# Метод измерения параметров волн в пленках на основе регистрации электрических сигналов

#### © И.В. Симонов, И.М. Смирнов

Институт проблем механики РАН, 119526 Москва, Россия

#### (Поступило в Редакцию 12 мая 2010 г.)

Комплексный метод определения характеристик волновых процессов, ранее апробированный при испытаниях волокон, модифицирован на случай образцов полимерной пленки. Регистрация электрических сигналов антеннами в радиодиапазоне в моменты прохождения упругой продольной волны разгрузки в узкой полоске пленки после заданного начального квазистатического растяжения позволяет определять ее скорость, массовая скорость за фронтом волны находилась по кадрам высокоскоростной видеосъемки движения свободного края полоски после ее разрушения. По этим данным определяются скачки деформации и напряжения на фронте волны и соответствующий этому волновому процессу мгновенный модуль Юнга.

# Введение

05:12

Одной из важнейших задач физики является построение моделей поведения материалов и элементов конструкций. Экспериментальные исследования служат целям калибровки таких моделей путем разработки и реализации методов определения материальных параметров и функций, входящих в эти модели. Предлагаемый способ изучения волн конечной амплитуды основан на самогенерации динамическим процессом электрического сигнала (ЭС), способ бесконтактный — не требует размещения дополнительных элементов на образце, в отличие от традиционных методов, что особенно важно для тел микронных размеров. Исследованию процессов возникновения электрического поля при разрушении и волновых движениях в материалах различной физической природы посвящено значительное количество работ. Обзоры исследований в этой области опубликованы в [1-3]. Результаты измерений электрического поля при динамическом деформировании сред представлены в работе [4]. Возможности применения электретов в качестве датчиков перемещений и деформаций изложены в монографии [5]. Метод регистрации ЭС с целью определения параметров волн и колебаний в волокнах был предложен ранее [6–9].

В предлагаемой работе излагается комплексный метод определения динамических и кинематических характеристик продольной волны разгрузки в тонких предварительно растянутых пленках. Демонстрационные эксперименты проведены с использованием двух типов пленки, существенно различающихся по толщине и обладающих разной реологией: вязкоупругой со слабым проявлением пластичности у материала толстой пленки из полистирола и вязкоупругопластической — у тонкой полипропиленовой пленки. Генерация волны в узких полосках пленок являлась результатом поперечного разрыва из начального надреза. Показана возможность регистрации ЭС в радиодиапазоне двумя разнесенными антеннами, расположенными вдоль оси удлиненного образца, от упругой волны разгрузки и определения волновой скорости по разновременности появления этих сигналов и базе. Измерены значения скорости волны разгрузки в полосках, вырезанных вдоль и поперек направления вытяжки пленки, при выборке порядка 10 опытов, по ним даны разные значения средней скорости и мгновенного модуля Юнга вследствие ортотропии. Проведены опыты по одновременному измерению волновой и массовой скоростей. Последняя определяется путем высокоскоростной видеосъемки движения свободного края полоски.

# 1. Методика

В качестве образцов брались пленки из полистирола для лазерных принтеров марки HP (Lomond 0710425, UK) толщиной  $h = 142 \,\mu \text{m}$  и пленки из полипропилена — проспект-пакеты или файлы для хранения бумаг (ГОСТ Р 51121-97, Сан Пин 24707-93, арт. SV-104, Россия),  $h = 32 \, \mu m$ . Опыты проводились при комнатной температуре. Пленка нарезалась полосками шириной w = 5-30 mm, длиной L = 20-30 cm, которые закреплялись в захватах подвижной траверсы со слабым натягом. Захваты, как и вся экспериментальная установка, заземлены. Затем в испытуемом образце бритвой производились один или два симметричных надреза перпендикулярно свободным сторонам. Подвижный захват приводился в движение вручную рывком, другой был зафиксирован. Скорость нагружения 1-5 m/s не фиксировалась, так как измеряемые величины мало зависели от этой скорости. В момент достижения нагрузкой критического значения от кончика надреза к противоположной стороне полоски начиналось ускоренное движение трещины, а после разрыва от образовавшегося свободного края распространялась волна разгрузки. Быстрые процессы разрушения и волнообразования вызывали изменения электрического поля в окрестности образца в радиодиапазоне, т.е. в ближней зоне, где изменения поля квазистатические, а не волновые. Устройство, регистрирующее электрическую компоненту поля, —



**Рис. 1.** Схема эксперимента: *1* — фиксированный захват, *2* — подвижный захват, *C*<sub>1</sub>, *C*<sub>2</sub> — выходы от датчиков.



