

Закритическая динамика доменных стенок в магнитных пленках с плоскостной анизотропией

© Л.Г. Корзунин¹, Б.Н. Филиппов^{1,2}, В.В. Зверев²

¹ Институт физики металлов УрО РАН,
Екатеринбург, Россия

² Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина,
Екатеринбург, Россия

E-mail: filbor@imp.uran.ru

(Поступила в Редакцию 10 февраля 2015 г.)

На основе численного решения уравнений Ландау и Лифшица исследовано нелинейное динамическое поведение вихреподобных доменных стенок в пленках с плоскостной анизотропией в области внешних магнитных полей H , значительно превышающих критические поля H_c , выше которых стационарное движение стенок сменяется нестационарным (периодическим или непериодическим). Предложен способ обнаружения сложной непериодической динамики структурных перестроек доменных стенок, основанный на построении диаграмм зависимостей угла наклона намагниченности \mathbf{M} к плоскости стенки в одних ее точках от соответствующего угла в других точках. Установлено, что эти диаграммы существенно изменяются при изменении величины внешнего магнитного поля, приложенного вдоль оси легкого намагничивания, в области значений $H > H_c$. Показано, что картина этих изменений сходна со сценарием Фейгенбаума перехода к динамическому хаосу.

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме „Магнит“ № 01201463328 при частичной финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ на основе госзадания в соответствии с проектом № 2705.

1. Введение

Состояние ферромагнетика с многодоменной структурой, помещенного во внешнее магнитное поле \mathbf{H} , становится неравновесным, поскольку такие процессы, как изменение ориентации намагниченности у существующих доменов и рост доменов, намагниченных вдоль \mathbf{H} , за счет доменов с противоположной ориентацией намагниченности, ведут к уменьшению полной энергии. Динамические процессы в магнитной подсистеме образца, сопровождающие стремление к равновесию, в значительной мере определяются тем, каковы законы движения доменных стенок (ДС), отделяющих домены друг от друга. В работе [1] была рассмотрена динамика плоской одномерной 180° ДС в магнитно-одноосной неограниченной среде, инициированная приложением постоянного магнитного поля \mathbf{H} в направлении оси легкого намагничивания. Простота модели позволила свести решение задачи к интегрированию системы двух дифференциальных уравнений и показать, что если при $H < H_c$, где H_c — некоторое критическое значение поля, происходит дрейф ДС с постоянной скоростью, то при $H > H_c$ динамика усложняется и на фоне дрейфа возникают периодические осцилляции. Численное моделирование движения ДС в более реалистичных моделях, отвечающих образцам конечного размера (в частности, тонким пленкам и нанополоскам) позволяет убедиться в том, что возникновение осцилляций в закритической области $H > H_c$ является типичным явлением [2–8].

Движущаяся ДС является динамической системой, в которой постоянный приток энергии, связанный с ростом размера домена, намагниченного вдоль поля, компенсируется потерями энергии, обусловленными различными релаксационными механизмами. В современной физике неравновесных процессов такие системы выделяются в особый класс открытых (поточковых) диссипативных систем [9]. Их динамическое поведение может быть достаточно сложным и часто подчиняется универсальным сценариям, которые одинаковы для процессов, имеющих различную физическую природу. Далее мы покажем, что при движении ДС в больших полях \mathbf{H} наблюдаются характерные признаки реализации известного сценария хаотизации динамики в результате серии удвоений периода колебаний.

Сложная динамика и хаос в ферромагнетике широко обсуждались применительно к системам, в которых однородная прецессия намагниченности в условиях ферромагнитного резонанса приводит к генерации неоднородных мод (турбулентность спиновых волн [10,11]). Различные типы нерегулярного поведения (включая усиление шума, удвоения периода колебаний и хаос) наблюдались для таких систем экспериментально (например, при спин-волновой накачке в феррит-гранате иттрия [12,13]) и моделировались с помощью конечномерных систем дифференциальных уравнений для амплитуд спин-волновых мод [10–14] и отображений [14].

В системе с n динамическими переменными хаотизация движения возможна при $n \geq 3$, если внешние воздействия не зависят от времени (движение авто-

номно); для неавтономных систем условие ослабляется до $n \geq 2$ [15,16]. Таким образом, уже в одномерной модели ДС, рассмотренной в [1], возможен переход стационарных периодических колебаний в хаотические с ростом H . Двумерные ДС также являются распределенными системами и для своего описания требуют бесконечного числа динамических переменных (в случае моделирования сеточными методами число переменных конечно и определяется числом узлов). В обоих случаях сложные режимы движения могут быть следствием того, что колебания ДС как единого целого дополняются ее внутренней динамикой. Описать эту динамику с помощью простых конечномерных моделей обычно не удается, так что единственным источником сведений о динамике являются результаты численного моделирования интегро-дифференциальных уравнений Ландау–Лифшица–Гильберта (ЛЛГ) [17,18]. Отметим ряд работ [19–23], в которых наблюдалась сложная динамика доменных структур, интерпретированная авторами как динамический хаос.

