

01;03

## Аналитическое решение задачи о течении Куэтта в плоском канале с бесконечными параллельными стенками

© В.Н. Попов, И.В. Тестова, А.А. Юшканов

Архангельский государственный технический университет,  
163002 Архангельск, Россия  
e-mail: popov.vasily@pomorsu.ru

(Поступило в Редакцию 26 января 2010 г. В окончательной редакции 5 мая 2010 г.)

В рамках кинетического подхода в изотермическом приближении построено аналитическое (в виде ряда Неймана) решение задачи о течении Куэтта в плоском канале с бесконечными параллельными стенками. В качестве основного уравнения используется БГК-модель кинетического уравнения Больцмана, а в качестве граничного условия — модель диффузного отражения. С учетом построенной функции распределения вычислен поток массы через половину толщины канала в направлении, параллельном его стенкам, и отличная от нуля компонента тензора вязких напряжений. Проведено сравнение с аналогичными результатами, полученными численными методами.

### Введение

Математическое описание течения газа в канале существенным образом зависит от соотношения его характерного размера  $D'$  и средней длины свободного пробега молекул газа  $l_g$ . При  $D' \gg l_g$  для описания течения газа можно использовать уравнения механики сплошной среды (уравнения Навье–Стокса), а в качестве граничных условий на стенках канала — классические граничные условия прилипания, т.е. можно считать, что скорость и температура газа вблизи стенки равны температуре и скорости самой стенки. Однако с уменьшением  $D'$  результаты, полученные на основе такого подхода, все существеннее отличаются от экспериментально наблюдаемых и макроскопического описания, основанного на уравнениях механики сплошной среды; необходим переход к микроскопическому описанию, основанному на использовании кинетического уравнения Больцмана [1].

Течение Куэтта к настоящему времени достаточно подробно исследовано численными методами как для простых газов, так и для бинарных смесей [2–7]. Единственное аналитическое решение данной задачи представлено в работе [8], авторы которой на основе БГК-модели уравнения Больцмана для почти зеркальных граничных условий на стенках канала получили выражения, описывающие профиль массовой скорости газа и потоки тепла и массы вдоль его оси.

Целью представленной работы является построение аналитического решения БГК-модели кинетического уравнения Больцмана в задаче о течении Куэтта с использованием модели диффузного отражения молекул газа стенками канала. Следует отметить, что данная модель граничного условия является более реалистичной по сравнению с использованной в [8] особенно для не обработанных специальным образом технических поверхностей. В то же время следует отметить, что использование данной модели граничного условия влечет за собой ряд дополнительных математических сложностей, которых удалось избежать в [8]. В частности, это

относится к возникшей необходимости решения задачи факторизации коэффициента краевой задачи, к которой сводится (с использованием методов теории функции комплексного переменного) сингулярное интегральное уравнение, получаемое после подстановки граничных условий в общее решение исходного уравнения, а также необходимость решения интегрального уравнения для нахождения коэффициентов в разложении решения задачи по собственным векторам непрерывного спектра. Для решения упомянутых выше проблем использовались методы, разработанные в [9].

### 1. Постановка задачи. Построение функции распределения молекул газа

Пусть дан плоский канал толщиной  $D'$ , стенки которого расположены в плоскостях  $x' = \pm d'$  прямоугольной декартовой системы координат ( $d' = D'/2$ ), ось  $Oz'$  которой параллельна стенкам канала. Предположим, что стенки канала движутся в своих плоскостях в противоположных направлениях со скоростями  $u$  и  $-u$ . Будем считать, что течение носит стационарный характер, а скорость движения стенок канала много меньше скорости звука в газе. Тогда рассматриваемая задача допускает линеаризацию. Учитывая, что в задачах скольжения функция распределения пропорциональна касательной к обтекаемой поверхности компоненте массовой скорости газа, функцию распределения молекул газа по координатам и скоростям представим в виде