**Рис. 2.** Схема типичной осциллограммы: I — сигнал от первого датчика, 2 — сигнал от второго датчика,  $\Delta t$  — время разрушения,  $t_w$  — время распространения волны по базе.

запоминающий двухканальный цифровой осциллограф LeCroy WaveSurfer 422 с полосой пропускания 200 MHz, используемый режим работы — DC1M.

Схема эксперимента представлена на рис. 1. На закрепленном образце располагались два датчика-антенны на расстоянии l друг от друга (база),  $l_0$  — дистанция между разрезом и левым датчиком. Они представляли собой намотку в один "сплющенный" оборот из изолированной проволоки, через нее продевалась полоска. Во внешней части антенн (вне витка) проволока была помещена в металлическую заземленную обмотку для предотвращения посторонних наводок на антенны. Датчики присоединены к каналам  $C_1$ ,  $C_2$  осциллографа.

Форма зависимости напряжения U от времени t на экране осциллографа схематически изображена на рис. 2. Излом формы сигнала с канала С<sub>1</sub>, предположительно, соответствует моменту разрушения, а предшествующее ему медленное нарастание сигнала связано с процессом распространения трещины в испытываемом образце. На правом датчике из-за его удаленности от места разрыва сам процесс разрушения практически не отражался. Относительно природы возникновения первой фазы сигнала, по-видимому, наиболее вероятной (если исходить из обзора многих моделей генерации электромагнитных сигналов при динамическом разрушении материалов [4-6]) является гипотеза о суперпозиции множественных излучений ЭС при колебаниях молекулярных электрических диполей при распространении микроволн от места разрушения. Вторая фаза вызвана прохождением фронта волны с большими градиентами скоростей частиц. Определение места излома иногда затруднено из-за его нечеткости. Из осциллограмм определяется время прохождения фронта волны tw дистанции l и затем — скорость волны разгрузки  $c = l/t_w$ .

# 2. Определение скорости волн

Пленка НР имеет, согласно нашим измерениям, плотность  $\rho = 1334 \text{ kg/m}^3$ . В первой серии опытов она разрезалась на полоски шириной 2.5-2.8 сm. Глубина *d* начального надреза составляла половину этой ширины. В табл. 1 и 2 представлены данные обработки опытов для разного направления нарезки по отношению к направлению вытяжки пленки. Средняя скорость  $\langle c \rangle$  составила соответственно 2.1 и 1.94 km/s при небольшой дисперсии. Ортотропия пленки является причиной того, что эти скорости волн в двух взаимно перпендикулярных направлениях различаются на 8%.

Деформации в волнах были малыми, поэтому при обработке данных использована линейная теория наследственно упругого тела [10], качественно правильно описывающая особенности поведения полимера при импульсном воздействии. Согласно этой теории, от места воздействия начинает распространяться фронт упругой волны со скоростью, определяемой мгновенным модулем Юнга *E*. Амплитуда волны затухает по экспоненциальному закону из-за влияния вязкости. За этим фронтом движется фронт упругой волны без затухания с меньшей скоростью, определяемой значением модуля  $E_{\infty}$  при квазистатическом нагружении ( $E_{\infty} < E$ ). Вследствие затухания амплитуды переднего фронта электрический сигнал с удаленного от места воздействия датчика должен быть слабее, чем от расположенного близко, что

