

01;03

## Об устойчивости капиллярных волн на поверхности заряженной струи, движущейся относительно среды

© А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, Н.А. Петрушов

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
150000 Ярославль, Россия  
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 26 января 2010 г.)

Выведено и проанализировано дисперсионное уравнение для капиллярных волн с произвольной симметрией (с произвольными азимутальными числами) на поверхности заряженной цилиндрической струи идеальной несжимаемой электропроводной жидкости, движущейся относительно идеальной несжимаемой диэлектрической среды. Показано, что наличие тангенциального скачка поля скоростей на поверхности струи приводит к периодической неустойчивости типа неустойчивости Кельвина–Гельмгольца волн на границе раздела сред и носит дестабилизирующий характер как для осесимметричных, так и для изгибных волн. Ширина диапазонов волновых чисел неустойчивых волн и величина инкрементов неустойчивости зависят от квадрата напряженности электростатического поля и квадрата скорости относительно движения, увеличиваясь с ростом напряженности поля и скорости. В отсутствие заряда на струе изгибная неустойчивость имеет пороговый характер и реализуется не при сколь угодно малых значениях скорости, но начиная с некоторой конечной ее величины.

### Введение

Феномен капиллярного распада на отдельные капли струй жидкости и, в частности, ее электродиспергирования при наличии электрического заряда на струе широко используется в технике и технологии (см., например, [1–5] и приведенную там литературу). Закономерности реализации капиллярно-электростатической неустойчивости и распада на капли заряженных струй жидкости подробно исследованы как экспериментально, так и теоретически [1–4]. Тем не менее некоторые вопросы, связанные с обсуждаемым феноменом, остались за рамками проведенных исследований. В частности, сказанное относится к особенностям распада на отдельные капли заряженных струй при учете взаимодействия капиллярных волн на поверхности струи с внешней средой. Собственно говоря, в большинстве практических применений феномена электродиспергирования жидкости присутствует среда с отличной от нуля плотностью. Однако специальных исследований, посвященных влиянию среды на капиллярный распад струй выполнено весьма мало [2,5], хотя исходя из общефизической формулировки проблемы естественно ожидать реализации на поверхности струи идеальной несжимаемой жидкости, движущейся относительно идеальной несжимаемой среды, аналога неустойчивости Кельвина–Гельмгольца [6], что и определит феноменологию распада струи на капли.

В отличие от капиллярной неустойчивости струи, имеющей апериодический характер, когда временная зависимость амплитуд определяется выражением:  $\sim \exp(\gamma t)$ , где  $\gamma$  вещественно, неустойчивость Кельвина–Гельмгольца является колебательной, т.е. соответствует экспоненциальному росту со временем амплитуды неустойчивой волны:  $\sim \exp(\gamma t) \cos(\omega t)$ , где  $\omega$  —

частота. В указанных условиях наличие внешней для струи среды будет приводить к ее дестабилизации, что и было предсказано Рэлеем и Бассетом в [7,8]. В последнее время выполнено много теоретических аналитических исследований физических закономерностей распада на капли заряженных струй, неподвижных относительно внешней среды, проведенных как в линейных, так и в нелинейных расчетах по амплитуде волн (см., например, [4,9–14] и указанную там литературу). В этой связи представляется актуальным исследовать особенности реализации капиллярной неустойчивости заряженной струи, движущейся относительно диэлектрической среды. Этой проблеме и посвящено настоящее рассмотрение.

### 1. Математическая формулировка задачи

В связи со сказанным выше рассмотрим задачу об исследовании устойчивости капиллярных волн на одномерно заряженной с поверхностной плотностью заряда  $\chi$  цилиндрической поверхности идеально проводящей несжимаемой струи идеальной жидкости радиуса  $R$ , с коэффициентом межфазного натяжения  $\sigma$  и плотностью  $\rho_2$ , движущейся со скоростью  $\mathbf{U}_0 \parallel \mathbf{e}_z$ , где  $\mathbf{e}_z$  — орт продольной координаты, в идеальной несжимаемой диэлектрической среде, имеющей плотность  $\rho_1$  и диэлектрическую проницаемость, равную единице. Задачу будем решать в инерционной системе отсчета, связанной с осью симметрии струи и движущейся со струей со скоростью  $\mathbf{U}_0$ , в цилиндрических координатах, орт  $\mathbf{e}_z$  которой совпадает по направлению с  $\mathbf{U}_0$  и с осью симметрии невозмущенной капиллярным волновым движением цилиндрической поверхности струи. Все рассмотрение проведем в безразмерных переменных, в

которых  $R = \rho_2 = \sigma = 1$ , а поверхность раздела сред, возмущенная капиллярным волновым движением, описывается соотношением

$$F(r, z, \varphi, t) \equiv r - 1 - \xi(z, \varphi, t) = 0, \quad |\xi| \ll 1,$$

где  $\xi(z, \varphi, t)$  — малое возмущение цилиндрической поверхности струи,  $\varphi$  — азимутальный угол.