Желая выяснить качественные особенности динамики (типы бифуркаций, аттракторов и т.д.), мы сталкиваемся с необходимостью реконструировать фазовое пространство. Универсальный метод Паккарда–Такенса–Мане [24–26] требует большого объема данных для каждого динамического режима и потому непригоден для выполнения общего обзора качественных особенностей динамики. В работах [19,20] в качестве динамических переменных выбирались скорость ДС и усредненные по толщине стенки углы, характеризующие направление вектора намагниченности. Такой выбор нельзя признать удовлетворительным, т.к. усредненные величины не являются динамическими переменными. В настоящей работе предложен альтернативный метод, в котором анализируется связь между ориентациями намагниченности в различных точках в системе координат, движущейся вместе с ДС. Нам кажется, что такой подход способен отразить особенности внутренней динамики ДС наилучшим образом.

2. Постановка задачи и численная схема

Пусть магнитно-одноосная пленка толщиной b с граничной поверхностью, лежащей в плоскости xz прямоугольной декартовой системы координат, обладает осью легкого намагничивания, ориентированной вдоль оси z (плоскостная анизотропия). Будем считать, что магнитное состояние пленки характеризуется наличием двух доменов, намагниченность которых лежит в плоскости пленки и равна $\mathbf{M} = (0, 0, M_s)$ при $x > a/2$ и $\mathbf{M} = (0, 0, -M_s)$ при $x < -a/2$; здесь M_s — намагниченность насыщения. Полагаем, что намагниченность не зависит от z и описывается функцией $\mathbf{M} = \mathbf{M}(x, y)$,

определенной в области

$$D = \left(-\frac{1}{2}a < x < \frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}b < y < \frac{1}{2}b \right).$$

Исследование нелинейной динамики доменной стенки будем проводить на основе численного решения уравнения ЛЛГ, записанного в виде

$$(1 + \alpha^2) \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \tau} = -[\mathbf{m}, \mathbf{h}_{\text{eff}}] - \alpha [\mathbf{m}, [\mathbf{m}, \mathbf{h}_{\text{eff}}]], \quad (1)$$

где $\tau = \gamma M_s t$, γ — гиромагнитное отношение; $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_s$ — безразмерная намагниченность, $|\mathbf{m}| = 1$; α — параметр затухания Гильберта. Эффективное поле

$$\mathbf{h}_{\text{eff}} = \mathbf{h} + \mathbf{h}_e + \mathbf{h}^{(m)} + \mathbf{h}_a \quad (2)$$

является суммой безразмерных внешнего \mathbf{h} , обменного \mathbf{h}_e и магнитостатического $\mathbf{h}^{(m)}$ полей, а также поля анизотропии \mathbf{h}_a . Эти поля определены соотношениями

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{H}}{M_s}, \quad \mathbf{h}_e = \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial \eta^2},$$

$$\mathbf{h}^{(m)} = \frac{\mathbf{H}^{(m)}}{M_s}, \quad \mathbf{h}_a = \frac{2K}{M_s} (\mathbf{m}\mathbf{c}),$$

где K — константа одноосной анизотропии; \mathbf{c} — единичный вектор вдоль оси анизотропии; $\xi = x/b_0$ и $\eta = y/b_0$ — безразмерные координаты, причем $b_0 = \sqrt{A/M_s^2}$, A — параметр обменного взаимодействия. Напряженность поля $\mathbf{H}^{(m)}$ определяется из уравнений магнитостатики при соответствующих граничных условиях.

Уравнение (1) решается численно с учетом граничных условий [2–4]:

$$\left[\mathbf{m}, \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial y} \right] \Big|_{y=\pm b/2} = 0, \quad (3)$$

$$\mathbf{m} \Big|_{x=\pm a/2} = (0, 0, \pm 1). \quad (4)$$

Расчетная область D разбивается на одинаковые прямоугольные ячейки. При выполнении двумерного моделирования предполагается, что на каждую такую ячейку опирается бесконечный параллелепипед, вытянутый вдоль оси z . Во всех точках такого параллелепипеда вектор \mathbf{m} имеет одинаковые значения, так что данные о намагниченности представляют собой двумерный векторный массив $\mathbf{m}_{kl} = (m_{x\ kl}, m_{y\ kl}, m_{z\ kl})$, элементы которого являются значениями намагниченности в узлах с координатами x_k, y_l , $k = 1, \dots, N_x$, $l = 1, \dots, N_y$. Для численного решения уравнения (1) применяется модифицированный метод Эйлера, использующий схему предиктор–корректор [27]. В начальный момент времени выбирается распределение намагниченности, полученное путем численной минимизации функционала энергии ДС. На первом этапе итерации по времени

(предиктор) рассчитывается величина $\mathbf{m}_{n+1}^* \equiv \mathbf{m}^*(\tau_{n+1})$ согласно формуле

$$\mathbf{m}_{n+1}^* = \mathbf{m}_n + \Delta\tau \mathbf{f}(\tau_n, \mathbf{m}_n), \quad (5)$$

где

$$\mathbf{f}(\tau_n, \mathbf{m}_n) = -\frac{1}{1 + \alpha^2} ([\mathbf{m}_n, \mathbf{h}_{\text{eff}}] + \alpha [\mathbf{m}_n, [\mathbf{m}_n, \mathbf{h}_{\text{eff}}]]).$$