**Таблица 1.** Скорость волны в пленке, нарезанной по направлению вытяжки

<i>d</i> , mm	$l_0$ , cm	l, cm	$t_w, \mu s$	c, km/s
14	3	13	63	2.06
12.5	2	8.5	40	2.12
13	1	6	_	-
12.5	3.5	17	80	2.12
12.5	2	14	66	2.12
12.5	2	9	41	2.19
12.5	1	5.5	27	2.04
12.5	3	17.5	95	1.84
12.5	2	13.5	65	2.08
15	2	8.5	37	2.3
	<i>d</i> , mm 14 12.5 13 12.5 15.5 1	$\begin{array}{c c c} d, \mbox{ mm } & l_0, \mbox{ cm } \\ \hline 14 & 3 \\ 12.5 & 2 \\ 13 & 1 \\ 12.5 & 3.5 \\ 12.5 & 2 \\ 12.5 & 2 \\ 12.5 & 1 \\ 12.5 & 3 \\ 12.5 & 3 \\ 12.5 & 2 \\ 15 & 2 \\ \end{array}$	$\begin{array}{c cccc} d, \mbox{ mm } & l_0, \mbox{ cm } & l, \mbox{ cm } \\ \hline 14 & 3 & 13 \\ 12.5 & 2 & 8.5 \\ 13 & 1 & 6 \\ 12.5 & 3.5 & 17 \\ 12.5 & 2 & 14 \\ 12.5 & 2 & 9 \\ 12.5 & 1 & 5.5 \\ 12.5 & 3 & 17.5 \\ 12.5 & 2 & 13.5 \\ 15 & 2 & 8.5 \\ \end{array}$	$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$

Таблица 2. Скорость волны в пленке, нарезанной поперек направления вытяжки

w, mm	<i>d</i> , mm	$l_0$ , cm	l, cm	$t_w, \mu s$	<i>c</i> , km/s
3	2	2 2	12	72	1.66
3	1.5		8.5	80	1.06
3 2.5	1.5	1 2	6 11.5	24 60	2.5 1.91
2.5	1.25	2	7.5	40	1.86
2.5	1.25	1	4.5	24	1.88
2.5	1.25	1	5	24	2.08
2.8	1.4	1	4.5	18	2.22

и наблюдается, как правило, в опытах. При усовершенствовании конструкции антенны и схемы электрической цепи, в которую включена каждая антенна, и путем использования усилительно-селективного устройства данная методика позволит измерять коэффициент затухания волны. В проведенных опытах разброс амплитуд сигналов затрудняет подобные измерения.

Согласно формуле для осредненного модуля Юнга, отвечающего мгновенной упругой разгрузке,  $\langle E \rangle = \rho \langle c \rangle^2$ , они составили соответственно  $\langle E \rangle = 5.88$  и 5.02 GPa. Здесь и далее изменением плотности пренебрегается ввиду малости деформаций.

Для сопоставления проведена другая серия опытов с пленкой HP при продольной нарезке полосок меньшей ширины — 5 mm (опыты 2). Длина одного надреза составляла  $d \approx 2.5$  mm. Примеры зарегистрированных электрических сигналов приведены на рис. 3. Начальная пологая фаза сигнала с ведущего датчика по 5 опытам длится  $100-130 \, \mu$ s.

Данные по значениям скорости волн представлены в табл. 3. Средняя скорость составила 1.91 km/s. Она оказалась меньше средней скорости, полученной в опытах l с полоской гораздо большей ширины h и длины начального разреза (12.5 mm против 2.5 mm в опытах 2), на  $\approx 10\%$ . Поскольку отношения  $l_i/h_i$  в опытах одинаковы, то элементарный безразмерный анализ для отношений предельных напряжений  $\sigma_i$  и усилий разрушения  $T_i$  позволяет записать следующий результат:  $\sigma_2/\sigma_1 = T_1/T_2 = \sqrt{l_1/l_2} = \sqrt{5}$ . Отметим, что

80

нения волны в полоске пленки НР шириной 5 mm.

**Таблица 3.** Скорость волны в пленке HP, нарезанной по направлению вытяжки полосками шириной 5 mm

L, mm	База, <i>l</i> , ст	Время, $t_w$ , $\mu$ s	Скорость, km/s
25	13	172	1.81
20	8	40	2.0
10	4	20	2.0
30	17.5	86	2.03
20	13	70	1.86
20	7	37	1.89
10	5	26	1.92
30	18.5	104	1.78

увеличение напряжения  $\sigma$  при переходе 1-2 заметно отразилось на качестве осциллограмм: в опытах 2 они стали более четкими. Таким образом, существенное увеличение предельных напряжений разрыва в случае  $h = 5 \,\mathrm{mm}$ , а значит и амплитуды генерируемой волны, изменило скорость этой волны в сторону уменьшения. Напомним, что на фронте волны имеет место волна разгрузки вдоль некоторой динамической кривой разгрузки, уменьшение скорости волны означает уменьшение среднего наклона этой кривой с ростом приложенного начального напряжения растяжения. К последнему выводу следует отнестись с осторожностью, как к предварительному: возможно проявление масштабного эффекта и для выяснения влияния разных факторов необходимо проведение дополнительных экспериментов. Существенная зависимость скорости волны разгрузки от амплитуды обнаружена ранее у полимерных волокон [6].