Полная математическая формулировка задачи имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u}_1 &= 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_2 = 0; \quad \Delta \Phi = 0; \\ \partial_t \mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_1 \nabla) \mathbf{u}_1 &= -\frac{1}{\rho} \nabla p_1; \\ \partial_t \mathbf{u}_2 + (\mathbf{u}_2 \nabla) \mathbf{u}_2 &= -\nabla p_2; \\ r \rightarrow 0, \quad \mathbf{u}_2 &\rightarrow 0; \\ r \rightarrow \infty, \quad \mathbf{u}_1 &\rightarrow -\mathbf{U}_0; \quad \nabla \Phi \rightarrow 0; \\ r = 1 + \xi, \quad \frac{dF}{dt} &= 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_2; \\ p_2 - p_1 + p_E - p_\sigma &= 0; \quad \Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_S(t); \end{aligned}$$

где  $\mathbf{u}_j \equiv \mathbf{u}_j(\mathbf{r}, t)$  — поля скоростей течения жидкости в среде ( $j = 1$ ) и в струе ( $j = 2$ ), генерируемые волнами на поверхности раздела сред;  $p_j \equiv p_j(\mathbf{r}, t)$  — гидродинамические давления в среде ( $j = 1$ ) и струе ( $j = 2$ );  $p_E$  и  $p_\sigma$  — давление электрических сил и давление сил поверхностного натяжения на границе раздела сред соответственно;  $\Phi = \Phi(\mathbf{r}, t)$  — потенциал электростатического поля;  $\Phi_S(t)$  — потенциал поверхности струи;  $\mathbf{n}$  — орт нормали к поверхности струи;  $\rho$  — безразмерная плотность среды.

В качестве дополнительных условий примем:

— условие постоянства объема струи, приходящегося на одну длину волны  $\lambda$  (при одноволновой деформации границы раздела сред):

$$\int_V dV = \pi \lambda;$$

$$V = \{0 \leq r \leq 1 + \xi(z, \varphi, t); 0 \leq \varphi \leq 2\pi; z_0 \leq z \leq z_0 + \lambda\};$$

— условие сохранения заряда на отрезке струи длиной  $\lambda$ :

$$-\int_S \frac{1}{4\pi} \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi dS = 2\pi \chi \lambda;$$

$$S = \{r = 1 + \xi(z, \varphi, t); 0 \leq \varphi \leq 2\pi; z_0 \leq z \leq z_0 + \lambda\}.$$

## 2. Скаляризация задачи

В силу идеальности и несжимаемости жидкостей, которыми моделируются капля и среда, воспользуемся моделью потенциального волнового движения жидкостей, в рамках которой можно вести потенциалы полей скоростей  $\psi_1(\mathbf{r}, t)$  и  $\psi_2(\mathbf{r}, t)$ :

$$\mathbf{u}_1 \equiv -\mathbf{U}_0 + \nabla \psi_1; \quad \mathbf{u}_2 \equiv \nabla \psi_2.$$

Потенциалы  $\psi_j(\mathbf{r}, t)$ , также как и  $\Phi(\mathbf{r}, t)$ , при этом будут гармоническими функциями

$$\Delta \psi_1 = 0; \quad \Delta \psi_2 = 0,$$

удовлетворяющими условиям ограниченности

$$r \rightarrow 0: \quad \psi_2 \rightarrow 0; \quad r \rightarrow \infty: \quad \psi_1 \rightarrow 0.$$

Введение потенциалов скоростей позволяет проинтегрировать уравнения Эйлера и получить выражения для давлений в обеих средах:

$$p_1 = -\rho \partial_t \psi_1 - \frac{\rho}{2} (-\mathbf{U}_0 + \nabla \psi_1)^2 + \rho C_1;$$

$$p_2 = -\partial_t \psi_2 - \frac{1}{2} (\nabla \psi_2)^2 + C_2;$$

$C_j$  — константы интегрирования.