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = \beta^{3/2} \pi^{-3/2} \exp(-C^2) [1 + C_z Z(x, C_x)]. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{r}'$  — размерный радиус-вектор;  $\mathbf{C} = \sqrt{\beta} \mathbf{v}$  — безразмерная скорость молекул газа;  $\beta = m/2k_B T$ ;  $m$  — масса молекулы газа;  $k_B$  — постоянная Больцмана;  $T$  — температура газа;  $Z(x, C_x)$  — линейная поправка к локально-равновесной функции распределения;

$x = x'/l_g$  — безразмерная координата;  $l_g = \eta_g \beta^{-1/2}/p$  — средняя длина свободного пробега молекул газа,  $p$  и  $\eta_g$  — давление и коэффициент динамической вязкости газа.

Запишем в выбранной системе координат БГК-модель кинетического уравнения Больцмана

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x'} + v_z \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{p}{\eta_g} (f_{eq} - f). \quad (2)$$

Здесь  $f_{eq}(\mathbf{r}', \mathbf{v})$  — локально-равновесный максвеллиан. Подставив (1) в (2) и линеаризовав  $f_{eq}(\mathbf{r}', \mathbf{v})$  относительно абсолютного максвеллиана, приходим к уравнению для нахождения  $Z(x, \mu)$  ( $\mu = C_x$ )

$$\mu \frac{\partial Z}{\partial x} + Z(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tau^2) Z(x, \tau) d\tau. \quad (3)$$

Общее решение (3) приведено в [10]

$$Z(x, \mu) = A_0 + A_1(x - \mu) + \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) F(\eta, \mu) a(\eta) d\eta, \quad (4)$$

$$F(\eta, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta P \frac{1}{\eta - \mu} + \exp(\eta^2) \lambda(\eta) \delta(\eta - \mu),$$

$$\lambda(z) = 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\mu^2)}{\mu - z} d\mu,$$

$P1/z$  — распределение в смысле главного значения при вычислении интеграла от  $1/z$ ,  $\delta(z)$  — дельта-функция Дирака, а  $A_0$ ,  $A_1$  и  $a(\eta)$  — неизвестные параметры и функция, подлежащие дальнейшему определению. Граничные условия на верхней и нижней стенках канала с учетом модели диффузного отражения запишутся в виде

$$Z(d, \mu) = 2U, \quad \mu < 0, \quad (5)$$

$$Z(-d, \mu) = -2U, \quad \mu > 0. \quad (6)$$

Здесь  $U = \sqrt{Bu}$  — модуль безразмерной скорости движения стенок канала. Подставив (4) в (5) и (6), приходим к интегральным уравнениям

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta b(\eta, d)}{\eta - \mu} d\eta + \exp(\mu^2) b(\mu, d) \lambda(\mu) = 2U - A_0 - A_1(d - \mu), \quad \mu < 0, \quad (7)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta b(\eta, -d)}{\eta - \mu} d\eta + \exp(\mu^2) b(\mu, -d) \lambda(\mu) = -2U - A_0 + A_1(d + \mu), \quad \mu > 0, \quad (8)$$

$$b(\eta, x) = \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) a(\eta). \quad (9)$$

Заменим в (7)  $\mu$  на  $-\mu$  и представим входящий в него интеграл в виде суммы двух. Заменив в первом интеграле переменную интегрирования  $\eta$  на  $-\eta$ , приходим к уравнению

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta b(-\eta, d)}{\eta - \mu} d\eta + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta b(\eta, d)}{\eta + \mu} d\eta + \exp(\mu^2) b(-\mu, d) \lambda(\mu) = 2U - A_0 - A_1(d + \mu), \quad \mu > 0, \quad (10)$$

При записи (10) учтено, что на действительной оси  $\lambda(\mu)$  является четной функцией. Аналогичным образом преобразуем и интеграл, входящий в (8)