Аналогичные эксперименты позволили измерить скорость волны разгрузки в полосках из тонкой пленки ( $\rho = 870 \text{ kg/m}^3$ ), нарезанной продольно и поперечно направлению вытяжки. По нескольким опытам (без статистического анализа) она оказалась в пределах 2.3–2.7 и 1.8–2.0 km/s для разных направлений осей ортотропии. Соответственно модули Юнга при мгновенной упругой разгрузке лежат в пределах 4.6–6.1 и 3.5–4.6 GPa. Трудности работы с данными образцами сопряжены с тем, что регистрируемый ЭС от бегущей волны был гораздо слабее, и в большинстве случаев (проведено несколько десятков опытов) не удавалось точно измерить время  $t_w$ .

# 3. Одновременное измерение волновой и массовой скорости

На примере этих опытов демонстрируется возможность одновременного измерения волновой и массовой скорости в волне разгрузки в полоске пленки, а по этим данным — определение скачков напряжения и деформации на фронте этой волны. Образец — полоска шириной 1 ст, вырезанная по направлению вытяжки, — фиксировался в захватах и на нем делались два симметричных надреза длиной 1.5–2 mm перпендикулярно



свободным поверхностям для того, чтобы минимизировать влияние момента, возникающего при разрушении полоски. Область около мест надреза "зачернялась" фломастером для возможности фиксации положения трещины и впоследствии — свободного края полоски на кадрах съемки. Одна из антенн в этих опытах располагалась вблизи места разреза, другая — у дальнего захвата. Как и в предыдущих опытах, к подвижному захвату прикладывалось усилие рывком, в результате которого полоска разрушалась, генерировалась волна разгрузки и по разновременности ЭС, регистрируемых датчиками, и базе рассчитывалась волновая скорость.

Параллельно со снятием сигнала велась съемка окрестности места разрыва цифровой видеокамерой Photron FASTCAM-1024PCI со скоростью 27 000 s. Производилась компьютерная обработка результатов съемки. Сначала отбирались нужные кадры, затем выбиралась некоторая неподвижная точка на кадрах, по изменению положения свободного конца полоски относительно этой точки, измеряемого при помощи фотографии приложенной линейки, рассчитывалась скорость его движения — массовая скорость за волной разгрузки. До прихода отраженной волны (на протяжении порядка десяти кадров) она оставалась постоянной. Иногда удается зарегистрировать изменение этой скорости, но обычно отраженная волна значительно ослаблена (объяснение этому дано ниже).

На втором датчике процесс разрушения не отражается, а резкое нарастание ЭС свидетельствует о подходе фронта волны с большими градиентами деформации. Поэтому с целью упрощения описания структура фронта волны игнорируется и считается, что распространяется волна в форме "ступеньки". Используя законы сохранения на скачке и соотношения линейной теории упругости, по измеренным значениям массовой и волновой скорости v и c оценим скачки деформации e и напряжения  $\sigma$  на фронте проходящей волны, а также мгновенный модуль Юнга, отвечающий разгрузке

$$e = v/c, \quad \sigma = \rho c v, \quad E = \sigma/e.$$
 (1)

Результаты определения волновой и массовой скоростей и затем скачков величин по формулам (1) в трех опытах представлены в табл. 4. Волновые скорости мало отличаются от аналогичных скоростей по данным табл. 1, несмотря на другие условия проведения опыта и как следствие — иные значения предельной нагрузки, а значит и амплитуды волны.

При медленном растяжении полоски шириной 1 ст с такими же симметричными надрезами глубиной 1.5–2 mm предельные показания безмена в пяти опытах были равны: 2560, 2700, 2700, 2480, 2860 g. Средние значения предельной силы растяжения и напряжения на площадке, соединяющей начальные разрезы средней суммарной длины 2.5 mm, перед разрушением равны  $\langle T_s \rangle = 2660$  g,  $\langle \sigma_s \rangle = 25$  MPa. Значения скачка напряжения на фронте волны, указанные в табл. 4, примерно в три раза выше. Столь существенное различие объясняется влиянием скорости нагружения.

