01;03

О расчете осцилляций слоя вязкой жидкости на поверхности твердого сферического ядра в рамках теории пограничного слоя

© А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, А.Р. Паранин

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Россия, Ярославль
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 16 июня 2010 г.)

Предлагается модификация теории пограничного слоя вблизи совершающей периодические движения свободной поверхности сферического слоя вязкой жидкости на твердом ядре. Для адекватного описания течения вязкой жидкости в обсуждаемой системе вводятся два пограничных слоя: один у свободной поверхности жидкости и другой — у твердого дна. Получены оценки толщины пограничных слоев, при которых в асимптотике малой вязкости различие между точным решением модельной задачи может быть задано с заранее определенной точностью. Показано, что учет пограничного слоя вблизи твердого дна актуален только для низких мод осцилляций. Для высоких мод движение жидкости возле твердого ядра можно считать потенциальным. В тонких слоях жидкости (для низких мод) приповерхностный и придонный пограничные слои перекрываются, а вихревое движение заполняет весь объем слоя жидкости.

Введение

Исследование закономерностей осцилляций конечной амплитуды слоя воды на поверхности тающей градины в условиях грозового облака представляет интерес в связи с изучением физического механизма инициирования разряда молнии и процессов разделения зарядов в грозовых облаках [1–5]. Эта проблема важна и для изучения закономерностей функционирования масс-спектрометров для анализа труднолетучих жидкостей и жидкостей органического происхождения, функционирующих при низких температурах, когда исследуемая жидкость замерзает, и эмиссия заряженных микрокапелек и кластеров идет с поверхности тонкого слоя жидкости на поверхности ледяного ядра [6–9].

Задача расчета линейных осцилляций слоя вязкой жидкости на твердом ядре сама по себе достаточно проста и неоднократно решалась [10,11], но расчет нелинейных осцилляций слоя вязкой жидкости уже существенно более сложен и выполнен пока лишь для модели идеальной жидкости [5,12]. Возможность применения к нелинейным расчетам теории пограничного слоя, которая в недавних работах [13,14] была корректно обобщена на учет вихреобразования под свободной поверхностью вязкой жидкости, совершающей периодические движения, оставляет надежду на получение умеренно громоздких аналитических результатов, применимых с контролируемой точностью. В этой связи и проведено настоящее исследование возможности применения к расчетам осцилляций слоя жидкости на поверхности твердого сферического ядра теории пограничного слоя с учетом наличия двух пограничных слоев: у поверхности твердого ядра и у свободной поверхности жидкости, по аналогии с тем, как это делалось в [13–15].

1. Формулировка задачи о расчете осцилляций слоя вязкой жидкости на поверхности твердого сферического ядра и ее точное решение

Пусть внутри сферической капли вязкой идеально проводящей несжимаемой жидкости радиуса R находится твердое сферическое ядро радиуса R_0. Примем, что жидкость характеризуется коэффициентом кинематической вязкости ν, плотностью ρ, коэффициентом поверхностного натяжения свободной поверхности σ, а вся система находится в однородном внешнем электростатическом поле напряженностью $\mathbf{E}_0$.

Будем считать, что жидкий слой совершает капиллярные осцилляции вследствие задания в начальный момент времени виртуальной осесимметричной деформации равновесной сферической формы так, что форма свободной поверхности в произвольный момент времени определяется соотношением

$$F(r,\vartheta,t) = r - R - \xi(\vartheta,t) = 0; \quad |\xi| < R - R_0 \ll R_0,$$

где $\xi = \xi(\vartheta,t)$ — малое отклонение свободной поверхности жидкости от равновесной сферической формы $r = R$. Зададимся целью исследовать аналитическим путем в линейном по амплитуде начальной деформации приближении временну́ю эволюцию формы капли. Все рассмотрение проведем в сферической системе координат с началом в центре масс системы, полярный угол которой будем отсчитывать от направления $\mathbf{E}_0$. В нижеследующих расчетах будем использовать безразмерные переменные, в которых $R = \rho = \sigma = 1$.

Система уравнений электрогидродинамики вязкой жидкости, описывающая движение жидкости в анализируемой системе, имеет следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{U}(\mathbf{r},t)}{dt} = -\nabla P(\mathbf{r},t) + \nu\Delta\mathbf{U}(\mathbf{r},t); \quad \nabla\cdot\mathbf{U}(\mathbf{r},t) = 0;$$

$$\Delta\Phi(\mathbf{r},t) = 0;$$

$$r = 1+\xi: \qquad \Phi = \text{const}; \quad \frac{dF}{dt} = 0;$$

$$\mathbf{n}(\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla)\cdot\mathbf{U} + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}\cdot\nabla)\cdot\mathbf{U} = 0;$$

$$-P(\mathbf{r},t) + 2\nu\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\nabla)\cdot\mathbf{U} - P_E(\mathbf{r},t) + P_\sigma(\mathbf{r},t) = 0;$$

$$r = R_0: \qquad \mathbf{U} = 0; \quad r\to\infty: \quad -\nabla\Phi \to \mathbf{E}_0;$$

$$t = 0: \quad \xi(\vartheta) \equiv \sum_{l\in\Xi} Z_l P_l(\eta); \quad \eta\equiv\cos\vartheta; \quad \mathbf{U} = 0. \tag{1}$$

В выписанных выражениях $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$ — единичные векторы касательной и нормали к свободной поверхности жидкости; $\mathbf{U}(\mathbf{r},t) = U_r(\mathbf{r},t)\mathbf{e}_r + U_\vartheta(\mathbf{r},t)\mathbf{e}_\vartheta$ — поле скоростей течения жидкости в капле, связанного с осцилляциями ее свободной поверхности; $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{e}_\vartheta$ — орты сферической системы координат; $P(\mathbf{r},t)$ — гидродинамическое давление в капле; $\Phi(\mathbf{r},t)$ — потенциал электростатического поля, в нижеследующих расчетах первого порядка малости будем полагать, что $\Phi(\mathbf{r},t) \equiv E_0 z + \phi(\mathbf{r},t)$, где $\phi(\mathbf{r},t)$ — поправка первого порядка малости; Z_l — амплитуда начальной деформации l-й моды; $P_l(\eta)$ — полином Лежандра порядка l; Ξ — множество номеров мод, суперпозиция которых определяет начальную деформацию капли; $P_\sigma \equiv 2-(2+\Delta_\Omega)\xi$, Δ_Ω — угловая часть оператора Лапласа в сферической системе координат; P_E — давление электрического поля на свободную поверхность слоя жидкости (см. „Приложение“). Поскольку движения жидкости порождаются начальной деформацией, то амплитуда поля скоростей течения жидкости $\mathbf{U}(\mathbf{r},t)$ в безразмерных переменных имеет тот же порядок малости, что и деформация свободной поверхности $\xi(\vartheta,t)$.

Сформулированная задача дополняется естественными условиями сохранения объема жидкого слоя, неподвижности его центра масс при осцилляциях и равенства нулю полного заряда системы.