На втором этапе итерации по времени (корректор) для окончательного определения \mathbf{m}_{n+1} применяется процедура

$$\mathbf{m}_{n+1} = \mathbf{m}_n + \Delta\tau \mathbf{f}(\tau_n, \mathbf{m}_{n+1}^*). \quad (6)$$

Шаг по времени $\Delta\tau$ является переменным и выбирается таким образом, чтобы угол поворота намагниченности в каждой ячейке не превышал на одном шаге некоторого малого порогового значения. Устойчивость численной схемы проверялась путем добавления случайных возмущений в различные моменты времени. Для исключения выхода ДС на границу расчетной области предусмотрена процедура сдвига массива данных на сетке, компенсирующего движение ДС. Обсуждаемые ниже результаты расчетов получены при следующих значениях параметров: $A = 1 \cdot 10^{-6}$ erg/cm, $K = 10^3$ erg/cm³, $M_s = 800$ G, $b = 50$ nm, характерных для пермаллоевых пленок. Кроме того, был выбран параметр затухания $\alpha = 0.1$ и следующие параметры расчетной области: $a/b = 3$, $N_x = 30$, $N_y = 10$.

При численном моделировании отслеживалось перемещение средней линии движущейся ДС. Обычно эту линию определяют условием $m_z = 0$ (соответственно квадратичная комбинация поперечных компонент на ней максимальна: $m_x^2 + m_y^2 = 1$). Известно, что для блоховской и неелевской ДС центральная линия является прямой $x = \text{const}$; в случае же вихреподобных стенок средняя линия изогнута и может быть описана уравнением: $x = x_0(y)$. Для нахождения положения ДС можно использовать значение этой функции при любом фиксированном значении y . Однако для того, чтобы процедура определения позиции ДС на сетке работала достаточно надежно, удобно находить x -координату центра стенки иначе, используя следующее выражение:

$$X_c = \frac{\sum_{kl} x_k (m_{x,kl}^4 + m_{y,kl}^4)}{\sum_{kl} (m_{x,kl}^4 + m_{y,kl}^4)}. \quad (7)$$

Величина X_c будет иметь смысл x -координаты „центра тяжести“ расчетной области, если принять за вес узла комбинацию $m_{x,kl}^4 + m_{y,kl}^4$, являющуюся мерой отклонения намагниченности от положения вдоль оси z . Численные эксперименты показали, что при использовании в качестве веса узла комбинации $m_{x,kl}^2 + m_{y,kl}^2$, используемой некоторыми авторами, устойчивость вычислительного алгоритма ухудшается. Отметим, что „центр тяжести“ X_c не обязан лежать на средней линии.

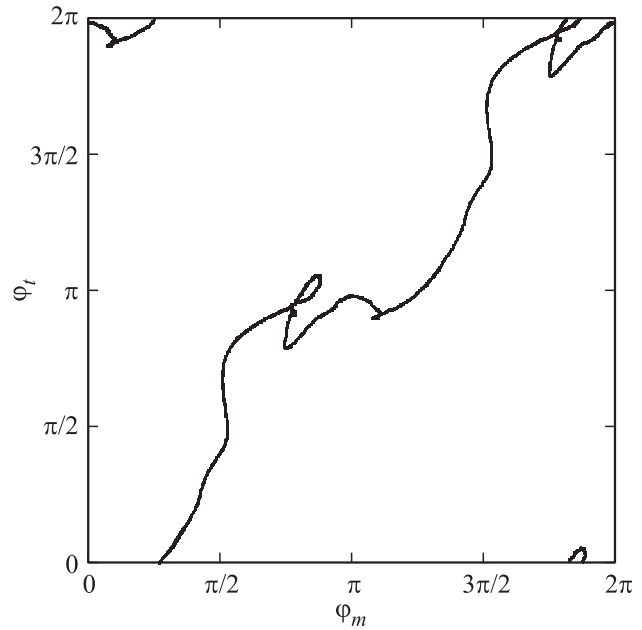


Рис. 1. Фазовая траектория с „усиленной“ периодичностью на фазовой плоскости (φ_m, φ_t) с размерами $2\pi \times 2\pi$ для случая внешнего магнитного поля $H = 300.0$ Ое.

Находя значение X_c на каждой итерации по времени, мы получаем данные о траектории ДС и можем найти конечно-разностную скорость

$$V_c(\tau_{n+1}) = (X_c(\tau_{n+1}) - X_c(\tau_n)) / (\tau_{n+1} - \tau_n). \quad (8)$$

Одним из возможных способов визуализации движения стенки является построение „фазовой траектории“ в виде последовательности точек с координатами $(X_c(\tau_c), V_c(\tau_c))$. Однако координата „центра тяжести“ X_c , найденная с помощью (7), является взвешенным средним по толщине пленки и потому не может считаться динамической переменной; то же можно сказать и о скорости V_c .