Таблица 4. Волновая и массовая скорость, скачки напряжения и деформации на фронте и мгновенные модули Юнга для пленки НР

И.В. Симонов, И.М. Смирнов

Подвижка свобод- ного края за 11 µs, mm	Скорость свобод- ного края <i>v</i> , m/s	База <i>l</i> , ст	Время пробега <i>t<sub>w</sub></i> , µs	Скорость волны c, km/s	e, %	σ, MPa	<i>E</i> , GPa
3.2	28.8	19	90	2.1	1.37	81	6.0
3.1	28.0	21	110	1.9	1.47	71	4.8
3.0	27.0	18.5	100	1.85	1.46	67	4.6

Идентичные эксперименты были проведены для полосок тонкой пленки. При регистрации ЭС расстояние от надреза до первого датчика устанавливалось равным нескольким сантиметрам, чтобы избежать сильного влияния распространения трещины. Приведем сначала результаты для полосок, нарезанных по направлению вытяжки.

# Опыт 1

База l = 14.5 ст. Время пробега расстояния l, измеренное по записанным ЭС, равно  $t_w = 60\,\mu$ s. Скорость волны c = 2.4 km/s. Около  $120\,\mu$ s требуется для возвращения волны к свободному краю после отражения. Массовая скорость равна v = 19.5 m/s, а после прихода отраженной волны — 12.8 m/s. По этим данным, моделируя волну разгрузки ступенькой и используя формулы (1), найдем упругий модуль и скачки деформации и напряжения:  $\sigma = 40.7$  MPa, e = 0.81%, E = 5.03 GPa.

Отраженная волна приходит существенно ослабленной вследствие динамической потери устойчивости, при которой происходит трансформация энергии продольной волны в динамический изгиб после ее отражения от жесткого захвата в виде волны сжатия. Оценку критичекого расстояния lc, пройденного отраженной волной от захвата, начиная с которого возбуждается изгибное движение полоски, получим, используя теорию устойчивости сжатого напряжения  $\sigma$  упругого стержня на основе подхода Эйлера. Учитывая, что скорость инициирующей волны много больше скорости изгибных волн и поэтому на ее фронте изгиб не успевает развиться, при рассмотрении задачи об устойчивости упругого стержня под действием сжимающей силы на фронте волны следует поставить условия жесткого закрепления, как и на другом конце. Из известного решения этой задачи "по Эйлеру" следует оценка l<sub>c</sub> для полоски шириной w = 20 mm:

$$l_c = \sqrt{\pi ES}/\sigma = \sqrt{\pi hw}/e = 16\,\mathrm{mm},$$

где S — площадь поперечного сечения полоски. Аналогичная оценка для полоски пленки HP шириной w = 5 mm дает значение  $l_c = 12 \text{ mm}$ . Таким образом, потеря устойчивости начинается близко от места закрепления и упевает развиться за время пробега отраженной

волны до свободного края, что ослабляет эту волну за счет трансформации ее энергии в динамический изгиб.

#### Опыт 2

База — 21 ст. Время пробега волны  $t_w = 92 \,\mu$ s,  $c = 2.3 \,\text{km/s}$ ,  $v = 27 \,\mu$  13.5 m/s после прихода отраженной волны,  $\sigma = 54 \,\text{MPa}$ , e = 1.17%,  $E = 4.6 \,\text{GPa}$ .

#### **Опыт** 3

База l = 16 ст. Время пробега волны  $t_w = 80 \,\mu$ s, c = 2.0 km/s, v = 27 и 13.5 m/s (повторение результата опыта 2),  $\sigma = 50$  MPa, e = 1.35%, E = 3.5 GPa. На рис. 4 представлена соответствующая осциллограмма.

Значения массовой скорости, измеренные в нескольких опытах по кадрам видеосъемки, оказались в хорошем согласии друг с другом. Погрешность измерения волновой скорости составила около 10%, поскольку начало сигнала на осциллограмме определяется нечетко. Это обусловило разброс значений *е*, *σ* и *E*, впрочем, обычный при динамических испытаниях любых материалов, особенно полимеров.

Приведем теперь результаты измерений для полосок из тонкой пленки, нарезанных перпендикулярно направлению вытяжки.

