометров) и гироскопов. Тогда, учитывая, что при измерении F_i, ω_i и q_3 обычно реализуется процедура динамического сглаживания (режим отслеживания параметра), можно считать, что в конечном итоге доступным являются не только их сглаженные оценки (т.е. $\tilde{F}_i$, $\tilde{\omega}_i$ и $\tilde{q}_3$), но и производные, в частности, $\dot{\omega}_i$, $\dot{q}_3$, $\ddot{q}_3$. Далее примем, что

$$\tilde{q}_3 = J, \quad \tilde{\dot{q}}_3 = \dot{q}_3 + \varepsilon_1, \quad \tilde{\ddot{q}}_3 = \ddot{q}_3 + \varepsilon_2, \quad \tilde{F}_i = F_i + f_i,$$

$$\tilde{\omega}_i = \omega_i + \nu_i, \quad \tilde{\dot{\omega}}_i = \dot{\omega}_i + \Delta_i,$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, f_i, \nu_i, \Delta_i$ — инструментальные погрешности.

В отличие от [1], где для получения опорного решения ДГУ решались все 6 уравнений $(i = \overline{1,3})$, здесь предполагается решение только первых четырех $(i = \overline{1,2})$, т.е. речь ведется о 2D-схеме ИНМ, в которой модельные значения переменных q_3 и p_3 $(p_3 = \dot{q}_3 - \omega_2 q_1 + \omega_1 q_2)$, а также напряженности GE-поля вычисляются с учетом значений сглаженных оценок $\tilde{q}_3$ и $\tilde{\dot{q}}_3$.

В силу того что при таком моделировании не вычисляется опорное значение q_3, построить невязку измерения $\delta J = \delta q_3 + \varepsilon$ и поставить задачу коррекции как обратную задачу „в малом" (т.е. в линейном приближении при вирьировании уравнений) в той форме, в которой это было сделано в [1], теперь уже нельзя.

Вместо этого изберем другой путь, а именно обратимся к принципу Д'Аламбера [2]: „Если в какое-либо мгновение к физическим силам, действующим на данную механическую совокупность (или любую ее часть), присоединить все относящиеся к ней даламберовы силы инерции, то образуется система сил, статически эквивалентная нулю".

Реализовав этот принцип на оси oy_3 с учетом шестого уравнения из ДГУ, имеем условие

$$z = \dot{p}_3 - \omega_2 p_1 + \omega_1 p_2 - G_3 - F_3 = 0,$$

или

$$z = \ddot{q}_3 - (\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3)q_1 - (\omega_2\omega_3 - \dot{\omega}_1)q_2 + (\omega_1^2 + \omega_2^2)q_3$$
$$- 2\omega_2 p_1 + 2\omega_1 p_2 - G_3 - F_3 = 0. \qquad (2)$$

Подстановка в (2) значений переменных, доступных благодаря измерениям и решению ДГУ в режиме 2D-ИНМ ($i = \overline{1, 2}$), приводит к невязке $\delta z \neq 0$, которая содеражит информацию о погрешностях решения, что позволяет поставить обратную задачу „в малом“ для оценки значений этих погрешностей. Модель такой задачи принимает вид

$$\delta\dot{q}_i = -e_{ikj}\omega_k\delta q_j + \delta p_i - e_{ikj}\nu_k q_i, \quad \delta q_i(0) = \delta q_{i,0},$$
$$\delta\dot{p}_i = -e_{ikj}\omega_k\delta p_j + \delta G(r, q) + f_i - e_{ikj}\nu_k p_j,$$
$$\delta p_i(0) = \delta p_{i,0},$$
$$\delta z = (\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3)\delta q_1 - (\omega_2\omega_3 - \dot{\omega}_1)\delta q_2 + 2\omega_2\delta p_1$$
$$- 2\omega_1\delta p_2 + \delta G_3(r, q) - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\varepsilon + \varepsilon_2 + f_3 = 0,$$
$$i = 1, 2; \quad j, k = \overline{1, 3},$$

где

$$\delta G_i(r, q) = g_i + \frac{\partial G_i(r, q)}{\partial r}\delta r + \frac{\partial G_i(r, q)}{\partial q_j}\delta q_j,$$

$g = (g_i)$, $i = \overline{1, 3}$ — вектор аномалии GE-поля в текущей точке траектории, $q_1 = q_2 = 0$, $q_3 = r$, $p_1 = \omega_2 q_3$, $p_2 = -\omega_1 q_3$, $p_3 = \dot{q}_3$, $\delta q_3 = \delta r = \varepsilon$, $\delta p_3 = \varepsilon_1 - \omega_2\delta q_1 + \omega_1\delta q_2$. Здесь вариации измеряемой величины ($q_3 = r$) и ее производной ($\dot{q}_3$) отождествляются с погрешностями (ε и ε_1) их сглаженных оценок, потому что последние непосредственно используются при построении опорного решения.