В настоящей работе предлагается подход, основанный на сравнении значений намагниченности в различных точках, лежащих на средней линии. Определим угол наклона намагниченности φ как функцию координат выражением

$$\text{tg } \varphi(x, y) = m_y(x, y) / m_x(x, y), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

и будем искать ее значения в верхней, средней и нижней точках средней линии

$$\varphi_t = \varphi(x_0(b/2), b/2), \quad \varphi_m = \varphi(x_0(0), 0),$$

$$\varphi_b = \varphi(x_0(-b/2), -b/2).$$

Поскольку вид функции средней линии $x = x_0(y)$ зависит от времени, определенные выше углы также являются функциями времени. Графики этих функций позволяют увидеть некоторые особенности движения

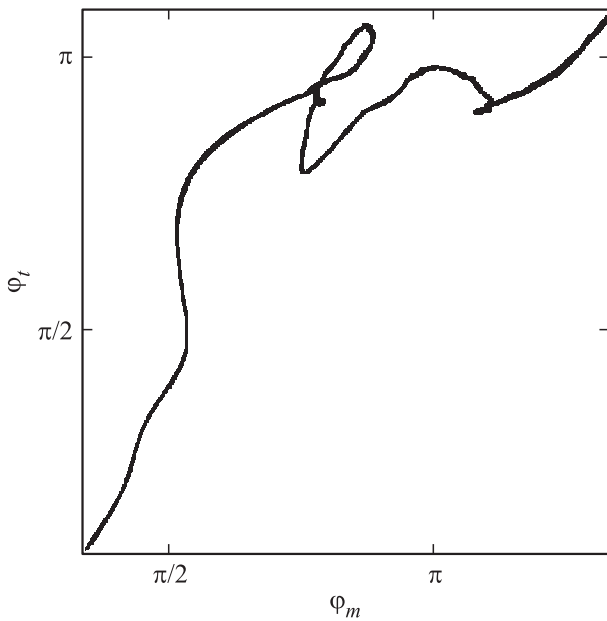


Рис. 2. Фазовая траектория на модифицированной фазовой плоскости (φ_m, φ_t) с размерами $\pi \times \pi$ для случая внешнего магнитного поля $H = 300.0$ Ое.

ДС. Однако если периодичность движения ДС нарушена, они малоинформативны.

Известно, что анализ повторяемости структур является трудоемкой задачей. В частности, при наличии двух близких периодов (неизвестных априори), выявить этот факт достаточно сложно.

Предлагаемый нами метод визуализации внутренней динамики ДС, обладающий большей наглядностью и позволяющий существенно облегчить качественный ана-

лиз особенностей поведения ДС, состоит в построении траекторий на фазовых плоскостях (φ_m, φ_t) и (φ_m, φ_b) . Изображая каждую из фазовых плоскостей в виде квадрата $2\pi \times 2\pi$, условимся откладывать φ_m по горизонтали, а φ_t или φ_b — по вертикали, помещая начало отсчета в левый нижний угол. Выполняя итерации, будем строить семейства точек $(\varphi_m(\tau_n), \varphi_t(\tau_n))$ (фазовые диаграммы). Периодическая повторяемость фазовой траектории будет свидетельствовать о периодичности движения ДС; отсутствие такой повторяемости будет свидетельствовать об усложнении режима движения. Возможный вид периодической фазовой траектории показан на рис. 1.

Таким образом, описанная конструкция позволяет „расцепить“ задачи выяснения факта периодичности и вычисления периода. Периодичность, если она есть, выясняется „автоматически“. Величину же периода при необходимости можно вычислить из других построений, например, из графиков компонент энергии.

Область фазовой диаграммы удобно рассматривать как поверхность тора, считая совпадающими границы $\varphi_m = 0$ и $\varphi_m = 2\pi$, а также $\varphi_t = 0$ и $\varphi_t = 2\pi$. Кривая, изображенная на рис. 1, на поверхности такого тора является замкнутой. За один период колебания стенки точка пробегает по замкнутому контуру один раз. Отметим, что данная траектория при сдвиге на π по каждой из осей совпадет сама с собой. Этот эффект можно назвать „усиленной“ периодичностью: если решение имеет период P , то скорость V_c имеет период $P/2$, а для углов выполняется соотношение $\varphi(\tau + P/2) = \varphi(\tau) + \pi$. Физически это соответствует одинаковому поведению стенок с противоположной ориентацией магнитного момента.

Имеет смысл модифицировать фазовую плоскость следующим образом: взять квадрат со стороной π (вме-