Поле скоростей течения жидкости на основе теоремы Гельмгольца удобно представить в виде суперпозиции потенциальной $U_r^{(p)}$, $U_\vartheta^{(p)}$ и вихревой $U_r^{(e)}$, $U_\vartheta^{(e)}$ компонент:

$$\begin{pmatrix} U_r(\mathbf{r},t) \\ U_\vartheta(\mathbf{r},t) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} U_r^{(p)}(\mathbf{r},t) \\ U_\vartheta^{(p)}(\mathbf{r},t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_r^{(e)}(\mathbf{r},t) \\ U_\vartheta^{(e)}(\mathbf{r},t) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

2. Линеаризация и скаляризация задачи

Для упрощения нижеследующего рассмотрения проведем линеаризацию и скаляризацию задачи, раскладывая ее по степеням малых величин, ограничиваясь линейными слагаемыми и выражая векторное поле скоростей $U(\mathbf{r},t)$ через два скалярных поля $\varphi(\mathbf{r},t)$ и $\psi(\mathbf{r},t)$ по правилу [15,16]:

$$U(\mathbf{r},t) = \widehat{\mathbf{N}}_1\varphi(\mathbf{r},t) + \widehat{\mathbf{N}}_3\psi(\mathbf{r},t),$$

$$\widehat{\mathbf{N}}_1 \equiv \nabla, \quad \widehat{\mathbf{N}}_3 \equiv \nabla\times(\nabla\times\mathbf{r}), \tag{3}$$

где $\widehat{\mathbf{N}}_1$ и $\widehat{\mathbf{N}}_3$ — векторные дифференциальные операторы, удовлетворяющие соотношениям ортогональности и условиям коммутативности с оператором Лапласа. Оператор $\widehat{\mathbf{N}}_1$ выделяет потенциальную часть движения, а $\widehat{\mathbf{N}}_3$ — полоидальную вихревую. Тороидальная часть вихревого движения, выделяющаяся оператором $\widehat{\mathbf{N}}_2 \equiv \nabla\times\mathbf{r}$, не оказывает влияния на осцилляции поверхности жидкого слоя, как показано в [15], и из рассмотрения опущена.

Подставив (3) в уравнения (1), получим линеаризованную скалярную задачу:

$$\Delta\varphi(\mathbf{r},t) = 0; \quad \Delta\phi(\mathbf{r},t) = 0; \quad \Delta\psi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{\nu}\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = 0; \tag{4}$$

$$p^{\text{in}}(\mathbf{U},t) = -\frac{\partial\varphi(\mathbf{r},t)}{\partial t};$$

$$r = R_0: \quad \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\Delta_\Omega\psi = 0; \quad \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right) = 0;$$

$$r = 1: \quad \frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\Delta\psi;$$

$$2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\varphi}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\psi - (2+\Delta_\Omega)\psi = 0;$$

$$-p^{\text{in}}(\mathbf{U},t) + 2\nu\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} - \Delta_\Omega\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\psi}{r}\right)\right)$$

$$-p_E(\xi) + p_\sigma(\xi) = 0;$$

$$r\to\infty: \qquad -\nabla\phi \to 0; \tag{5}$$

$$t = 0: \qquad \xi(\vartheta) \equiv \sum_{l\in\Xi} Z_l P_l(\eta); \quad \eta\equiv\cos\vartheta; \quad \mathbf{U} = 0.$$

При этом проекции поля скоростей $U(\mathbf{r},t)$ на орты сферической системы координат выражаются через функции $\varphi(\mathbf{r},t)$ и $\psi(\mathbf{r},t)$ следующим образом:

$$U_r \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\Delta_\Omega\psi, \quad U_\vartheta \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right). \tag{6}$$

В (5) $p_E(\xi)$, $p_\sigma(\xi)$, p^{in} — компоненты первого порядка малости полного электрического, капиллярного и гидродинамического давления.

3. Поиск точного решения

Полагая

$$\xi(\vartheta,t) \equiv \sum_n \alpha_n P_n(\eta)\exp(st); \quad \eta\equiv\cos\vartheta, \tag{7}$$

решение системы уравнений (4) для скалярных полей $\varphi(\mathbf{r}, t)$ и $\psi(\mathbf{r}, t)$ будем искать в виде

$$\varphi(\mathbf{r}, t) \equiv \sum_n \left[C_n^{(1)} r^n + D_n^{(1)} r^{-(n+1)}\right] P_n(\eta) \exp(st);$$

$$\psi(\mathbf{r}, t) \equiv \sum_n \left[C_n^{(3)} i_n(xr) + D_n^{(3)} k_n(xr)\right] P_n(\eta) \exp(st);$$

$$x \equiv \sqrt{s/\nu}; \tag{8}$$

α_n, $C_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$, $C_n^{(3)}$, $D_n^{(3)}$ — константы; $i_n(xr)$ и $k_n(xr)$ — модифицированные сферические функции Бесселя 1-го и 3-го рода [17].

Подставив решения (7), (8) в систему скаляризованных граничных условий (5), получим систему однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов α_n, $C_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$, $C_n^{(3)}$, $D_n^{(3)}$. Условием совместности этих уравнений является равенство нулю определителя системы, составленного из множителей при неизвестных коэффициентах:

$$\det A_{ij} = 0, \tag{9}$$

$$A_{11} \equiv n, \quad A_{12} \equiv -(n+1), \quad A_{13} \equiv n(n+1) i_n(x),$$

$$A_{14} \equiv n(n+1) k_n(x), \quad A_{15} \equiv -s,$$

$$A_{21} \equiv 2(n-1), \quad A_{22} \equiv -2(n+2);$$

$$A_{23} \equiv -2x i_{n+1}(x) + \left[x^2 + 2(n+1)(n-1)\right] i_n(x),$$

$$A_{24} \equiv 2x k_{n+1}(x) + \left[x^2 + 2(n+1)(n-1)\right] k_n(x), \quad A_{25} \equiv 0,$$

$$A_{31} \equiv s + 2\nu n(n-1), \quad A_{32} \equiv s + 2\nu(n+1)(n+2),$$

$$A_{33} \equiv 2\nu n(n+1)\left[x i_{n+1}(x) + (n-1) i_n(x)\right],$$

$$A_{34} \equiv 2\nu n(n+1)\left[-x k_{n+1}(x) + (n-1) k_n(x)\right],$$

$$A_{35} \equiv (n-1)(n+2)\chi, \quad A_{41} \equiv n R_0^{(n-1)},$$

$$A_{42} \equiv -(n+1) R_0^{-(n+2)}, \quad A_{43} \equiv \frac{n(n+1)}{R_0} i_n(xR_0),$$

$$A_{44} \equiv \frac{n(n+1)}{R_0} k_n(xR_0), \quad A_{45} \equiv 0, \quad A_{51} \equiv R_0^{(n-1)},$$

$$A_{52} \equiv R_0^{-(n+2)}, \quad A_{53} \equiv x i_{n+1}(xR_0) + \frac{(n+1)}{R_0} i_n(xR_0),$$

$$A_{54} \equiv -x k_{n+1}(xR_0) + \frac{(n+1)}{R_0} k_n(xR_0), \quad A_{55} = 0;$$

$$\chi \equiv 1 - \frac{E_0^2 \tau(n)}{4\pi(n-1)(n+2)},$$

$$\tau(n) \equiv \frac{3n(12n^3 + 10n^2 - 12n - 1)}{(4n^2 - 1)(2n + 3)}.$$

Выражая из граничных условий коэффициенты α_n, $C_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$, $C_n^{(3)}$, $D_n^{(3)}$ через амплитуды начальной деформации Z_n и удовлетворяя начальным условиям, можно найти окончательные выражения для искомых функций. В частности, для одномодовой начальной деформации получим $\alpha_n = Z_n$. Аналитические выражения для коэффициентов $C_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$, $C_n^{(3)}$, $D_n^{(3)}$ весьма громоздки и их явный вид приведен в приложении лишь в асимптотике малой вязкости: $\nu \to 0$. Это целесообразно сделать, поскольку теория пограничного слоя разработана для маловязких жидкостей, и следовательно, в контексте проводимого анализа функции $\varphi(\mathbf{r}, t)$ и $\psi(\mathbf{r}, t)$, а дисперсионное уравнение задачи нижеследующих построений достаточно выписать в пределе малой вязкости, когда они принимают более компактный вид (см. ниже формулы (П.1)–(П.2)).