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta b(-\eta, -d)}{\eta + \mu} d\eta + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta b(\eta, -d)}{\eta - \mu} d\eta + \exp(\mu^2) b(\mu, -d) \lambda(\mu) = -2U - A_0 + A_1(d + \mu), \quad \mu > 0. \quad (11)$$

Последовательно складывая и вычитая почленно (10) и (11) с учетом (9), приходим к уравнениям

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta [a(\eta) + a(-\eta)] \exp(d/\eta) d\eta}{\eta - \mu} + [a(\mu) + a(-\mu)] \exp\left(\mu^2 + \frac{d}{\mu}\right) \lambda(\mu) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta [a(\eta) + a(-\eta)] \exp(-d/\eta) d\eta}{\eta + \mu} = -2A_0, \quad \mu > 0, \quad (12)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta [a(-\eta) - a(\eta)] \exp(d/\eta) d\eta}{\eta - \mu} + [a(-\mu) - a(\mu)] \exp\left(\mu^2 + \frac{d}{\mu}\right) \lambda(\mu) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta [a(\eta) - a(-\eta)] \exp(-d/\eta) d\eta}{\eta + \mu} = 4U - 2A_1(d + \mu), \quad \mu > 0. \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что (12) обращается в тождество при выполнении условий  $a(-\eta) = -a(\eta)$ ,  $A_0 = 0$ . При этом (13) можно переписать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta b(\eta, -d)}{\eta - \mu} d\eta + \exp(\mu^2) b(\mu, -d) \lambda(\mu) = f(\mu), \quad \mu > 0, \quad (14)$$

$$f(\mu) = -2U + A_1(d + \mu) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta b(\eta, d)}{\eta + \mu} d\eta.$$

Решение (14) ищем с использованием методов крайних задач теории функций комплексного переменного. На этом пути находим

$$A_1 = \frac{1}{d - Q_1} \left[ 2U + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \eta X(-\eta) a(\eta) \exp\left(-\frac{d}{\eta}\right) d\eta \right], \quad (15)$$

$$X(z) = \frac{1}{z} \exp \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\theta(\tau) - \pi}{\tau - z} \right],$$

$$\theta(\tau) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\lambda(\tau)}{\sqrt{\pi\tau} \exp(-\tau^2)},$$

$Q_1 = -1.01619$  [11], а для определения  $a(\eta)$  приходим к интегральному уравнению

$$a(\mu) = \frac{h(\mu)}{d - Q_1} \left[ 2U + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \eta X(-\eta) a(\eta) \exp\left(-\frac{d}{\eta}\right) d\eta + \frac{1}{\sqrt{\pi}} (d - Q_1) \int_0^{+\infty} \eta X(-\eta) a(\eta) \exp\left(-\frac{d}{\eta}\right) \frac{d\eta}{\eta + \mu} \right], \quad (16)$$

$$h(\mu) = \frac{X(-\mu)}{2|\lambda+(\mu)|^2} \exp\left(-\mu^2 - \frac{d}{\mu}\right).$$

Решение (16) ищем в виде степенного ряда

$$a(\mu) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k a_k(\mu), \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{\pi}}. \quad (17)$$

Подставив (17) в (16) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $\lambda$ , приходим к системе рекуррентных соотношений, из которых находим

$$a_0(\mu) = \frac{2Uh(\mu)}{d - Q_1},$$

$$a_1(\mu) = \frac{2Uh(\mu)}{d - Q_1} \int_0^{\infty} g(\eta) \left[ 1 + \frac{d - Q_1}{\eta + \mu} \right] d\eta,$$

$$a_2(\mu) = \frac{2Uh(\mu)}{d - Q_1} \int_0^{\infty} g(\eta) \left[ 1 + \frac{d - Q_1}{\eta + \mu} \right] d\eta \times \int_0^{\infty} g(\tau) \left[ 1 + \frac{d - Q_1}{\tau + \eta} \right] d\tau,$$

$$g(\eta) = \frac{\eta X^2(-\eta)}{2|\lambda + (\eta)|^2 (d - Q_1)} \exp\left(-\eta^2 - \frac{2d}{\eta}\right), \quad \eta > 0.$$