Далее, учитывая, что имеет место существенное преобладание значения вертикальной компоненты аномалии (g_3) над горизонтальными (g_1 и g_2), полагаем $g_1 = 0$, $g_2 = 0$, $g = g_3$. Тогда расширение вектора состояния системы (3) за счет включения в него g с одновременным пополнением системы (3) уравнением эволюции g (а именно $\dot{g} = 0$) дает возможность найти оценку g и решить, таким образом, ту же, что и в [1], задачу уточнения GE-поля на траектории и оценки углов наклона приборной плоскости $\bar{o}y_1y_2$. При этом качество оценки g_3 будет тем выше, чем менее изменчиво g_3 на временном интервале наблюдения по сравнению с изменчивостью погрешностей ε, ε_2 и f_3. Относительно последней отметим следующее. Погрешность f_3 может быть погрешностью вертикального ньютонометра (его роль может исполнять и высокоточный гравиметр) или погрешностью априорных представлений о силе F_3, формируемых при организации программных траекторий для объекта-носителя. В обоих случаях возможно еще одно дополнительное расширение вектора состояния задачи за счет включения в него, кроме g, еще и f_3. При этом очевидна желательность ситуации, когда характеры эволюции g и f_3 отличны.

Из изложенного видим, что обсуждаемая ГИС существенно отличается от системы, описываемой в [1], тем, что реализуется на базе 2D-ИНМ.

При исследовании расширенной задачи (с учетом пополнения (3) уравнением $\dot{g} = 0$) установлено выполнение алгебраического условия наблюдаемости [4] для случая движения объекта по географическим параллелям с постоянной (относительно Земли) линейной скоростью (при этом $\omega = \mathrm{const}$), что вместе с последующим экспериментальным подтверждением устойчивости ее решения в вычислительной среде является вполне достаточным свидетельством корректности математической постановки задачи.

Учитывая представление модели ГИС в виде уравнений „состояние–измерение“ [4], в имитационных вычислительных экспериментах (имеющих определяющее значение для задач ИНМ как вычислительных по сути) для решения расширенной задачи (3) целесообразно использование метода динамического обращения [5] в форме алгоритма калмановской фильтрации.

На рис. 1, 2 представлены основные результаты одного из таких экспериментов, в котором на первом этапе решения реализуется калмановское оценивание, а на втором — апостериорная обработка калмановской

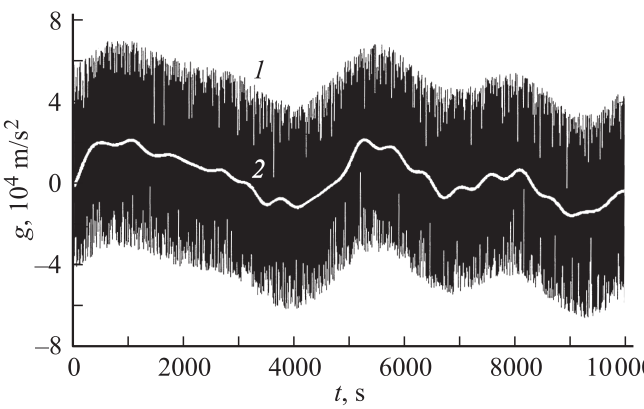

Рис. 1. Кривые эволюции оценок значения g: *1* — текущая (калмановская) оценка; *2* — апостериорная вейвлет-оценка.

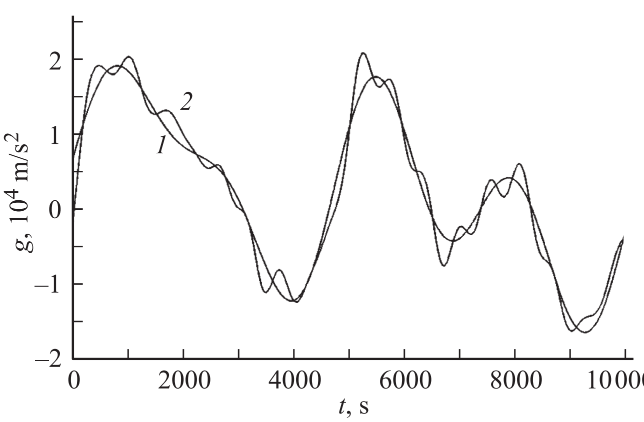

Рис. 2. Эволюция истинной величины g (кривая *1*) и его вейвлет-оценки (кривая *2*).