## 3. Линеаризация задачи

Поскольку потенциалы  $\psi_j(\mathbf{r}, t)$  описывают ту часть поля скоростей, которая порождается волновыми движениями поверхности раздела сред, примем, что в безразмерном виде они являются величинами того же порядка малости, что и возмущение границы раздела сред:

$$|\psi_1| \approx |\psi_2| \approx |\xi|.$$

Потенциал электростатического поля в окрестности струи представим в виде суперпозиции  $\Phi_0$  — потенциала в окрестности цилиндрической струи, являющегося величиной нулевого порядка малости по  $|\xi|$ , и поправки  $\Phi_1$ , порождаемой волновой деформацией цилиндрической поверхности струи, которая будет величиной того же порядка малости, что и возмущение границы раздела сред и гидродинамические потенциалы:

$$\Phi_1 \approx |\xi|.$$

Указанные обстоятельства позволяют линеаризовать систему уравнений и граничных условий, разложив исходную векторную задачу на две скалярные задачи для величин нулевого и первого порядков малости.

**Задача нулевого порядка малости** описывает стационарное состояние системы

$$\mathbf{u}_1 = -\mathbf{U}_0; \quad p_1^{(0)} = -\frac{\rho}{2} U_0^2 + C_1; \quad p_2^{(0)} = C_2; \quad \Delta \Phi_0 = 0;$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi_0 \rightarrow 0; \quad r = 1: \quad \Phi_0 = \Phi_S^{(0)};$$

$$-\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{z_0}^{z_0+\lambda} \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \Big|_{r=1} d\varphi dz = 2\pi \chi \lambda;$$

$$p_2^{(0)} - p_1^{(0)} + \frac{1}{8\pi} (\nabla \Phi_0)^2 - 1 = 0$$

и имеет решение

$$\mathbf{u}_1 = -\mathbf{U}_0; \quad \mathbf{u}_2 = 0; \quad \Phi_0 = -4\pi\chi \ln r; \quad p_1^{(0)} = p_0;$$

$$p_2^{(0)} = p_0 - 2\pi\chi^2 + 1.$$

Здесь  $p_j^{(0)}$ , где  $j = 1, 2$ , и  $\Phi_0$  — гидродинамические давления в обеих средах и электростатический потенциал в стационарном состоянии;  $p_0$  — константа, равная гидростатическому давлению во внешней среде.

**Задача первого порядка** запишется в виде

$$\Delta\psi_1 = 0; \quad \Delta\psi_2 = 0; \quad \Delta\Phi_1 = 0;$$

$$r \rightarrow 0, \quad \psi_2 \rightarrow 0; \quad r \rightarrow \infty, \quad \psi_1 \rightarrow 0; \quad \Phi_1 \rightarrow 0;$$

$$r = 1: \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial r} = \frac{\partial\xi}{\partial t} - U_0 \frac{\partial\xi}{\partial z}; \quad \partial_r\Phi_0\xi + \Phi_1 = 0; \quad \frac{\partial\psi_2}{\partial r} = \frac{\partial\xi}{\partial t};$$

$$-\partial_t\psi_2 + \rho\partial_t\psi_1 + \rho U_0 g \nabla\psi_1 + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial(\nabla\Phi_0)^2}{\partial r} \xi + \frac{1}{4\pi} (\nabla\Phi_0 g \nabla\Phi_1) + \xi + \Delta_S \xi = 0;$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{z_0}^{z_0+\lambda} \xi d\varphi dz = 0;$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{z_0}^{z_0+\lambda} \left( \frac{\partial\Phi_0}{\partial r} \xi + \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial r^2} \xi + \frac{\partial\Phi_1}{\partial r} \right) d\varphi dz = 0;$$

$$\Delta_S \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Решение этой задачи ищем в виде элементарных бегущих волн:

$$\xi(\varphi, z, t) = \alpha(t) \exp(ikz + im\varphi);$$

$$\psi_1(\mathbf{r}, t) = c(t) \exp(ikz + im\varphi) K_m(kr);$$

$$\psi_2(\mathbf{r}, t) = b(t) \exp(ikz + im\varphi) I_m(kr);$$

$$\Phi_1(\mathbf{r}, t) = a(t) \exp(ikz + im\varphi) K_m(kr), \quad (1)$$

где  $I_m(kr)$  и  $K_m(kr)$  — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода порядка  $m$  [15],  $m$  — азимутальный параметр. Кинематическое граничное условие и условие эквипотенциальности поверхности струи позволяют выразить неизвестные амплитуды  $a(t)$ ,  $b(t)$  и  $c(t)$  в решениях для гидродинамических и электростатического потенциалов через амплитуду  $\alpha(t)$  волн на границе раздела сред:

$$b(t) = \frac{\alpha'(t)}{kI'_m(k)}; \quad c(t) = \frac{1}{kK'_m(k)} [\alpha'(t) - \alpha(t)ikU_0];$$