Таким образом,

$$a(\mu) = \frac{2Uh(\mu)}{d - Q_1} \left[ 1 + \pi^{-1/2} \int_0^{+\infty} g(\eta) \left[ 1 + \frac{d - Q_1}{\eta + \mu} \right] d\eta + \pi^{-1} \int_0^{\infty} g(\eta) \left[ 1 + \frac{d - Q_1}{\eta + \mu} \right] d\eta \times \int_0^{\infty} g(\tau) \left[ 1 + \frac{d - Q_1}{\tau + \eta} \right] d\tau + \dots \right]. \quad (18)$$

Подставив (18) в (15) и вычислив входящие в полученное выражение интегралы, находим

$$A_1 = \frac{2U}{d - Q_1} \left[ 1 + \frac{1}{d - Q_1} \sum_{k=0}^{+\infty} I_k \right]. \quad (19)$$

Здесь

$$I_0 = \pi^{-1/2} \int_0^{\infty} g(\mu) d\mu, \quad (20)$$

$$I_1 = \pi^{-1} \int_0^{\infty} g(\mu) d\mu \int_0^{+\infty} g(\eta) \left[ 1 + \frac{d - Q_1}{\eta + \mu} \right] d\eta, \quad (21)$$

$$I_2 = \pi^{-3/2} \int_0^{\infty} g(\mu) d\mu \int_0^{\infty} g(\eta) \left[ 1 + \frac{d - Q_1}{\eta + \mu} \right] d\eta \times \int_0^{\infty} g(\tau) \left[ 1 + \frac{d - Q_1}{\tau + \eta} \right] d\tau. \quad (22)$$

Таким образом, неизвестные параметры  $A_0, A_1$  и функция  $a(\mu)$ , входящие в (4), найдены и функция распределения молекул газа по координатам и скоростям построена.

## 2. Вычисление макропараметров газа в канале

С учетом построенной функции распределения вычислим безразмерную массовую скорость газа в канале  $q_z(x)$ , безразмерный поток массы газа через половину толщины канала  $U_z$  и величину компоненты тензора вязких напряжений  $p_{xz}$ . Исходя из статистического смысла функции распределения, учитывая (1), (4), находим

$$q_z(x) = \pi^{-3/2} \int \exp(-C^2) C_z^2 Z(x, C_x) d^3 C = \frac{1}{2} A_1 x + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a(\eta) \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) d\eta. \quad (23)$$

Подставив (18) и (19) в (23), после интегрирования получим

$$q_z(x) = \frac{U}{d - Q_1} \left[ 1 + \frac{1}{d - Q_1} \sum_{k=0}^{+\infty} I_k + \sum_{k=0}^{+\infty} J_k(x) \right]. \quad (24)$$

Здесь  $I_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) определены выражениями (20)–(22),  $d = D/2$ ,

$$J_0(x) = \pi^{-1/2} \int_0^{+\infty} \gamma(x, \mu) d\mu,$$

$$J_1(x) = \pi^{-1} \int_0^{+\infty} \gamma(x, \mu) d\mu \int_0^{+\infty} g(\eta) \left[ 1 + \frac{d - Q_1}{\eta + \mu} \right] d\eta,$$

$$J_2(x) = \pi^{-3/2} \int_0^{+\infty} \gamma(x, \mu) d\mu \int_0^{+\infty} g(\eta) \left[ 1 + \frac{d - Q_1}{\eta + \mu} \right] d\eta$$

$$\times \int_0^{+\infty} g(\tau) \left[ 1 + \frac{d - Q_1}{\tau + \eta} \right] d\tau,$$

$$\gamma(x, \mu) = \frac{X(-\mu)}{2|\lambda^+(\mu)|^2} \exp(-\mu^2) \times \left[ \exp\left(-\frac{d+x}{\mu}\right) - \exp\left(-\frac{d-x}{\mu}\right) \right].$$