По найденным функциям $\varphi(\mathbf{r}, t)$ и $\psi(\mathbf{r}, t)$, определенным соотношениями (8), с коэффициентами, приведенными в приложении соотношениями (П.1), поле скоростей течения жидкости, согласно (6), в капле легко находится простым дифференцированием. Из рис. 1, на

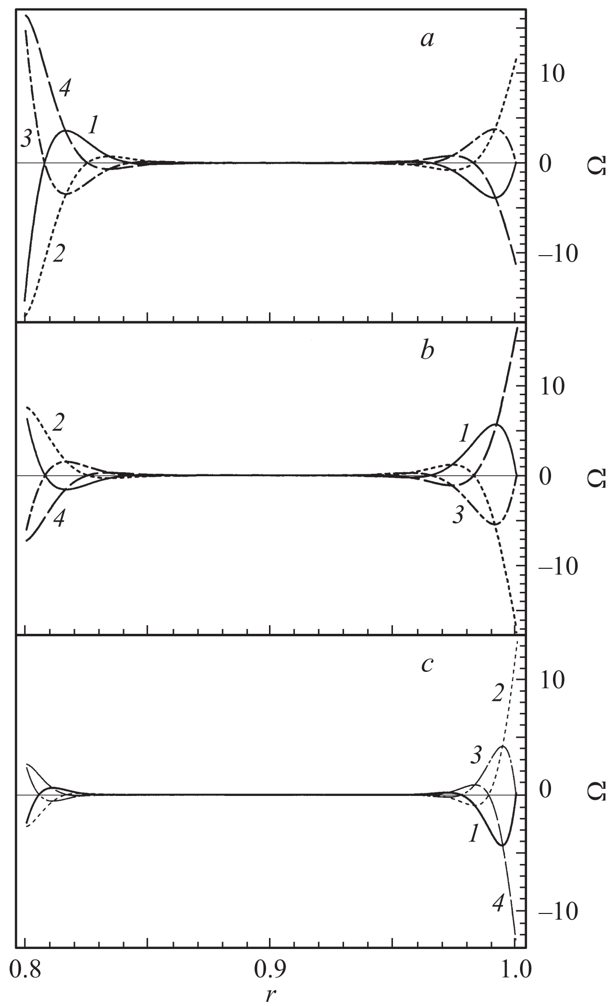

Рис. 1. Радиальная зависимость амплитуды ротора поля скоростей течения жидкости при задании в начальный момент времени деформации: a — 10-й моды; b — 14-й моды; c — 18-й моды. Кривая соответствует моменту времени $t = 0$; *2* — $t = 1/4T$; *3* — $t = 1/2T$; *4* — $t = 3/4T$. Расчеты проведены при $R_0 = 0.8$, $\nu = 0.002$, $\vartheta = \pi/3$, $Z_n = 0.1$.

котором приведены зависимости от радиальной переменной амплитуды ротора поля скоростей:

$$\Omega \equiv \operatorname{rot} \mathbf{U} \equiv \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\,\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\frac{1}{r\sin\vartheta}\,\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}\right)\right)\right)\mathbf{n}_\varphi,$$

видно, что вихревое движение сконцентрировано в малой окрестности свободной поверхности жидкости, по которой бежит волна, и в малой окрестности твердого ядра, на котором обе компоненты поля скоростей обращаются в нуль. Указанное обстоятельство означает, что попытки использования для расчета характеристик волнового движения в вязкой жидкости пограничного слоя должны учитывать наличие двух пограничных слоев — приповерхностного и „придонного“, что должно быть учтено при формулировке модельной задачи.

Из рис. 1 также видно, что толщина приповерхностного и придонного пограничных слоев уменьшается с увеличением номера моды, что в плоском случае соответствует уменьшению длины волны. В частности, согласно рисункам, интенсивность вихревого движения в придонном слое быстро убывает с увеличением номера моды, иными словами, с уменьшением длины волны, бегущей по поверхности жидкости, ее взаимодействие с дном ослабевает. Для еще более высоких мод (для более коротких длин волн) вихревое движение у поверхности твердого ядра совсем прекратится, и движение жидкости у твердого дна можно будет считать потенциальным. Все сказанное согласуется с данными [14], где особенности вихревого движения, порождаемого волной, рассмотрены для плоской поверхности слоя жидкости конечной толщины на твердом дне.

4. Формулировка и решение модельной задачи

Сформулируем модельную задачу, которой будем аппроксимировать точное решение (7), (8) и которая получается из точной задачи на основании представлений о погранслойном строении поля скоростей течения жидкости в слое вязкой жидкости конечной толщины. Для достижения этой цели будем исходить из предположения, что вихревая часть модельного течения сосредоточена в приповерхностном пограничном слое толщиной δ_1 и в „придонном“ пограничном слое толщиной δ_2 (см. рис. 1), а на границах пограничных слоев обращается в нуль. Потенциальная составляющая поля скоростей течения жидкости охватывает весь ее объем. В соответствии с этим потенциальное течение во всем объеме слоя жидкости и вихревые течения в приповерхностном и придонном слоях будем рассчитывать отдельно, а граничным условиям на свободной поверхности и на дне будут удовлетворять соответствующие комбинации потенциальной и вихревой компонент поля скоростей.

4а. Приповерхностный слой: $1-\delta_1 \le r \le 1$

Будем полагать, что в указанной области поле скорости течения жидкости $U^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ состоит из вихревой и потенциальной составляющих. Толщину слоя δ_1 будем оценивать по аналогии с тем, как это делалось в [18], с точностью до постоянного множителя G в виде

$$\delta_1 = G\delta_L; \quad \delta_L \equiv \sqrt{2\nu/\omega},$$

где ω — вещественная часть частоты s. Константу G будем определять из требования заданной точности аппроксимации точного решения модельным [13–15]. Скалярное уравнение для нахождения функции $\psi^{(1)}$, описывающей вихревое движение в приповерхностном слое, запишется в виде

$$1-\delta_1 \le r \le 1: \quad \Delta\psi^{(1)}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{\nu}\,\frac{\partial \psi^{(1)}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0.$$

Систему граничных условий точной задачи (5) следует дополнить условием обращения ротора поля скоростей на нижней границе приповерхностного пограничного слоя в нуль, которое с учетом выражения для $\psi^{(1)}$ можно привести к виду

$$r = 1-\delta_1: \quad \frac{\partial}{\partial \vartheta}\,\psi^{(1)} = 0.$$

4б. Придонный пограничный слой: $R_0 \le r \le R_0 + \delta_2$

В придонной области идеология введения пограничного слоя несколько отлична. Пограничный слой, связанный с периодической волной, бегущей по свободной поверхности вязкой жидкости, порождается периодическим движением поверхности жидкости и обусловлен скоростью затухания вихревой части движения с глубиной. По предположению, вихревое движение жидкости, порождаемое волной, затухает на глубине $r = 1-\delta_1$. Причина возникновения вихревого движения возле твердого дна, когда над ним имеется порождаемое осцилляциями свободной поверхности течение вязкой жидкости с изменяющейся во времени амплитудой, заключается в явлении прилипания жидкости ко дну (обращение на дне в нуль полной скорости течения), вследствие которого и генерируется вихревое течение с интенсивностью, экспоненциально убывающей по мере удаления от дна. Описанная ситуация аналогична обтеканию постоянным потоком жидкости твердого тела конечных размеров. Поэтому толщину пограничного слоя в окрестности дна δ_2 будем оценивать по обычной формуле теории пограничного слоя [19], но введем неопределенный численный множитель H, значение которого установим, добиваясь заданной точности аппроксимации точного решения модельным [14]:

$$\delta_2 = H(l/\sqrt{\mathrm{Re}}) = H(l/\sqrt{Vl/\nu}) = H(\sqrt{\nu l/V}).$$

Здесь в качестве характерного линейного размера l примем длину волны λ, а в качестве скорости потока V — фазовую скорость волны: $\omega/k = \omega\lambda/2\pi$. Окончательно для оценки толщины пограничного слоя возле твердой поверхности ядра получим

$$\delta_2 = H\sqrt{2\pi\nu/\omega}.$$

Для нахождения функции $\psi^{(2)}$ запишем скалярное уравнение

$$R_0 \le r \le R_0 + \delta_2: \qquad \Delta\psi^{(2)}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{\nu}\frac{\partial\psi^{(2)}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0$$

с условием на границе „придонного“ слоя, где ротор поля скоростей обращается в нуль

$$r = R_0 + \delta_2: \qquad \frac{\partial}{\partial\vartheta}\psi^{(2)} = 0$$

и граничными условиями на дне

$$r = R_0: \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\Delta_\Omega\psi^{(2)} = 0;$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial\vartheta}\right) = 0,$$

соответствующими обращению в нуль проекций поля скоростей на орты сферической системы координат $U_r(\mathbf{r}, t)$ и $U_\vartheta(\mathbf{r}, t)$.