$$a(t) = \alpha(t) \frac{4\pi\chi}{K_m(k)}. \quad (2)$$

Подставив проекты решений (1) с учетом (2) в динамическое граничное условие, получим дифференциальное уравнение относительно неизвестной амплитуды  $\alpha(t)$ :

$$\beta_m \alpha''(t) - 2i\delta_m \alpha'(t) + \kappa_m \alpha(t) = 0; \quad (3)$$

$$\beta_m(k) \equiv \rho h_m^{-1} - g_m^{-1} \equiv \frac{\rho g_m - h_m}{g_m h_m};$$

$$\delta_m(k, U_0) \equiv k\rho U_0 h_m^{-1};$$

$$\kappa_m(k, \chi, U_0) \equiv \{ [1 - m^2 - k^2 - w(1 + h_m)] - We k^2 h_m^{-1} \};$$

$$h_m(k) \equiv \frac{kK'_m(k)}{K_m(k)} \equiv m - \frac{kK_{m+1}(k)}{K_m(k)};$$

$$g_m(k) \equiv \frac{kI'_m(k)}{I_m(k)} \equiv m + \frac{kI_{m+1}(k)}{I_m(k)};$$

$$w \equiv 4\pi\chi^2; \quad We \equiv \rho U_0^2.$$

Решение уравнения (3) естественно искать в периодическом виде:

$$\alpha(t) \propto \exp(ist), \quad (4)$$

где  $s$  — частота капиллярных волн, в общем случае — комплексная. Подставим (4) в (3) и получим дисперсионное уравнение задачи:

$$s^2 - \frac{2\delta_m}{\beta_m} s - \frac{\kappa_m}{\beta_m} = 0.$$

Несложно видеть, что при  $U_0 = 0$  это дисперсионное уравнение сводится к дисперсионному уравнению для капиллярных волн на поверхности идеальной несжимаемой электропроводной струи, неподвижной относительно идеальной несжимаемой диэлектрической среды [5], а при  $\rho = 0$  — к дисперсионному уравнению для струи в вакууме [4].

Решения дисперсионного уравнения имеют следующий вид:

$$s_{1,2} = \frac{\delta_m}{\beta_m} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta_m}{\beta_m}\right)^2 + \frac{\kappa_m}{\beta_m}}$$

или

$$s_{1,2} = \frac{g_m}{(\rho g_m - h_m)} k\rho U_0 \pm \sqrt{\left[\frac{g_m k\rho U_0}{\rho g_m - h_m}\right]^2 + \frac{(1 - m^2 - k^2 - w(1 + h_m))h_m g_m - We k^2 g_m}{(\rho g_m - h_m)}}. \quad (5)$$

## Анализ полученных результатов

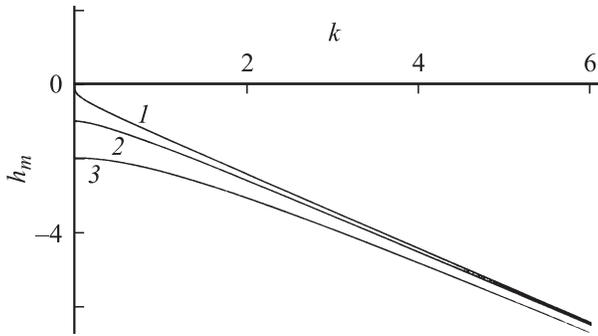
При изменении физических параметров системы волн на поверхности раздела сред будут сохранять устойчивость, пока частоты  $s_{1,2}$  остаются вещественными, т.е. пока подкоренное выражение в (5) положительно. Когда подкоренное выражение станет отрицательным, у частот  $s_{1,2}$  появится мнимая часть, и они образуют пару

комплексно сопряженных корней:  $s \equiv \text{Res} \pm i\text{Im}s$ . При этом амплитуда волны с отрицательной мнимой частью частоты, пропорциональная

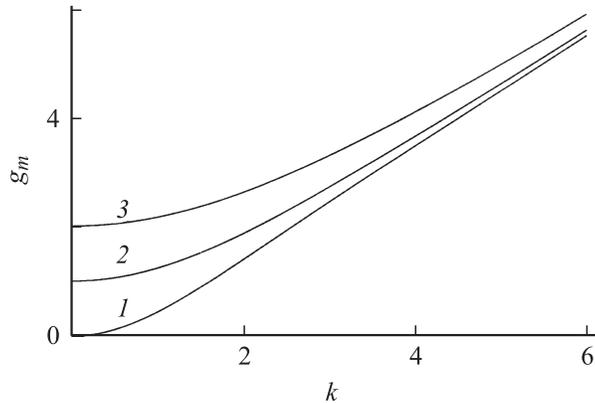
$$\exp[i(\text{Res} - i|\text{Im}s|)t] \propto \exp[|\text{Im}s|t] \exp[i\text{Re}s t],$$

будет экспоненциально со временем увеличивать свою амплитуду с инкрементом:  $\gamma \equiv |\text{Im}s|$ , что приведет к распаду струи на отдельные капли. Амплитуда волны с положительной мнимой частью частоты будет экспоненциально во времени затухать.