В гидродинамическом приближении профиль массово-скорости описывается выражением

$$q_z(x) = \frac{U}{d} x, \quad x \in [-d; d]. \quad (25)$$

Проинтегрировав (24) по  $x$  от нуля до  $d$ , находим безразмерный поток массы газа через верхнюю половину канала

$$U_z = \frac{1}{2d^2} \int_0^d q_z(x) dx = \frac{U}{2d^2(d - Q_1)} \times \left[ \left( 1 + \frac{1}{d - Q_1} \sum_{k=0}^{+\infty} I_k \right) \frac{d^2}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} K_k \right]. \quad (26)$$

$$K_0 = \pi^{-1/2} \int_0^{+\infty} \xi(\mu) d\mu,$$

$$K_1 = \pi^{-1} \int_0^{+\infty} \xi(\mu) d\mu \int_0^{+\infty} g(\eta) \left[ 1 + \frac{d - Q_1}{\eta + \mu} \right] d\eta,$$

$$K_2 = \pi^{-3/2} \int_0^{+\infty} \xi(\mu) d\mu \int_0^{+\infty} g(\eta) \left[ 1 + \frac{d - Q_1}{\eta + \mu} \right] d\eta$$

$$\times \int_0^{+\infty} g(\tau) \left[ 1 + \frac{d - Q_1}{\tau + \eta} \right] d\tau,$$

$$\xi(\mu) = -\frac{\mu X(-\mu)}{2|\lambda^+(\mu)|^2} \exp(-\mu^2) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{d}{\mu}\right) \right]^2.$$

**Таблица 1.** Значения интеграла  $I_k$  для канала толщиной  $D$

$D$	$I_k$				
	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
0.01	0.1180215	0.021992	0.004191	0.000801	0.000153
0.1	0.1026883	0.015603	0.002409	0.000372	0.000057
1.0	0.0401992	0.001690	0.000071		
10.0	0.0002205				

**Таблица 2.** Значения интеграла  $K_k$  для канала толщиной  $D$

$D$	$I_k$			
	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
0.01	0.000031	0.000010	0.000002	
0.1	0.001840	0.000357	0.000056	0.000009
1.0	0.045241	0.002190	0.000092	0.000004
10.0	0.217406	0.000023		

Аналогичным образом находим выражение для компоненты тензора вязких напряжений  $p_{xz}$