Таким образом, полная математическая формулировка модельной задачи будет иметь вид

$$R_0 \le r \le 1: \qquad \Delta\varphi(\mathbf{r}, t) = 0; \quad \Delta\phi = 0;$$

$$P(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial\varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t};$$

$$1 - \delta_1 \le r \le 1: \qquad \Delta\psi^{(1)}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{\nu}\frac{\partial\psi^{(1)}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0;$$

$$r = 1: \qquad \frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\Delta_\Omega\psi^{(1)};$$

$$2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\varphi}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\psi^{(1)} - (2 + \Delta_\Omega)\psi^{(1)} = 0;$$

$$-p^{\mathrm{in}}(\mathbf{r}, t) + 2\nu\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} - \Delta_\Omega\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\psi^{(1)}}{r}\right)\right)$$

$$- p_E(\xi) + p_\sigma(\xi) = 0;$$

$$r = 1 - \delta_1: \qquad \frac{\partial}{\partial\vartheta}\psi^{(1)} = 0;$$

$$R_0 \le r \le R_0 + \delta_2: \qquad \Delta\psi^{(2)}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{\nu}\frac{\partial\psi^{(2)}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0;$$

$$r = R_0 + \delta_2: \qquad \frac{\partial}{\partial\vartheta}\psi^{(2)} = 0;$$

$$r = R_0: \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\Delta_\Omega\psi^{(2)} = 0;$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial\vartheta}\right) = 0;$$

$$t = 0: \qquad \xi(\vartheta) \equiv \sum_{l\in\Xi} Z_l P_l(\eta); \quad \eta \equiv \cos\vartheta; \quad \mathbf{U} = 0.$$

Решение этой задачи запишется в виде

$$\varphi(\mathbf{r}, t) \equiv \sum_n \left[C_n^{(1)} r^n + D_n^{(1)} r^{-(n+1)}\right] P_n(\eta)\exp(st),$$

$$\psi^{(1)}(\mathbf{r}, t) \equiv \sum_n \left[C_n^{(2)} i_n(xr) + D_n^{(2)} k_n(xr)\right] P_n(\eta)\exp(st),$$

$$\psi^{(2)}(\mathbf{r}, t) \equiv \sum_n \left[C_n^{(4)} i_n(xr) + D_n^{(4)} k_n(xr)\right] P_n(\eta)\exp(st), \tag{10}$$

где неизвестные коэффициенты $C_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$, $C_n^{(2)}$, $D_n^{(2)}$, $C_n^{(4)}$, $D_n^{(4)}$ определены в приложении соотношениями (П.3), а значения частоты удовлетворяют дисперсионному уравнению:

$$\det B_{ij} = 0. \tag{11}$$

Соответствие между элементами B_{ij} определителя модельной задачи (11) и элементами A_{ij} определителя точной задачи (9) следующее: для $1 \le i \le 3$, $1 \le j \le 5$, $B_{ij} \equiv A_{ij}$, для $i = 5, 6$, $j = 1, 2$, $B_{ij} \equiv A_{i-1,j}$, для $i = 5, 6$, $j = 6, 7$, $B_{ij} = A_{i,j-3}$. Коэффициенты B_{43}, B_{44}, B_{75}, B_{76}, получающиеся из условий обращения ротора поля скоростей в нуль на нижней и верхней границах приповерхностного и придонного пограничных слоев, соответственно равны:

$$B_{43} = i_n(\mu_1), \; B_{44} = k_n(\mu_1), \; B_{75} = i_n(\mu_2), \; B_{76} = k_n(\mu_2),$$

$$\mu_1 \equiv \sqrt{\frac{s}{\nu}}(1 - \delta_1), \quad \mu_2 \equiv \sqrt{\frac{s}{\nu}}(R_0 + \delta_2).$$

В асимптотике малой вязкости дисперсионное уравнение (11) совпадает с дисперсионным уравнением точной задачи в той же асимптотике (П.2).

5. Упрощение модельной задачи в рамках теории пограничного слоя и ее решение

Математическая формулировка модельной задачи в пределе малой вязкости может быть упрощена с помощью построений, аналогичных тем, что используются в традиционной теории пограничного слоя, связанных с наличием свободной поверхности и дна [13–15]. Нижеследующее упрощение основано на оценочных рассуждениях, которые возможно провести и в отсутствие точного решения.

Выделим наиболее существенные свойства точного решения задачи вблизи свободной поверхности и вблизи поверхности твердого ядра. Течение состоит из главной (потенциальной) и двух добавочных погранслойных (вихревых) частей $\mathbf{U}(\mathbf{r},t)=U^{(p)}(\mathbf{r},t)+U^{(e)}(\mathbf{r},t)$. Для основной части движения характерный линейный масштаб l, на котором изменяются компоненты скорости, определяется вдоль поверхности градины (по углу ϑ) радиусом градины: $l\sim\pi R$, а перпендикулярно поверхности (по радиальной переменной r) толщиной слоя жидкости: $l\sim R-R_0$. Для вихревой части течения характерный линейный масштаб, на котором изменяются компоненты скорости в направлении, перпендикулярном пограничным слоям, равен толщине каждого из слоев $l\sim\delta_j$, а по углу ϑ определяется радиусом градины: $l\sim\pi R$. В проведенных рассуждениях для наглядности использовались размерные величины, в принятом выше обезразмеривании нужно принять $R=1$.

На основании вышеизложенного введем правила оценки производных от искомых величин по пространственным координатам. Для производных от потенциальной части течения $U^{(p)}(\mathbf{r},t)$ будем пользоваться следующим формальным правилом построения оценки: оператор дифференцирования ∂_r переходит в оператор умножения $1/(R-R_0)$, а оператор $\frac{1}{r}\partial_\vartheta$ — в оператор умножения на $1/\pi R$. Для вихревых частей $U^{(e)}(\mathbf{r},t)$, определенных в пограничных слоях, правило оценки производных другое — операторы дифференцирования ∂_r переходят в операторы умножения на $1/\delta_1$ и $1/\delta_2$ для $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ соответственно, а оператор $(1/r)\partial_\vartheta$ — в оператор умножения на $1/\pi R$.