Для удобства качественного анализа соотношения (5) рис. 1 и 2 для первых трех значений азимутального числа  $m$  приведены графики зависимостей  $h_m = h_m(k)$  и  $g_m = g_m(k)$  соответственно. Из соотношения (5) видно, что поскольку независимо от номера азимутального числа  $h_m < 0$ , а  $g_m > 0$ , то для ситуации жидкой струи в газообразной среде ( $\rho \approx 0.001 \text{ g/cm}^3$ ) при любых разумных скоростях ( $U_0 \leq 1000 \text{ cm/s}$  [16]) для волн с волновыми числами, представляющими интерес в плане капиллярно-электростатического дробления струи ( $k \approx 1$ ), второе слагаемое под радикалом в соотношении (5), как правило, отрицательно и фактически определяет величину инкремента неустойчивости.



**Рис. 1.** Зависимости коэффициента  $h_m(k)$  от безразмерного волнового числа, построенные при различных значениях азимутального числа  $m$ : 1 — 0, 2 — 1, 3 — 2.



**Рис. 2.** Зависимости коэффициента  $g_m(k)$  от безразмерного волнового числа, построенные при различных значениях азимутального числа  $m$ : 1 — 0, 2 — 1, 3 — 2.

Приравняв в (5) подкоренное выражение к нулю, получим критическое условие перехода от устойчивых волн к неустойчивым:

$$\rho k^2 We + \left[ (1 - m^2 - k^2 - w(1 + h_m)) \frac{h_m}{g_m} - k^2 We \frac{1}{g_m} \right] (\rho g_m - h_m) = 0. \quad (6)$$

Из (6) легко найти критическое для начала реализации неустойчивости значение параметра  $We$ , пропорционального квадрату скорости:

$$We = \frac{[-1 + m^2 + k^2 + w(1 + h_m)](\rho g_m - h_m)}{k^2}. \quad (7)$$

Здесь следует отметить, что безразмерный параметр  $We$ , будучи выражен через размерные переменные, имеет вид:

$$We \equiv (\rho_1 R U_0^2 / \sigma),$$

и, согласно экспериментальным данным [16], в газообразной среде его величина ограничена сверху значением:  $We \approx 1$ .

Из (7) несложно видеть, что с увеличением  $\chi$  — поверхностной плотности электрического заряда на границе раздела сред (параметра  $w$ ) — критическая для начала распада струи величина скорости стационарного движения  $U_0$  (параметра  $We$ ) снижается и при

$$w = \frac{1 - m^2 - k^2}{h_m + 1} \quad (8)$$

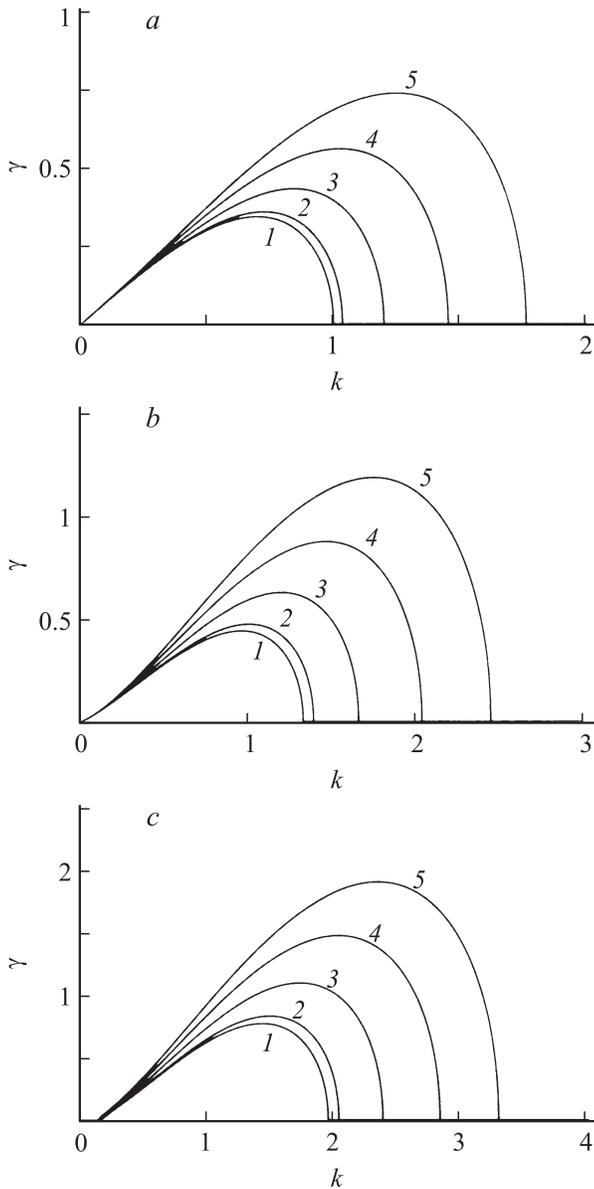
обращается в нуль. При значении параметра  $w$ , определяемом соотношением (8), реализуется электростатически капиллярная неустойчивость волны с азимутальным числом  $m$  [4,14].