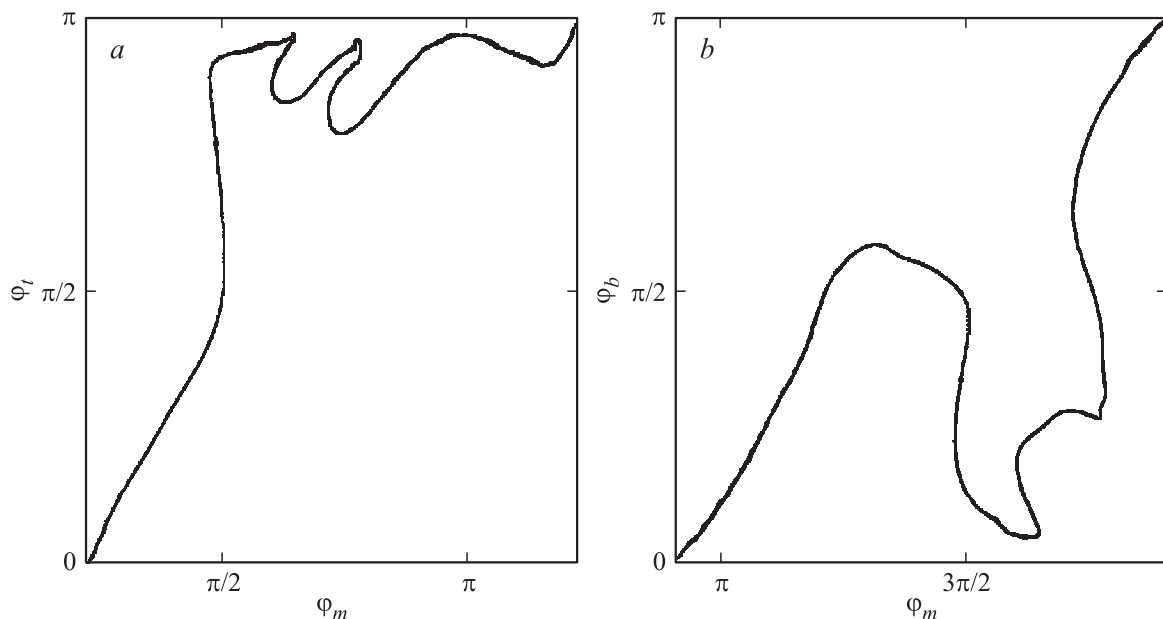


Рис. 3. Фазовые диаграммы (φ_m, φ_t) (a) и (φ_m, φ_b) (b), соответствующие внешнему полю $H = 265.1$ Ое. Периодические колебания.

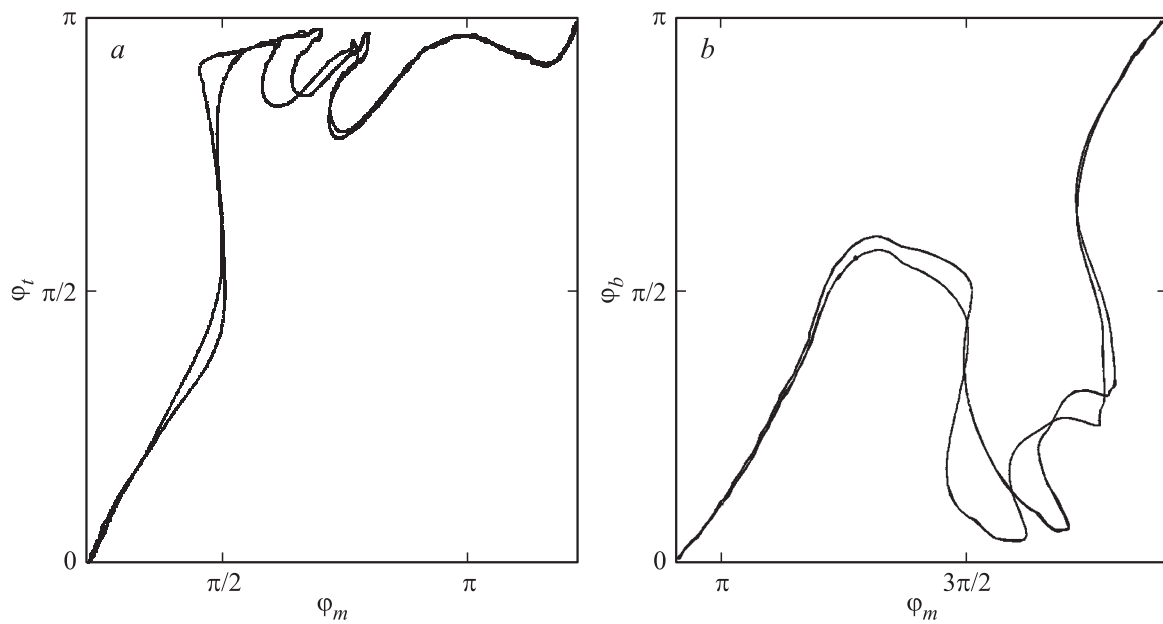


Рис. 4. Фазовые диаграммы (φ_m, φ_t) (a) и (φ_m, φ_b) (b), соответствующие внешнему полю $H = 267.0$ Ое. Колебания с удвоенным периодом.