оценки ($\hat{g}(t)$ — кривая *1* на рис. 1) с использованием следующих представлений.

Обозначим через $z = (z_i) = \left(\hat{g}(t_i)\right)$ N-мерный вектор значений функции $\hat{g}(t)$, $t \in [0, T]$ при $t = i\Delta t$, $i = 0, N-1$, $\Delta t = \text{const}\forall i$, $T = (N-1)\Delta t$.

Идея „очищения" вектора z от шумов состоит в некотором , вообще говоря, нелинейном преобразовании его в вектор $\tilde{z}$, т.е. $\tilde{z} = P(z)$, где P — оператор преобразования. В настоящей работе такое преобразование конструируется на основе пирамидального алгоритма Малло [6], реализуемого на основе ортогональных функций Добеши (db 10) [7], а также целевой функции

$$\Phi = \left| \frac{(z-\tilde{z})^T \tilde{z}}{\|z-\tilde{z}\|_E \, \|z\|_E} \right| = |\text{const}\, \varphi|,$$

интерпретирующей оператор P как проектор и апробированной в этом качестве в работе [8].

Суть апостериорной обработки вектора $\mathbf{z}$ состоит в его субчастотном разложении (на уровнях $n \le [\lg_2 N]$) на аппроксимирующие („низкочастотные", или L) и детализирующие („высокочастотные", или H) составляющие, пороговым („от нуля") ограничении последних и реконструкции вектора $\tilde{z}$ в процессе реализации правила выбора $\tilde{z}$: $\min\limits_{l} \Phi(z, \tilde{z})$, где l — вектор значений порогов, размерность которого $\dim l = n$; начальные значения компонент вектора l выбираются равными максимальным исходным значениям H-составляющих.

При проведении вычислительного эксперимента предполагалось, что объект движется в восточном направлении на широте $\varphi = 45^\circ$ со скоростью $v = 50\,\text{m/s}$, причем в радиальном направлении ускорение его движения описывается как

$$\ddot{r} = A\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin\frac{2\pi}{T}\,t,$$

где $A = 10\,\text{m}$, $T = 20\pi\,\text{s}$, и оценивается с погрешностью, имеющей нулевое среднее и значение среднего квадратического отклонения (СКО) $\sigma_{\varepsilon_2} = 5 \cdot 10^{-4}\,\text{m/s}^2$ при исходном СКО измерения $r(t)$, равном $1\,\text{m}$, т.е. $\sigma_\varepsilon = 1\,\text{m}$. Инструментальные погрешности ньютонометров и гироскопов представляются несмещенными относительно нуля нормальными белыми шумами со следующими СКО: $\sigma_{\nu_i} = 0.001^\circ$, $h \approx 5 \cdot 10^{-9}\,\text{s}^{-1}$; $\sigma_{f_1} = \sigma_{f_2} = 0.001\,\text{m/s}^2$, $\sigma_{f_3} = 10^{-6}\,\text{m/s}^2$ (как видим, имеет место значительное преобладание σ_{ε_2} над σ_{f_3}, т.е. $\sigma_{\varepsilon_2} \gg \sigma_{f_3}$).

Сравнение кривых *1* и *2* на рис. 2 (как и вся совокупность выполненных вычислительных экспериментов) дает основание для вполне оптимистической оценки перспектив применения предложенной модели ГИС при условии повышения точности измерения вертикального ускорения ($\ddot{r}$) и обращения к методам апостериорной обработки на заключительном этапе решения задачи подвижной гравиметрии.

Исследование частично поддержано грантами РФФИ-ДВО (№ 09-01-98503-р_восток_а) и ДВО РАН (№ 09-1-П29-02, № 09-III-А-03-066).

Список литературы

[1] *Девятисильный А.С.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 12. С. 103–105.

[2] *Ишлинский А.Ю.* Классическая механика и силы инерции. М.: Наука, 1987. 320 с.

[3] *Андреев В.Д.* Теория инерциальной навигации. Корректируемые системы. М.: Наука, 1967. 648 с.

[4] *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с. (Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M.A. Topics in mathematical system theory. NY: McGraw-Hill, 1969).

[5] *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В.* Задачи динамического обращения // Вестн. РАН. 2006. Т. 76. С. 615–624.

[6] *Mallat S.G.* // IEEE Transact. on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 1989. Vol. 11. N 7. P. 674–693.

[7] *Дьяконов В.П.* Вейвлеты. От теории к практике. М.: СОЛОН_Р, 2002. 448 с.

[8] *Девятисильный А.С., Прудкогляд Н.А.* // Авиакосмическое приборостроение. 2007. № 11. С. 39–44.