#### Опыт 1

База l = 30 ст. Время пробега волны по базе  $t_w = 150 \,\mu$ s,  $c = 2 \,\text{km/s}$ ,  $v = 17.6 \,\text{m/s}$ ,  $\sigma = 32 \,\text{MPa}$ , e = 0.88%,  $E = 3.6 \,\text{GPa}$ . Раскрытие трещины в момент разрушения равно 2 mm.

Пример регистрации движения свободного края полоски по кадрам съемки приведен в табл. 5, а осциллограммы сигналов от волны разгрузки — на рис. 5.

#### Опыт 2

20

База l = 23 сm. Время  $t_w = 60 \,\mu$ s, c = 2.3 km/s, v = 20.3 m/s,  $\sigma = 42$  MPa, e = 0.88%, E = 4.8 GPa. Раскрытие трещины в момент разрушения равно 1.5 mm.



Рис. 4. Типичная осциллограмма ЭС после разрушения продольно нарезанной полоски пленки НР.

**Таблица 5.** Результаты измерения положения свободного края полоски после разрушения

Расстояние между точкой отсчета и движущейся кромкой, mm	Пройденное за 37 µs расстояние, mm	Скорость, m/s		
2.85				
3.5	0.65	17.6		
4.15	0.65	17.6		
4.8	0.65	17.6		
5.45	0.65	17.6		
6.1	0.65	17.6		
6.8	0.7	18.9		
7.45	0.65	17.6		
8.1	0.65	17.6		



Рис. 5. Типичная осциллограмма ЭС от волны разгрузки в поперечно нарезанной тонкой полоске.

#### **Опыт** 3

База l = 15 ст. Время пробега волны не определяется. Массовая скорость v = 20.3 m/s. Раскрытие трещины в момент разрушения равно 1.5 mm.

#### Опыт 4

База l = 29.5 ст. Время пробега волны не определяется. Массовая скорость v = 18.9 m/s. Раскрытие трещины в момент разрушения равно 1 mm.

Значения измеренных параметров волны разгрузки оказались близкими к значениям аналогичных параметров для полосок, нарезанных в другом направлении: анизотропия заметно не повлияла на эти результаты.

#### Заключение

 Предложен и реализован комбинированный метод определения параметров волн конечной амплитуды в полимерных пленках. Он заключается в одновременной регистрации электрического поля, генерируемого волной, и высокоскоростной видеосъемки движения свободного края полоски. Измерены значения волновой и массовой скорости в узких полосках пленок разной реологии и по этим данным определены другие параметры волны, а также мгновенный модуль Юнга при быстрой разгрузке. Знание этих параметров необходимо для калибровки вязкоупругопластических моделей динамического поведения материала пленок. Распространение метода регистрации ЭС для изучения волновых процессов в телах микронных размеров явилось основной целью работы.

 Из сравнительного анализа фаз осциллограмм следует важный качественный вывод: электрический сигнал, регистрируемый в процессе движения поперечной трещины в телах микронных размеров, много слабее сигнала от волнового процесса, генерируемого разрывом образца.

3. Предложенный метод может успешно применяться для регистрации волновых процессов в элементах конструкций микронных размеров при использовании сравнительно простых антенных устройств и существующей недорогой регистрирующей аппаратуры.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы президиума РАН № 11.

### Список литературы

- Минеев В.М., Иванов А.Г. // УФН. 1976. Т. 119. Вып. 1. С. 75–109.
- [2] Frid V, Rabinovich A., Bahat D. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2003. Vol. 36. N 13. P. 1620–1628.
- [3] Девяткин Е.А., Симонов И.В., Сиротин А.А. // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 4. С. 172–182.
- [4] Бивин Ю.К., Викторов В.В., Кулинич Ю.В., Чурсин А.С. // Изв. РАН. МТТ. 1982. № 1. С. 183–186.
- [5] Лущейкин Г.А. Полимерные электреты. М.: Химия, 1984. 183 с.
- [6] Симонов И.В., Смирнов И.М. // Докл. РАН. 2008. Т. 422. № 2. С. 185–188.
- [7] Симонов И.В., Сиротин А.А., Смирнов И.М., Тянин А.В. // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33. Вып. 14. С. 19–24.
- [8] Симонов И.В., Тянин А.В. // ПМТФ. 2009. Т. 50. № 4. С. 219–223.
- [9] Симонов И.В. // Докл. РАН. 2009. Т. 428. № 3. С. 330-334.
- [10] Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.