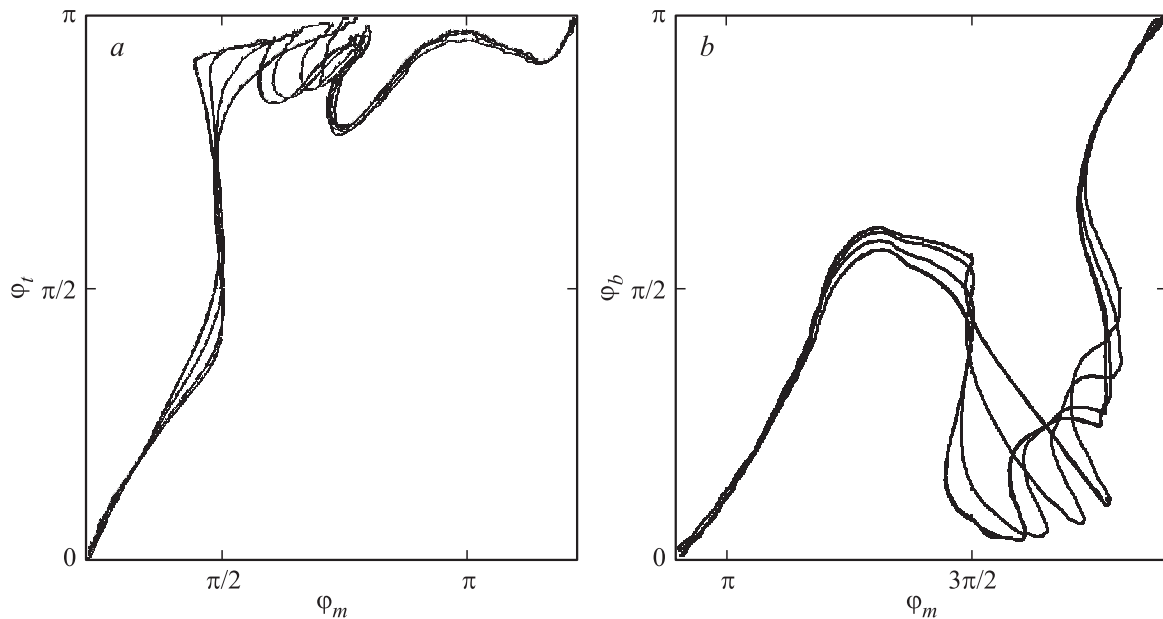


Рис. 5. Фазовые диаграммы (φ_m, φ_t) (a) и (φ_m, φ_b) (b), соответствующие внешнему полю $H = 268.7$ Ое. Колебания с учетверенным периодом.

сто 2π) и откладывать по каждой из осей сам угол φ при $0 \leq \varphi < \pi$, но $\varphi - \pi$ при $\pi \leq \varphi < 2\pi$ (рис. 2). Такая модификация помогает, в частности, выявить эффект удвоения периода как переход от „усиленной“ периодичности к „простой“ периодичности. Другая полезная модификация, упрощающая визуальное восприятие — сдвиг начала координат, в результате которого траектория будет проходить через углы квадрата, т.е. точки $(0, 0)$ и (π, π) . Для этого нужно подобрать величины a_m и a_t таким образом, чтобы в определенный момент времени

выполнялись равенства $\varphi_m - a_m = 0$, $\varphi_t - a_t = 0$ (будем называть величины a_m, a_t начальной фазой траектории). Далее везде приведены именно модифицированные диаграммы.

3. Результаты и их обсуждение

Нами проводилось моделирование движения ДС при различных сочетаниях значений параметров, каждый из которых изменялся в достаточно широком диапазоне

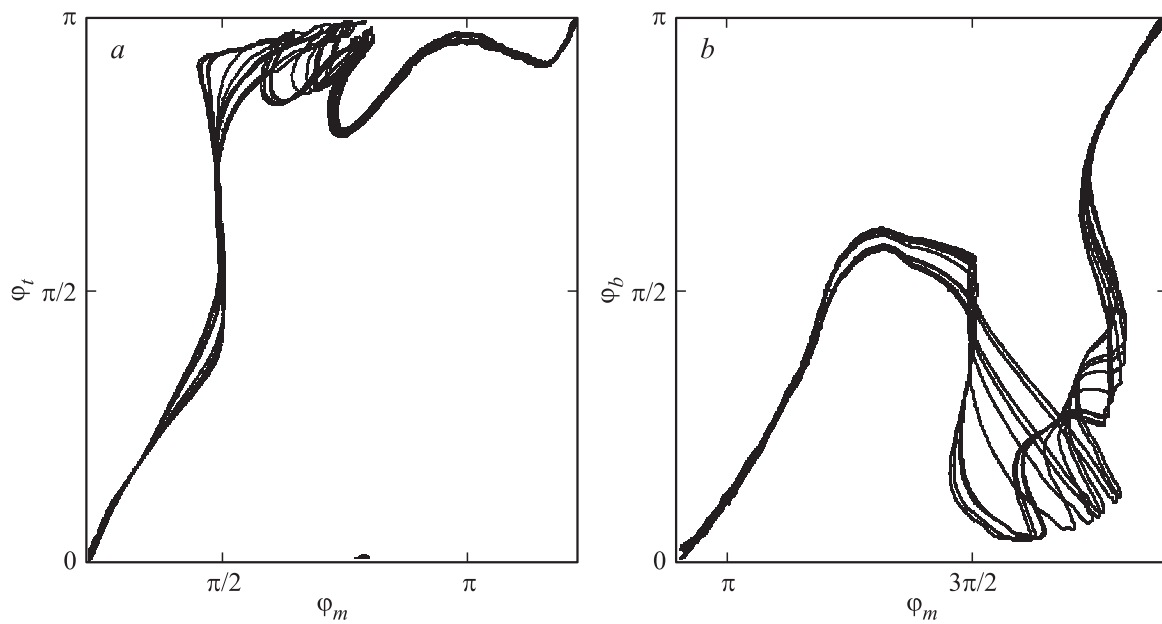


Рис. 6. Фазовые диаграммы (φ_m, φ_1) (a) и (φ_m, φ_b) (b), соответствующие внешнему полю $H = 269.0$ Oe. Хаотическая динамика первого типа.