Для отыскания волнового числа  $k_m$  наиболее неустойчивой волны (волны, обладающей максимальным инкрементом  $\gamma$  и определяющей феноменологию разбиения струи на капли) следует приравнять нулю  $\Upsilon \equiv \partial\gamma/\partial k$  производную по волновому числу  $k$  от инкремента неустойчивости

$$\gamma \equiv - \left| \text{Im} \left( \sqrt{\left[ \frac{g_m k \rho U_0}{\rho g_m - h_m} \right]^2 + \frac{[(1 - m^2 - k^2 - w(1 + h_m)) h_m g_m - We k^2 g_m]}{\rho g_m - h_m}} \right) \right| \quad (9)$$

и разрешить получившееся уравнение  $\Upsilon(k) = 0$  относительно  $k$ . В силу громоздкости получающегося уравнения, содержащего функции Бесселя первого и второго родов и их производные, такая задача аналитически неразрешима, но ее можно решить графически.

Из рис. 3, а, на котором приведены графики зависимости величины инкремента осесимметричных волн ( $m = 0$ ) на границе раздела сред от волнового числа  $k$  при нескольких фиксированных значениях параметров  $We$  и  $w = 0$ , видно, что с увеличением параметра  $We$  ширина области волновых чисел, соответствующих неустойчивым волнам, расширяется, а величина



**Рис. 3.** Зависимости величины инкремента неустойчивости осесимметричных волн ( $m = 0$ ) от безразмерного волнового числа, построенные при  $\rho = 0.001$  для различных значений безразмерного параметра  $We$ : 1 — 0, 2 — 0.1, 3 — 0.5, 4 — 1, 5 — 1.5. Значения  $w$ : а — 0, б — 1, с — 2.

волнового числа, соответствующего волне с максимальным инкрементом, смещается в область больших значений волновых чисел. В самом деле, для струи в вакууме (при  $We = 0$ ) капиллярную неустойчивость претерпевают волны с волновыми числами  $k^2 < 1$  [2,4].

При наличии материальной внешней среды ( $We \neq 0$ ) в отсутствие электрического заряда ширина диапазона волновых чисел неустойчивых осесимметричных волн расширяется до:  $k^2 < |h_0|/(|h_0| - We)$ . Видно, что чем больше  $We$ , тем шире зона неустойчивости. При наличии на капле заряда при прочих равных условиях правая граница зоны неустойчивости еще больше смещается

в область больших волновых чисел, так же как и волновое число волны с максимальным инкрементом (см. рис. 3, б), а величины инкрементов увеличиваются. При больших зарядах на струе левая граница зоны неустойчивости отрывается от начала координат и смещается вправо, в область больших значений волновых чисел (см. рис. 3, с). Такое поведение зон неустойчивости обязано сильному влиянию электрического заряда (см. [4,17]), наиболее ярко проявляющемуся в отсутствии относительного движения струи и среды [17]. Согласно [17], зона капиллярной неустойчивости струи в отсутствие электрического заряда определяется соотношением:  $k^2 < 1$ . По мере увеличения заряда зона капиллярной неустойчивости целиком смещается в область больших значений волновых чисел и расширяется, согласно условию