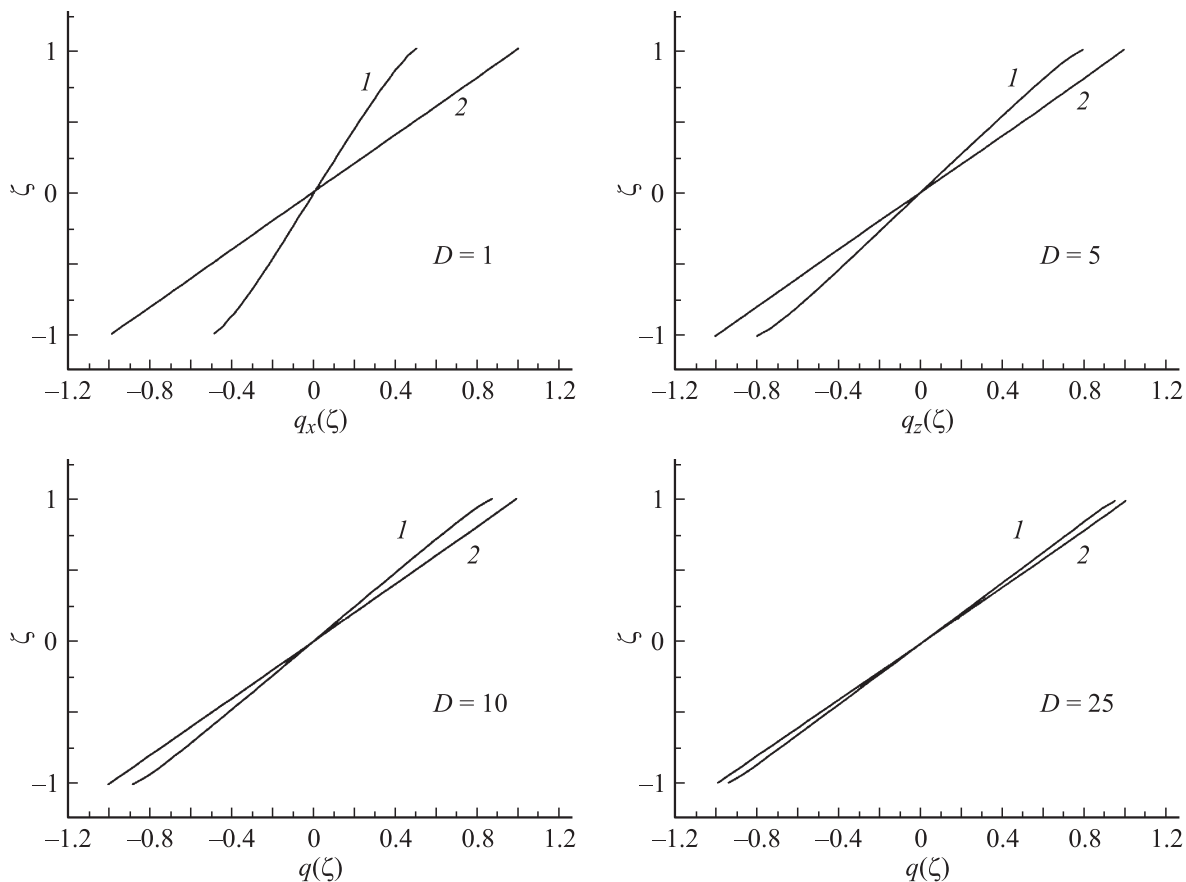
$$p_{xz} = \pi^{-3/2} \int \exp(-C^2) C_x C_z^2 Z(x, C_x) d^3 C = -\frac{U}{2(d - Q_1)} \left[ 1 + \frac{1}{d - Q_1} \sum_{k=0}^{+\infty} I_k \right]. \quad (27)$$

Значения интегралов  $I_k$  и  $K_k$ , входящих в (26) и (27), вычислены с использованием пакета прикладных программ Maple 9.5 путем интерполяции подынтегральных функций линейными сплайнами. Учитывая то, что подынтегральные выражения содержат множитель  $\exp(-\mu^2)$ , интегралы  $I_k$  и  $K_k$  достаточно быстро сходятся и вместо бесконечного верхнего предела интегрирования принималось значение, равное 5. При этом для достижения точности  $10^{-6}$ , согласно правилу Рунге, отрезок  $[0; 5]$  делился на  $10^3$  частей.

Значения  $I_k$  и  $K_k$  для каналов различной толщины приведены в табл. 1 и 2. Как следует из приведенных таблиц, сходимость рядов, входящих в (26) и (27), существенным образом зависит от толщины канала. Так, при вычислении  $U_z$  для канала толщиной  $D = 0.1$  для достижения точности  $10^{-6}$  необходимо учитывать пять членов ряда, а для  $D = 10.0$  — только два. Для каналов большей толщины достаточно ограничиться только одним (нулевым) членом ряда.

**Таблица 3.** Зависимость потока газа  $U_z$  через верхнюю половину канала от его толщины

$D$	$U_z$			
	BGK (26)	BGK [4]	CES [4]	LBE [5]
0.01	1.29019	1.29070	1.53426	
0.1	6.85673(-1)	6.85780(-1)	7.41991(-1)	7.2929(-1)
1.00	2.32145(-1)	2.32188(-1)	2.26777(-1)	2.2737(-1)
10.0	4.22789(-2)	4.22811(-2)	4.21424(-2)	4.2192(-2)



Графики зависимости  $q_z(\xi)$  для различных значений  $D$ : 1 — рассчитанные по формуле (24), 2 — по формуле (25).