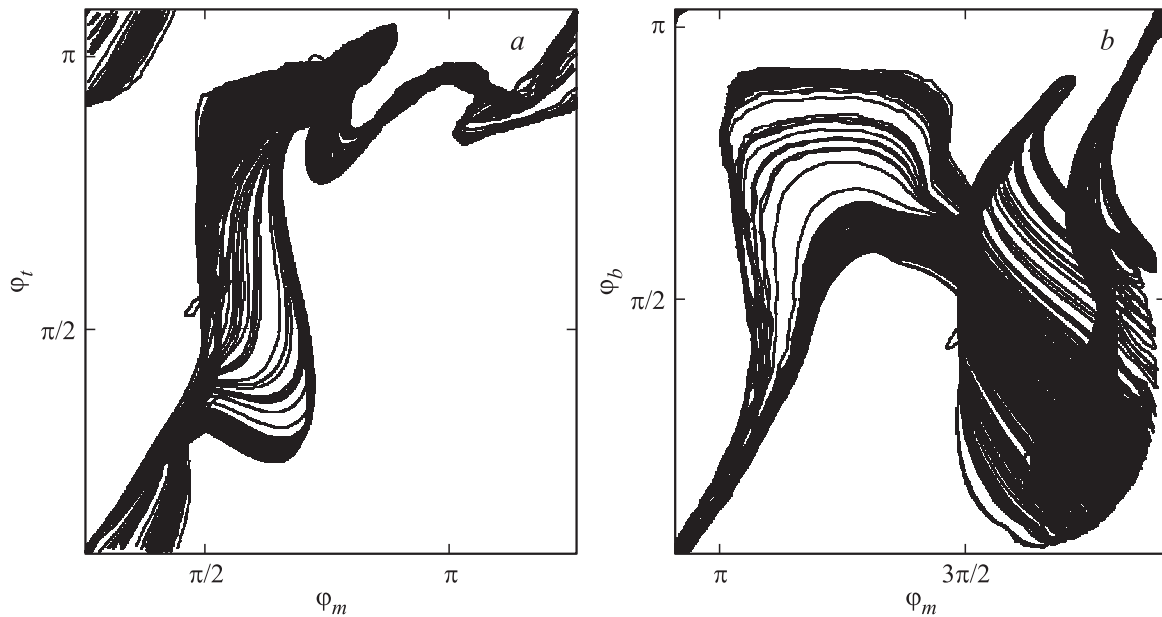


Рис. 7. Фазовые диаграммы (φ_m, φ_1) (a) и (φ_m, φ_b) (b), соответствующие внешнему полю $H = 269.2$ Oe. Хаотическая динамика второго типа.

($\alpha = 0.01-0.1$, $b = 50-200$ nm, $K = 10^3-10^4$ erg/cm³, $M_s = 800-1000$ G). Характерная особенность динамического поведения ДС состоит в том, что существуют области значений параметров, в пределах которых наблюдаются серии бифуркаций, связанных с переходами между различными типами сложной динамики. Вне этих областей движение является периодическим, но конфигурации замкнутых фазовых траекторий могут при этом различаться довольно существенным образом. В данном сообщении мы ограничимся тем, что приведем

и прокомментируем наиболее характерные диаграммы для вихреподобных стенок при значениях параметров, приведенных в предыдущем разделе. Для магнитной пленки с такими параметрами критическое поле H_c равно примерно 123 Oe.

Если $H > H_c$, но пороговое значение поля превышено незначительно (область малой закритичности), ДС движется периодически. Периодический характер движения имеет место вплоть до значений полей, более чем вдвое превышающих критическое (рис. 3). При даль-