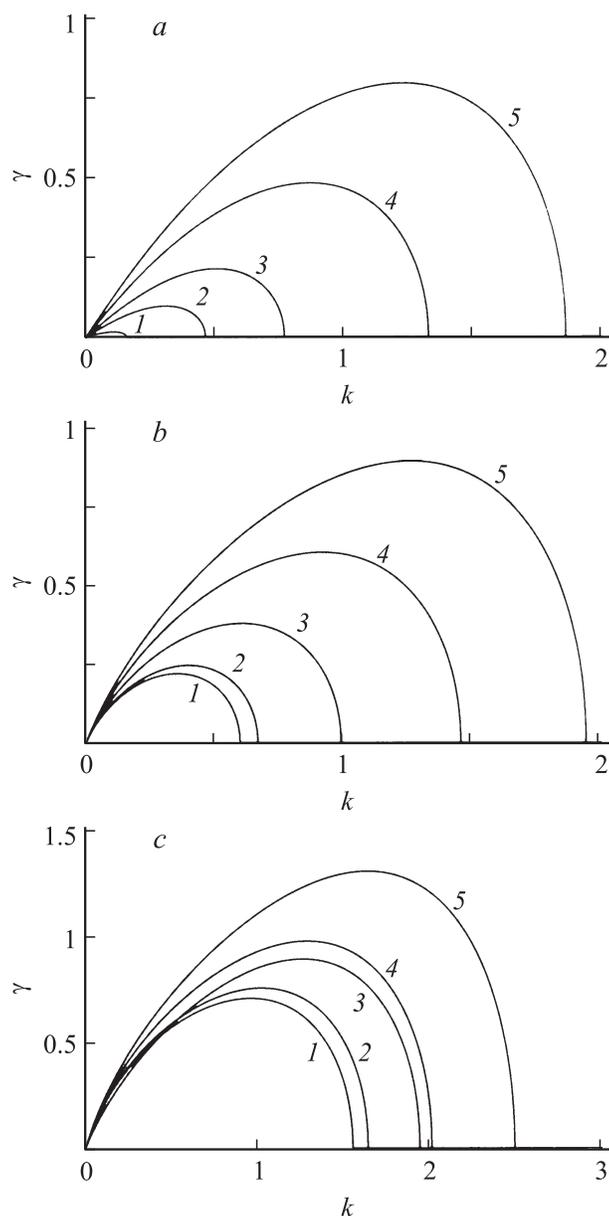
$$k^2 \leq 1 - w(1 + h_0). \quad (10)$$

В соотношении (10) множитель  $(1 + h_0)$  положителен при малых значениях волновых чисел (при  $k < 0.595$ , см. рис. 1) и отрицателен при больших значениях (при  $k > 0.595$ ) [4]. Из (10) видно, что при достаточно больших значениях заряда (параметра  $w$ ) и при малых волновых числах (при  $k < 0.595$ ) правая часть (10), где  $w(1 + h_0) > 1$ , становится отрицательной, что и будет соответствовать исчезновению неустойчивых решений, или что то же самое — смещению зоны неустойчивости в область больших волновых чисел.

Несколько иная картина влияния относительного движения капли и среды складывается для изгибной моды ( $m = 1$ ). На рис. 4, а приведены зависимости инкрементов неустойчивости от волновых чисел неосесимметричных волн с  $m = 1$  при нулевом заряде на струе ( $w = 0$ ). Видно, что с ростом скорости (с ростом параметра  $We$ ) ширина зоны неустойчивости расширяется, величины инкрементов увеличиваются, а положение волнового числа, соответствующего волне с максимальным инкрементом, смещается в область больших значений волновых чисел. Интересно, что неустойчивость изгибной моды при  $w = 0$  имеет пороговый по  $We$  (по скорости) характер и реализуется при  $We > 1$ . В самом деле, для изгибной моды из соотношения (9) при  $w = 0$  несложно получить критическое условие реализации неустойчивости в виде:  $We > |h_1|$ . А поскольку, согласно рис. 1, при  $m = 1$  минимальное значение  $|h_1|$  есть единица, то получаем аналитическое подтверждение полученных расчетных данных.

При увеличении электрического заряда, приходящегося на единицу длины струи (или на единицу площади поверхности струи [4]), изгибная неустойчивость струи реализуется уже при весьма маленьких значениях относительной скорости струи и среды (параметра  $We$ ). Ширина области неустойчивости и величина инкремента, так же как и волновое число волны, обладающей максимальным инкрементом, увеличиваются с ростом скорости (параметра  $We$ ), как это видно из рис. 4, б–с.