Воспользуемся малостью значений толщины приповерхностного и придонного пограничных слоев δ_1, δ_2 по сравнению с радиусом градины и по сравнению с толщиной слоя жидкости, и в суммах вида $A+B$ будем пренебрегать слагаемым B, если

$$B/A\sim O\big(\delta_i^2/(R-R_0)^2\big),$$

$$B/A\sim O\big(\delta_i^2/(\pi R)^2\big),\quad i=1,2.$$

Пусть V — характерное значение скорости потенциального течения на свободной поверхности жидкости $r=1$. Тогда имеем следующие оценки:

$$U_r^{(p)}(\mathbf{r},t)\sim U_\vartheta^{(p)}(\mathbf{r},t)\sim V,\quad U_r^{(e)}\sim\frac{\delta^2}{\pi R(R-R_0)}V,$$

$$U_\vartheta^{(e)}\sim\frac{\delta}{(R-R_0)}V.$$

В принятых безразмерных переменных последние две оценки будут иметь вид:

$$U_r^{(e)}\sim\frac{\delta^2}{\pi(1-R_0)}V,\quad U_\vartheta^{(e)}\sim\frac{\delta}{(1-R_0)}V.$$

Учитывая все приведенные выше рассуждения, модифицируем математическую формулировку модельной задачи к упрощенному виду

$$R_0\le r\le 1:\qquad \Delta\varphi(\mathbf{r},t)=0;$$

$$\Delta\phi=0;\quad P(\mathbf{r},t)=-\frac{\partial\varphi(\mathbf{r},t)}{\partial t};$$

$$1-\delta_1\le r\le 1:\qquad \Delta\psi^{(1)}(\mathbf{r},t)-\frac{1}{\nu}\frac{\partial\psi^{(1)}(\mathbf{r},t)}{\partial t}=0;$$

$$r=1:\qquad \frac{\partial\xi}{\partial t}=\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{1}{r}\Delta_\Omega\psi^{(1)};$$

$$2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\varphi}{r}\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-2\right)\psi^{(1)}=0;$$

$$-p^{\text{in}}(\mathbf{r},t)+2\nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}-p_E(\xi)+p_\sigma(\xi)=0;$$

$$r=1-\delta_1:\qquad \frac{\partial}{\partial\vartheta}\psi^{(1)}=0;$$

$$R_0\le r\le R_0+\delta_2:\qquad \Delta\psi^{(2)}(\mathbf{r},t)-\frac{1}{\nu}\frac{\partial\psi^{(2)}(\mathbf{r},t)}{\partial t}=0;$$

$$r=R_0+\delta_2:\qquad \frac{\partial}{\partial\vartheta}\psi^{(2)}=0;$$

$$r=R_0:\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{1}{r}\Delta_\Omega\psi^{(2)}=0;$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial\vartheta}\right)=0;$$

$$t=0:\qquad \xi(\vartheta)\equiv\sum_{l\in\Xi}Z_lP_l(\eta);\quad \eta\equiv\cos\vartheta;\quad \mathbf{U}=0.$$

Решение этой задачи будет иметь вид (10), но с другими коэффициентами $C_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$, $C_n^{(2)}$, $D_n^{(2)}$, $C_n^{(4)}$, $D_n^{(4)}$, определенными в приложении соотношениями (П.4), и значениями частоты, удовлетворяющими дисперсионному уравнению:

$$\det C_{ij}=0\tag{12}$$

Коэффициенты C_{ij} определителя упрощенной модельной задачи (12) полностью совпадают с коэффициентами B_{ij} определителя модельной задачи (11), за исключением следующих:

$$C_{23}\equiv-2xi_{n+1}(x)+\big(x^2+n(n+1)-2\big)i_n(x);$$

$$C_{24}\equiv 2xk_{n+1}(x)+\big(x^2+n(n+1)-2\big)k_n(x);$$

$$C_{33}\equiv C_{34}\equiv 0.$$

В асимптотике малой вязкости дисперсионное уравнение (12) совпадает с дисперсионным уравнением точной задачи в той же асимптотике (П.2).

6. Оценка погрешности приближенного решения

Пользуясь выражениями (6), запишем решения для радиальной составляющей поля скоростей точной задачи

$$U_r^{(p)} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial r}$$
$$\equiv \sum_n \left[C_n^{(1)} n r^{n-1} - D_n^{(1)}(n+1) r^{-(n+2)}\right] P_n(\eta) \exp(st),$$

$$U_r^{(e)} \equiv -\frac{1}{r} \Delta_\Omega \psi$$
$$\equiv \frac{1}{r} \sum_n \left[C_n^{(3)} i_n(xr) + D_n^{(3)} k_n(xr)\right] n(n+1) P_n(\eta) \exp(st)$$

с коэффициентами, определенными (П.1).

Для радиальной составляющей поля скоростей упрощенной модельной задачи будем иметь

$$R_0 \le r \le 1: \qquad U_r^{(p)} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \sum_n \left[C_n^{(1)} n r^{n-1}\right.$$
$$\left. - D_n^{(1)}(n+1) r^{-(n+2)}\right] P_n(\eta) \exp(st);$$
$$1-\delta_1 \le r \le 1: \quad U_r^{(e)} = \frac{1}{r} \sum_n \left[C_n^{(2)} i_n(xr) + D_n^{(2)} k_n(xr)\right]$$
$$\times n(n+1) P_n(\eta) \exp(st);$$
$$R_0 \le r \le R_0 + \delta_2: \qquad U_r^{(e)} = \frac{1}{r} \sum_n \left[C_n^{(4)} i_n(xr)\right.$$
$$\left. + D_n^{(4)} k_n(xr)\right] n(n+1) P_n(\eta) \exp(st),$$

с коэффициентами, определенными (П.4).

Для угловых компонент скорости получим

$$U_\vartheta^{(p)}(\mathbf{r}, t) \equiv \sum_n \left[C_n^{(1)} r^{n-1} + D_n^{(1)} r^{-(n+2)}\right] \frac{\partial}{\partial \vartheta} P_n(\eta) \exp(st);$$

$$U_\vartheta^{(e)} \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\psi + \frac{\psi}{r}\right)$$
$$\equiv \left(C_n^{(j)}\left[x i_{n+1}(xr) + \frac{(n+1)}{r} i_n(xr)\right]\right.$$
$$\left. + D_n^{(j)}\left[-x k_{n+1}(xr) + \frac{(n+1)}{r} k_n(xr)\right]\right) \frac{\partial}{\partial \vartheta} P_n(\eta) \exp(st).$$

Значение $j = 3$ соответствует точной задаче, а $j = 2, 4$ — модельной упрощенной задаче для случаев $1-\delta_1 \le r \le 1$ и $R_0 \le r \le R_0 + \delta_2$ соответственно. В выражениях, получаемых из точной задачи, коэффициенты определены (П.1), для приближенного решения коэффициенты определены (П.4).

Погрешность замены точного решения модельным, приближенным в рамках представлений о пограничном слое, оценим по формулам:

$$\varepsilon_r = |U_r - U_r^*/U_r|$$

и

$$\varepsilon_\vartheta = |U_\vartheta - U_\vartheta^*/U_\vartheta|,$$

где U_r и U_ϑ — полные (учитывающие и потенциальное, и вихревое слагаемое) проекции точного поля скоростей на орты сферической системы координат, а U_r^* и U_ϑ^* — полные проекции поля скоростей, полученные в рамках теории пограничного слоя.

На рис. 2 и 3 приведены результаты расчетов ε_r и ε_ϑ для приповерхностного и придонного пограничных слоев. Для наглядности графического представления результатов введена новая переменная z:

$$1-\delta_1 \le r \le 1: \quad z = \frac{r-1}{\delta_1} \Rightarrow r = \delta_1 z + 1, \ -1 \le z \le 0;$$

$$R_0 \le r \le R_0 + \delta_2: \quad z = \frac{r-(R_0+\delta_2)}{\delta_2} \Rightarrow r = \delta_2 z$$
$$+ (R_0 + \delta_2), \quad -1 \le z \le 0.$$

Из рис. 2 видно, что в приповерхностном пограничном слое погрешность для угловой компоненты полей скоростей примерно на порядок превосходит погрешность для радиальной компоненты поля скоростей. Согласно

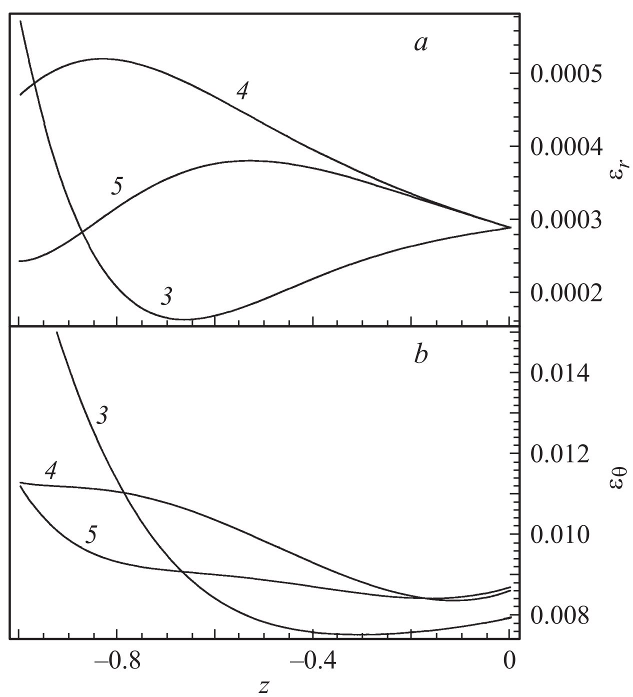

Рис. 2. Относительные погрешности расчета радиальной (a) и угловой (b) проекций поля скоростей в приповерхностном слое, рассчитанные при $R_0 = 0.8$, $\nu = 0.002$, $n = 10$, $\vartheta = \pi/3$, $Z_n = 0.1$, $t = T/4$. Цифрой при соответствующих кривых указано значение численного коэффициента G или H.