Значения  $U_z$  и  $p_{xz}$ , рассчитанные для различных  $D$  на основании (26) и (27) и полученные в [3], приведены в табл. 3 и 4. Как следует из таблиц, результаты представленной работы с высокой степенью точности совпадают с аналогичными результатами [3], полученными численными методами. Различие не превышает 0.05% для всего диапазона приведенных значений величин.

Графики профиля массовой скорости, построенные согласно (24), приведены на рисунке. Из приведенных графиков видно, что для широких каналов, в частности, для  $D = 25$ , построенное в представленной работе решение вдали от стенок канала переходит в решение, вытекающее из разложения Чепмена–Энскога (линей-

ный профиль массовой скорости), а кинетический слой играет существенную роль только вблизи стенок канала. По мере уменьшения толщины канала кинетический слой увеличивается и для тонких каналов, в частности, для  $D = 0.1$ , полностью заполняет все его сечение.

### Заключение

В виде ряда Неймана построено аналитическое решение БГК-модели кинетического уравнения Больцмана в задаче о течении Куэтта. Для случая диффузного отражения молекул газа стенками канала вычислен поток массы газа через половину толщины канала и отличная от нуля величина компонента тензора вязких напряжений. Проведен численный анализ полученных выражений. Показано, что полученные в работе результаты с высокой степенью точности совпадают с аналогичными результатами, полученными использованием численных методов.

### Список литературы

[1] Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 528 с.  
 [2] Шарипов Ф.М., Селезнев В.Д. Движение разреженных газов в каналах и микроканалах. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2008. 230 с.

**Таблица 4.** Зависимость компоненты тензора вязких напряжений  $-p_{xz}$  от толщины канала

$D$	$-p_{xz}$			
	BGK (27)	BGK [4]	CES [4]	LBE [5]
1.0(-7)	5.64096(-1)	5.64190(-1)	5.64190(-1)	5.64190(-1)
1.0(-3)	5.63599(-1)	5.63692(-1)	5.63636(-1)	5.63647(-1)
1.0(-1)	5.22257(-1)	5.22325(-1)	5.20156(-1)	5.20868(-1)
1.0	3.38916(-1)	3.38925(-1)	3.39977(-1)	3.40502(-1)
1.0(1)	8.31122(-2)	8.31122(-2)	8.35227(-2)	8.35098(-2)
1.0(3)	9.97972(-4)	9.97972(-4)	9.98031(-4)	9.98029(-4)
1.0(7)	1.00000(-7)	1.00000(-7)	1.00000(-7)	1.00000(-7)

- [3] *Sievert C.E.* // Europ. J. of Mechanics B. Fluids. 2002. Vol. 21. P. 579.
- [4] *Sievert C.E.* // Zeitschrift fur Angewandte Mathematic und Physik. 2003. Bd 54. S. 273.
- [5] *Sievert C.E., Valougeorgis D.* // Europ. J. of Mechanics B. Fluids. 2004. Vol. 23. P. 645.
- [6] *Garcia R.D.M., Sievert C.E.* // SIAM J. of Appl. Mathematics. 2007. Vol. 67. P. 1041.
- [7] *Garcia R.D.M., Sievert C.E.* // Europ. J. of Mechanics B. Fluids. 2009. Vol. 28. P. 387.
- [8] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Аналитические решения граничных задач для кинетических уравнений. М.: МГОУ, 2004. 286 с.
- [9] *Латышев А.В., Попов В.Н., Юшканов А.А.* Неоднородные кинетические задачи. Метод сингулярных интегральных уравнений, Архангельск: Поморский университет, 2004. 266 с.
- [10] *Черчиньяни К.* Математические методы в кинетической теории газов. М.: Мир, 1973. 245 с.
- [11] *Loyalka S.K.* // Transport theory and statistical physics. 1975. Vol. 4. P. 55.