В завершение следует отметить, что проведенное рассмотрение выполнено по модели идеальных жидкостей,



**Рис. 4.** Зависимости величины инкремента неустойчивости осесимметричных волн с  $m = 1$  (изгибных волн) от безразмерного волнового числа, построенные при  $\rho = 0.001$  для различных значений безразмерного параметра  $We$ : *a* —  $w = 0$ ,  $We$ : 1 — 1.05, 2 — 1.25, 3 — 1.5, 4 — 2, 5 — 2.5; *b* —  $w = 1$ ,  $We$ : 1 — 0.001, 2 — 0.1, 3 — 0.5, 4 — 1, 5 — 1.5; *c* —  $w = 2$ ,  $We$ : 1 — 0.001, 2 — 0.1, 3 — 0.5, 4 — 1, 5 — 1.5.

которыми моделируются жидкость струи и окружающая среда, и может иметь реальный смысл, когда для безразмерной плотности окружающей среды и безразмерных коэффициентов кинематических вязкостей выполняются условия:  $\rho_1 \ll 1$ ,  $\nu_2 \ll 1$ ,  $\nu_1 \approx 1$ , как это следует из [18], где исследовалось волновое движение заряженной границы двух вязких жидкостей. Для подавляющего большинства жидкостей, используемых при электродиспергировании в газовой атмосфере, эти условия выполня-

ются [4,16]. Роль вязкости становится определяющей, когда исследуются волны на поверхности струи вязкой жидкости в быстро изменяющемся во времени внешнем электрическом поле, как это делается в [19], но даже и в такой ситуации некоторые авторы пользуются моделью идеальной жидкости (см., например, [20]).

Эксперименты по исследованию роли окружающей среды в распаде струи на капли проводились лишь при весьма больших скоростях движения струй, т.е. при  $We \gg 1$  [2,5]. Проведенное рассмотрение ориентировано на изучение роли окружающей среды на распад струй, выбрасываемых неустойчивой по отношению к собственному или индуцированному зарядам поверхностью жидкости, для которых характерно условие:  $We \leq 1$  [4,16]. Возможная экспериментальная проверка полученных зависимостей должна ориентироваться на исследование распада струй при пониженном давлении окружающей газообразной среды.

## Заключение

В проведенном анализе выяснилось, что движение струи идеальной несжимаемой, идеально электропроводной жидкости относительно несжимаемой диэлектрической среды приводит к дестабилизации как осесимметричных, так и изгибных волн на цилиндрической границе раздела сред. Для осесимметричных волн увеличение скорости движения струи приводит к уменьшению размеров капель, на которые дробится струя. Для незаряженной струи неустойчивость изгибных волн имеет пороговый характер: реализуется при конечном значении скорости относительно движения струи и среды.

Работа выполнена в рамках тематического плана университета при поддержке грантов: Рособразования № 2.1.1/3776, РФФИ № 09-01-00084 и 09-08-00148.

## Список литературы

- [1] Бураев Т.К., Верещагин И.П., Пашин Н.М. // Сильные электрические поля в технологических процессах. М.: Энергия, 1979. № 3. С. 87–105.
- [2] Ентов В.М., Ярин А.Л. // ВИНТИ. Итоги науки и техники. Сер. „Механика жидкости и газа“. 1984. Т. 17. С. 112–197.
- [3] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [4] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В. Спонтанный капиллярный распад заряженных струй. Ярославль: Изд-во, ЯрГУ, 2007. 340 с.
- [5] Eggers J., Willermaux E. // Rep. Prog. Phys. 2008. Vol. 71. № 036 601. P. 1–79.
- [6] Kelvin, Lord W. // Phil. Mag. 1871. Vol. 42. P. 368–374.
- [7] Strutt J.W. (Lord Rayleigh) // Phil. Mag. 1892. Vol. 34. Ser. 5. P. 177–180.
- [8] Basset A.B. // Amer. J. Math. 1894. Vol. 16. P. 93–110.
- [9] Ширяева С.О., Воронина Н.В., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 2. С. 46–55.

- [10] Григорьев А.И. // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 2. С. 20–32.
- [11] Воронина Н.В., Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 6. С. 1–14.
- [12] Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 5. С. 14–29.
- [13] Ширяева С.О. // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 12. С. 12–20.
- [14] Григорьев А.И. // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 4. С. 36–45.
- [15] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.
- [16] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Святченко А.А. Классификация режимов работы электрогидродинамических источников ионов. Препринт ИМ РАН № 25. Ярославль, 1993. 118 с.
- [17] Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЭОМ. 2009. № 5. С. 9–17.
- [18] Григорьев А.И., Пожарицкий Д.М., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 9. С. 36–42.
- [19] Демехин Е.А., Полянских С.В. // ПМТФ. 2010. Т. 51. № 1. С. 39–53.
- [20] Демехин Е.А., Полянских С.В. // ПМТФ. 2000. Т. 50. № 5. С. 56–66.