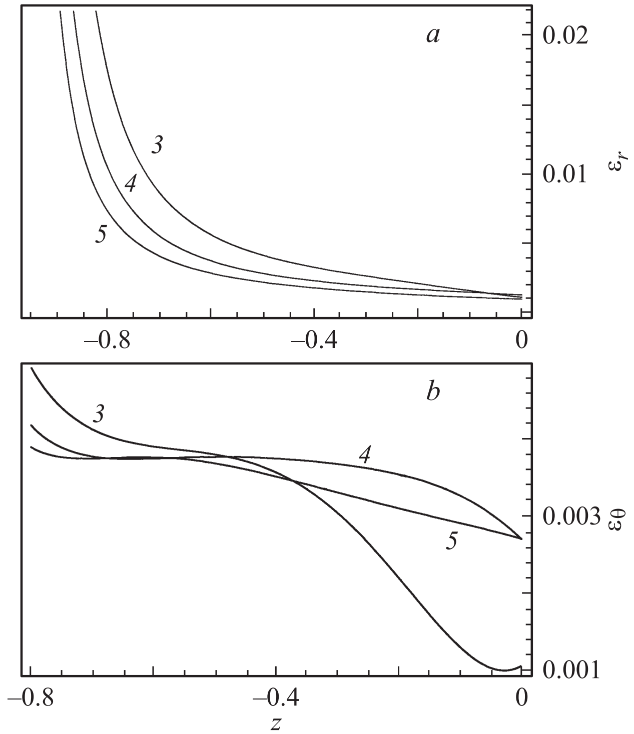

Рис. 3. То же, что на рис. 2, но для придонного слоя.

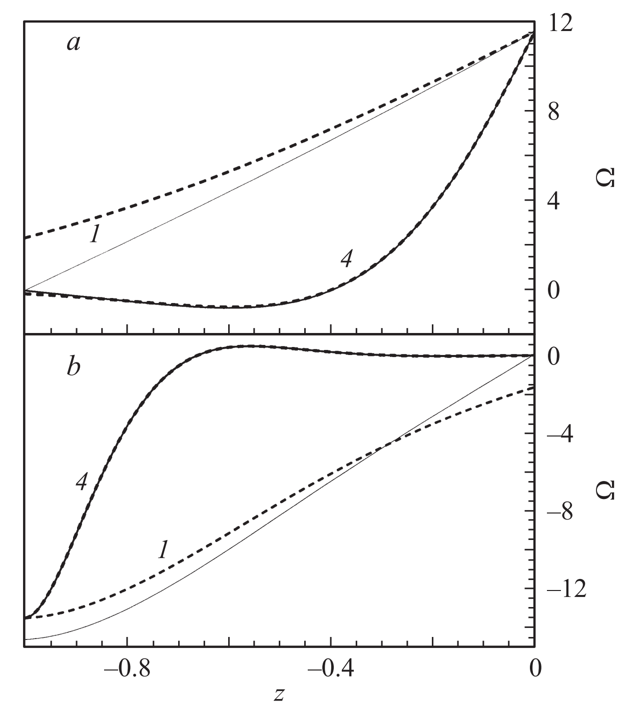

Рис. 4. Амплитуды ротора полей скоростей течения жидкости в приповерхностном (a) и придонном (b) слоях, рассчитанные для различных значений численных коэффициентов G и H (указано цифрой при соответствующих кривых) при $R_0 = 0.8$, $\nu = 0.002$, $n = 10$, $\vartheta = \pi/3$, $Z_n = 0.1$, $t = T/4$. Пунктиром показано точное решение, сплошной — приближенное.

рис. 3, в придонном пограничном слое погрешность для угловой компоненты полей скоростей примерно на порядок меньше погрешности для радиальной компоненты поля скоростей, достигающей на верхней границе величины в несколько процентов. В обоих случаях при $G, H = 4$ оцениваемые значения погрешности не превосходят одного процента практически в пределах всей толщины слоя.

На рис. 4 приведены зависимости модуля ротора поля скоростей для точного и приближенного решений в приповерхностном и придонном пограничных слоях, рассчитанные при $G = H = 1$ и $G = H = 4$. Несложно видеть, что при $G = H = 4$ приближенное решение отлично аппроксимирует точное: в приповерхностном и придонном слоях по всей толщине слоя точное и приближенное решения практически совпадают.

Отдельного рассмотрения заслуживает вопрос о влиянии величины напряженности внешнего электрического поля на толщину приповерхностного и придонного пограничных слоев. Если исходить из формул, определяющих толщину обоих пограничных слоев, то в них в знаменателе стоит вещественная часть частоты, которая зависит от параметра W [3–5], пропорционального квадрату напряженности электрического поля, и уменьшается с увеличением напряженности поля. Следовательно, увеличение напряженности внешнего электрического поля должно приводить к росту толщины пограничного слоя, что и подтверждается численными расчетами. Однако вследствие того что рассматривается реальная ситуация для градины в грозовом облаке, где наблюдаемые напряженности полей много меньше критических для реализации неустойчивости низшей, основной моды $(n = 2)$, а погранслойные расчеты выполняются для высоких мод, то влияние внешнего электрического поля на толщину пограничных слоев будет слабым. С ростом кинематической вязкости те же формулы предсказывают увеличение обоих пограничных слоев. Для достаточно низких мод или при уменьшении частоты, сильно зависящей от номера моды, придонный и приповерхностный пограничные слои перекрываются, и вихревое движение заполняет весь объем слоя жидкости на поверхности твердого ядра, что отмечалось и для плоского случая [14].

Заключение

В аналитических расчетах капиллярных осцилляций слоя маловязкой жидкости на поверхности твердого сферического ядра, проведенных в рамках теории пограничного слоя в первом порядке малости по амплитудам осцилляций, проанализированы зависимости толщины пограничных слоев у свободной поверхности и твердого дна от физических параметров задачи. Выяснилось, что для выполнения расчетов с погрешностью по отношению к точному решению, не превышающей единиц процентов, толщина пограничных слоев должна примерно в четыре–пять раз превышать толщину, на которой интенсивность вихревого движения, порождаемого свободной поверхностью капли и твердым дном, уменьшается в 2.714 раз (в e раз). С увеличением вязкости жидкости толщина пограничного слоя растет. Выяснилось, что в расчетах в рамках теории пограничного слоя осцилляций высоких мод жидкого слоя на поверхности падающей в облаке градины, возбуждающихся за счет столкновения со взвешенными в облаке мелкими капельками, наличие внешнего электрического поля проявляется весьма слабо.

Приложение

1. Согласно [3–5,11,12], выражение для давления электрического поля имеет вид:

$$P_E = \frac{9F_0^2}{8\pi} P_2(\eta) + E_0^2\Bigg(\Big[\frac{9nK_{1,n-2,n-1}K_{1,n-1,n}}{4\pi} - \frac{3K_{2,n-2,n}}{2\pi}\Big]M_{n-2}(t) + \Big[-\frac{3}{2\pi} + \frac{9nK_{1,n-1,n}K_{1,n,n-1}}{4\pi} + \frac{9(n+2)K_{1,n,n+1}K_{1,n+1,n}}{4\pi} - \frac{3K_{2,n,n}}{2\pi}\Big]M_n(t) + \Big[\frac{9(n+2)K_{1,n+1,n}K_{1,2+n,1+n}}{4\pi} - \frac{3K_{2,2+n,n}}{2\pi}\Big]M_{n+2}(t)\Bigg)P_n(\eta);$$

$K_{mkn} = [C_{m0,k0}^{n0}]^2$, $C_{m0,k0}^{n0}$ — коэффициенты Клебша–Гордана [20].

2. Выражения для коэффициентов $C_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$, $C_n^{(3)}$, $D_n^{(3)}$, через которые в пределе малой вязкости выражаются функции $\varphi(\mathbf{r},t)$ и $\psi(\mathbf{r},t)$ точной задачи:

$$C_n^{(1)} \equiv \frac{-Z_n}{n\beta_n}\Bigg\{s + \frac{g_n(1+2n)\sqrt{s\nu}\,R_0^{2n}}{h_n\beta_n} + \nu\Big[-2h_n^2(-1+n^2) + 4q_nh_nn(2+n)R_0^{3+5n} - 2R_0^{1+4n}\Big(4q_n(1+2n) + h_n^2n(2+n)R_0\Big) + 4h_nR_0^{n-1}\Big(-1-2n + q_n(-1+n^2)R_0^2\Big) - 4h_nR_0^{3n}\Big(q_n\big(-1+2n(1+n)\big)R_0^2 - 1 - 2n + R_0^{2n-1}\Big(-g_n^2(1+2n)^2 + 8q_n(1+2n)R_0 + 2h_n^2\big(-1+2n(1+n)\big)R_0^2\Big)\Big]/h_n\beta_n^2\Bigg\};$$

$$h_n \equiv i_n(xR_0)/i_n(x) + k_n(xR_0)/k_n(x),$$

$$g_h \equiv i_n(xR_0)/i_n(x) - k_n(xR_0)/k_n(x);$$

$$q_n \equiv i_n(xR_0)k_n(xR_0)/i_n(x)k_n(x); \quad \beta_n \equiv -1 + R_0^{1+2n};$$

$$D_n^{(1)} \equiv \frac{Z_n}{(1+n)\beta_n}\Bigg\{-sR_0^{1+2n} - \frac{g_n(1+2n)\sqrt{s\nu}\,R_0^{2n}}{h_n\beta_n} + \nu R_0^{-1+n}\Big[2h_n^2n(2+n)R_0^{4+5n} - 4q_nh_n(n^2-1)R_0^2 - 2R_0^{2+3n}\Big(+h_n^2\big(2n(1+n)\big)R_0 - 1\Big) - 4q_n(1+2n) - 4h_nR_0^{2+4n}\big(1+2n+q_nn(2+n)R_0^2\big) + R_0^n\Big(g_n^2(1+2n)^2 - 8q_n(1+2n)R_0 + 2h_n^2(n^2-1)R_0^2\Big) + 4h_nR_0^{1+2n}\Big(1+2n+q_n\big(2n(1+n)\big)R_0^2 - 1\Big)\Big]/h_n^2\beta_n^2\Bigg\};$$

$$C_n^{(3)} \equiv \frac{Z_n}{i_n(x)(1+n)n\beta_n}\Bigg\{\frac{(1+2n)\sqrt{s\nu}\,R_0^{-1+n}}{h_n} - \frac{\nu}{h_n}\Bigg[\frac{g_n(1+2n)^2R_0^{-2+n}}{h_n\beta_n^3} - 2\,\frac{k_n(xR_0)n\beta_n}{k_n(x)}(2+n) - \frac{2k_n(xR_0)(1+2n)(h_n - 2R_0^{n-1})}{k_n(x)h_n}\Bigg]\Bigg\};$$

$$D_n^{(3)} \equiv \frac{Z_n}{k_n(x)n(1+n)\beta_n}\Bigg\{-\frac{(1+2n)\sqrt{s\nu}\,R_0^{-1+n}}{h_n} - \frac{\nu}{h_n}\Bigg[-\frac{2nk_n(xR_0)(2+n)\beta_n}{k_n(x)} - \frac{(1+2n)^2R_0^{n-2}}{\beta_n} - \frac{2k_n(xR_0)(h_n - 2R_0^{n-1})}{k_n(x)h_n}\Bigg]\Bigg\}. \qquad (\Pi.1)$$

Для дисперсионного уравнения в пределе $\nu \to 0 \Rightarrow x \to \infty$ с учетом свойств модифицированных сферических функций при больших аргументах [17]

$$\lim_{x\to\infty}\frac{i_n(xR_0)}{i_n(x)} \to 0, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{k_n(xR_0)}{k_n(x)} \to \infty$$

получим

$$s^3\big(-R_0^{-1-n}(1+n+nR_0^{1+2n})\big) + s^{5/2}\sqrt{\nu}\Big(R_0^{-2-n}\big(1+3n + 2n^2 + 2(1+n)R_0 + 2nR_0^{2+2n}\big)\Big) + s^2\nu\Big(-2(1+3n + 2n^2)R_0^{-2-n}\big(1+(-1+n)R_0 + nR_0^{2+2n}\big)\Big) + \chi\Big[\sqrt{s\nu}\big(n(-2-n+2n^2+n^3)R_0^{-2-n}(1+2n+2R_0 - 2R_0^{2+2n})\big) + s\big(n(-2-n+2n^2+n^3)R_0^{-1-n} \times(-1+R_0^{1+2n})\big) + \nu\big(-2n(-2-5n+5n^3+2n^4) \times R_0^{-2-n}(1+R_0^{2+2n})\big)\Big] = 0.$$

Для высоких мод осцилляций ($10 \le n \le 30$), которые возбуждаются в слое жидкости на поверхности тающей свободно падающей градины при столкновениях со взвешенными в воздухе облачными капельками [3–4,12], это уравнение может быть упрощено. Для этого разделим все уравнение на выражение, стоящее в квадратных скобках при χ, с последующим разложением по степеням отношения ν/s. В итоге получим

$$-s^2\frac{(1+n+nR_0^{1+2n})}{(1+n)\beta_n}-s^{3/2}\sqrt{\nu}\frac{(1+2n)^2R_0^{2n}}{(1+n)\beta_n^2}$$
$$+\frac{s\nu}{(1+n)R_0\beta_n^3}\big[(-1-2n)\big(2(n^2-1)R_0+(1+2n)^2R_0^{2n}$$
$$-2(n^2-1)R_0^{2+2n}-2n(2+n)R_0^{3+4n}+2n(2+n)R_0^{4+6n}\big)\big]$$
$$+\omega^2=0. \tag{П.2}$$

3. Выражения для коэффициентов $C_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$, $C_n^{(2)}$, $D_n^{(2)}$, $C_n^{(4)}$, $D_n^{(4)}$, через которые выражаются функции $\varphi(\mathbf{r},t)$ и $\psi^{(1)}(\mathbf{r},t)$ и $\psi^{(2)}(\mathbf{r},t)$, в модельной задаче в пределе малой вязкости:

$$C_n^{(1)}\equiv\frac{-Z_n}{n\beta_n}\left\{s+\frac{(1+2n)\sqrt{s\nu}\,(-1+\tau_{3,n})R_0^{2n}}{(1+\tau_{3,n})\beta_n}\right.$$
$$+\frac{\nu}{(1+\tau_{3,n})^2}\Big[2(-1+n^2)(1+\tau_{3,n})^2+2n(2+n)$$
$$\times(1+\tau_{3,n})^2R_0^{2+4n}+R_0^{2n-1}\Big((1+2n)^2(\tau_{3,n}-1)^2$$
$$\left.-2\big(2n(1+n)-1\big)(1+\tau_{3,n})^2R_0\Big)\Big]/\beta_n^2\right\},$$
$$\tau_{2,n}\equiv k_n(\mu_2)i_n(xR_0)/k_n(xR_0)i_n(\mu_2),$$
$$\tau_{3,n}\equiv k_n(\mu_3)i_n(xR_0)/k_n(xR_0)i_n(\mu_3),$$
$$D_n^{(1)}\equiv\frac{-Z_n}{(1+n)\beta_n}\left\{sR_0^{1+2n}+\frac{(1+2n)\sqrt{s\nu}(-1+\tau_{3,n})R_0^{2n}}{(1+\tau_{3,n})\beta_n}\right.$$
$$-\nu\Big[R_0^{-1+2n}\Big(-(1+2n)^2-2R_0^2\beta_n$$
$$\times\big(1-n^2+n(2+n)R_0^{1+2n}\big)+\tau_{3,n}^2\big(-(1+2n)^2-2R_0^2\beta_n$$
$$\times(1-n^2+n(2+n)R_0^{1+2n})\big)+2\tau_{3,n}\big((1+2n)^2-2R_0^2\beta_n$$
$$\left.\times(1-n^2+n(2+n)R_0^{1+2n})\big)\Big)\Big]/\beta_n^2(1+\tau_{3,n})^2\right\};$$
$$C_n^{(2)}\equiv-\frac{2\tau_{2,n}(1-n^2+2nR_0^{1+2n}+n^2R_0^{1+2n})}{i_n(x)n(1+n)(-1+\tau_{2,n})\beta_n}\nu Z_n;$$
$$D_n^{(2)}=-C_n^{(2)}\tau_{2,n}/k_n(x);$$
$$C_n^{(4)}\equiv\frac{Z_n(1+2n)\tau_{3,n}R_0^{-1+n}}{n(1+n)i_n(xR_0)(1+\tau_{3,n})\beta_n}$$
$$\times\left(\sqrt{s\nu}+\nu\frac{(1+2n)(\tau_{3,n}-1)R_0^{-1}}{(1+\tau_{3,n})\beta_n}\right);$$
$$D_n^{(4)}=-C_n^{(4)}\tau_{3,n}/k_n(xR_0). \tag{П.3}$$

Дисперсионное уравнение модельной задачи в асимптотике малой вязкости совпадает с (П.2).

4. Выражения для коэффициентов $C_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$, $C_n^{(2)}$, $D_n^{(2)}$, $C_n^{(4)}$, $D_n^{(4)}$, через которые выражаются функции $\varphi(\mathbf{r},t)$ и $\psi^{(1)}(\mathbf{r},t)$ и $\psi^{(2)}(\mathbf{r},t)$ в упрощенной модельной задаче в пределе малой вязкости

$$C_n^{(1)}\equiv\frac{-Z_n}{n\beta_n}\left\{s+\frac{(1+2n)\sqrt{s\nu}(-1+\tau_{3,n})R_0^{2n}}{(1+\tau_{3,n})\beta_n}\right.$$
$$+\frac{\nu}{(1+\tau_{3,n})^2}\Big[2(-1+n^2)(1+\tau_{3,n})^2$$
$$+2n(2+n)(1+\tau_{3,n})^2R_0^{2+4n}+R_0^{2n-1}\Big((1+2n)^2$$
$$\left.\times(\tau_{3,n}-1)^2-2\big(2n(1+n)-1\big)(1+\tau_{3,n})^2R_0\Big)\Big]/\beta_n^2\right\},$$
$$\tau_{2,n}\equiv k_n(\mu_2)i_n(xR_0)/k_n(xR_0)i_n(\mu_2),$$
$$\tau_{3,n}\equiv k_n(\mu_3)i_n(xR_0)/k_n(xR_0)i_n(\mu_3)$$
$$D_n^{(1)}\equiv\frac{-Z_n}{(1+n)\beta_n}\left\{sR_0^{1+2n}+\frac{(1+2n)\sqrt{s\nu}(-1+\tau_{3,n})R_0^{2n}}{(1+\tau_{3,n})\beta_n}\right.$$
$$-\nu\Big[R_0^{-1+2n}\Big(-(1+2n)^2$$
$$-2R_0^2\beta_n\big(1-n^2+n(2+n)R_0^{1+2n}\big)+\tau_{3,n}^2\Big(-(1+2n)^2$$
$$-2R_0^2\beta_n\big(1-n^2+n(2+n)R_0^{1+2n}\big)\Big)+2\tau_{3,n}\Big((1+2n)^2$$
$$\left.-2R_0^2\beta_n\big(1-n^2+n(2+n)R_0^{1+2n}\big)\Big)\Big]/\beta_n^2(1+\tau_{3,n})^2\right\};$$
$$C_n^{(2)}\equiv-\frac{2\tau_{2,n}(1-n^2+2nR_0^{1+2n}+n^2R_0^{1+2n})}{i_n(x)n(1+n)(-1+\tau_{2,n})\beta_n}\nu Z_n;$$
$$D_n^{(2)}=-C_n^{(2)}\tau_{2,n}/k_n(x);$$
$$C_n^{(4)}\equiv\frac{Z_n(1+2n)\tau_{3,n}R_0^{-1+n}}{n(1+n)i_n(xR_0)(1+\tau_{3,n})\beta_n}$$
$$\times\left(\sqrt{s\nu}+\nu\frac{(1+2n)(\tau_{3,n}-1)R_0^{-1}}{(1+\tau_{3,n})\beta_n}\right);$$
$$D_n^{(4)}=-C_n^{(4)}\tau_{3,n}/k_n(xR_0). \tag{П.4}$$

Дисперсионное уравнение упрощенной модельной задачи в асимптотике малой вязкости совпадает с (П.2).

Работа выполнена в рамках тематического плана университета, при поддержке грантов: Рособразования № РНП 2.1.1/3776 и РФФИ № 09-01-00084.

Список литературы

[1] *Дьячук В.А., Мучник В.А.* // ДАН СССР. 1979. Т. 248. № 1. С. 60–63.

[2] *Мучник В.М., Фишман Б.Е.* Электризация грубодисперсных аэрозолей в атмосфере. Л.: Гидрометеоиздат, 1983. 280 с.

[3] *Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O.* // Phys. Scripta. 1996. Vol. 54. P. 660–666.

[4] *Ширяева С.О., Григорьев А.И.* Заряженная капля в грозовом облаке. Ярославль: Изд-во ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2008. 535 с.

[5] *Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 8. С. 22–31.

[6] *Золотой Н.Б., Карпов Г.В., Скурат В.Е.* // ЖТФ. 1988. Т. 58. Вып. 2. С. 315–323.

[7] *Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1993. Т. 63. Вып. 8. С. 162–170.

[8] *Григорьев А.И., Морозов В.В., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 10. С. 33–37.

[9] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Морозов В.В.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 6. С. 21–28.

[10] *Григорьев А.И., Лазарянц А.Э.* // ЖТФ. 1990. Т. 60. Вып. 6. С. 29–36.

[11] *Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 9. С. 8–13.

[12] *Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 11. С. 10–19.

[13] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 3. С. 21–28.

[14] *Григорьев А.И., Пожарицкий Д.М., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 5. С. 8–17.

[15] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Паранин А.Р.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 10. С. 30–36.

[16] *Ширяева С.О., Лазарянц А.Э., Григорьев А.И.* и др. Метод скаляризации векторных краевых задач. Препринт ИМРАН № 27. Ярославль, 1994. 126 с.

[17] *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.

[18] *Longuet-Higgins M.S.* // Royal Soc. London. Trans. Ser. A. 1953. Vol. 245. 903. P. 535–581.

[19] *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.

[20] *Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 439 с.