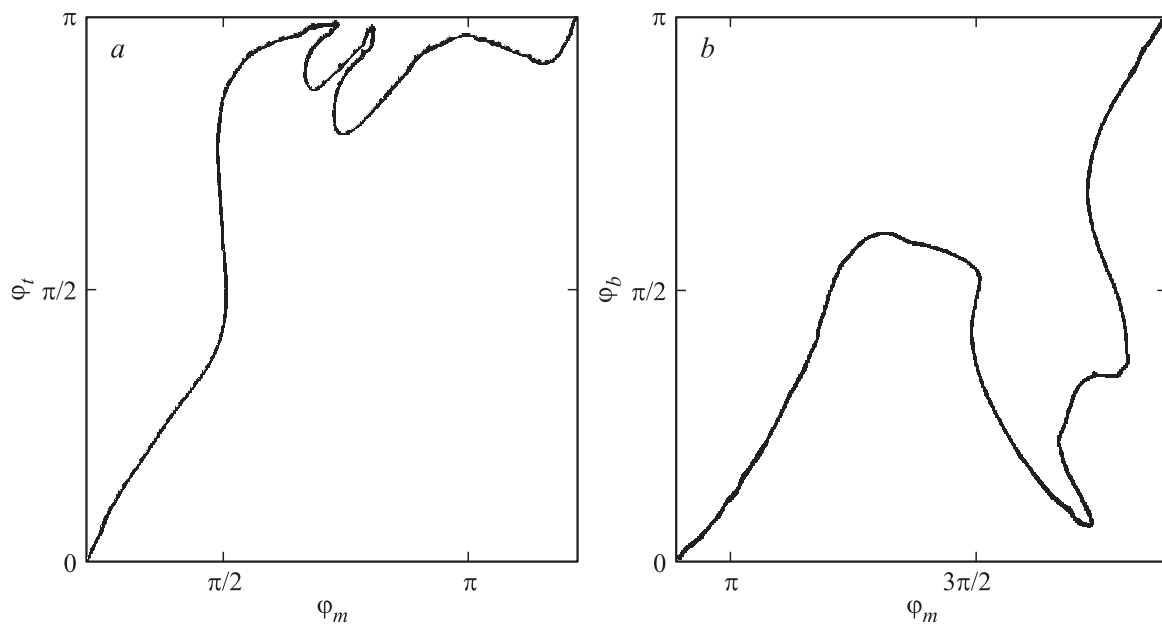


Рис. 8. Фазовые диаграммы (φ_m, φ_t) (a) и (φ_m, φ_b) (b), соответствующие внешнему полю $H = 273.2$ Ое. Периодические колебания (форма траектории отличается от приведенной на рис. 3).

нейшем увеличении H наблюдается удвоение (рис. 4) и учетверение (рис. 5) периода осцилляций; далее, по-видимому, возникает режим динамического хаоса (рис. 6). Конфигурация траекторий хаотического движения оказывается чувствительной к дальнейшему росту поля: его изменение от $H = 269.0$ Ое до $H = 269.3$ Ое существенно меняет картину движения (рис. 6 и 7). Наконец, при $H = 272.9$ Ое вновь имеет место простое периодическое движение (рис. 8), но форма траектории заметно отличается от изображенной на рис. 3.

Интересно отметить, что изменения фазовых траекторий, представленные на рис. 3–8, в основном повторяются при небольшом превышении значения поля $H = 272.9$ Ое. При дальнейшем повышении поля локальные участки нарушения периодичности повторяются многократно.

4. Заключение

В работе предложен метод качественного анализа внутренней динамики ДС, основанный на использовании углов наклона намагниченности в различных точках ДС в качестве динамических переменных. Привязка позиций этих точек к средней линии ДС позволила ослабить влияние глобальной динамики ДС и выявить динамические эффекты, связанные с перестройками структуры ДС. Используемый в работе метод визуализации картины движения, основанный на введении вспомогательной фазовой плоскости, позволил обнаружить множество типов внутренней динамики ДС. В частности, обнаружено, что в окрестности некоторых значений внешнего магнитного поля наблюдается сценарий Фейгенбаума [15,16] перехо-

да к хаосу через последовательность удвоений периода. Наличие самопересечений траекторий на фазовой плоскости свидетельствует о том, что эти траектории являются проекциями траекторий без самопересечений, лежащих в фазовых пространствах больших размерностей.

Список литературы

- [1] N.L. Schryer, L.R. Walker. *J. Appl. Phys.* **45**, 5406 (1974).
- [2] S.W. Yuan, H.N. Bertram. *Phys. Rev. B* **44**, 12 395 (1991).
- [3] B.N. Filippov, L.G. Korzunin, F.A. Kassin-Ogly. *Phys. Rev. B* **64**, 104 412 (2001).
- [4] Б.Н. Филиппов, Л.Г. Корзунин. *ЖЭТФ* **121**, 372 (2002).
- [5] B.N. Filippov, L.G. Korzunin, F.A. Kassin-Ogly. *Phys. Rev. B* **70**, 174 411 (2004).
- [6] B.N. Filippov, F.A. Kassin-Ogly. *Physica D* **237**, 1151 (2008).
- [7] B.N. Filippov, L.G. Korzunin, F.A. Kassin-Ogly. *Solid State Commun.* **121**, 55 (2002).
- [8] С.Г. Осипов, Б.Н. Филиппов, М.М. Хапаев. *ЖЭТФ* **98**, 1354 (1990).
- [9] Ю.Л. Климонтович. *Турбулентное движение и структура хаоса*. Наука. М. (1990). 320 с.
- [10] В.Е. Захаров, В.С. Львов, С.С. Старобинец. *УФН* **114**, 609 (1974).
- [11] *Nonlinear phenomena and chaos in magnetic materials*/ Ed. P.E. Wigen. World Scientific (1994). 248 p.
- [12] А.В. Андриенко, В.И. Ожогин, В.Л. Сафонов, А.Ю. Яковлевский. *ЖЭТФ* **89**, 2164 (1985).
- [13] P.H. Bryant, C.D. Jeffries. *Phys. Rev. A* **38**, 4223 (1988).
- [14] В.В. Зверев, В.Л. Сафонов. *ФТТ* **36**, 1939 (1994).
- [15] Ю.И. Неймарк, П.С. Ланда. *Стохастические и хаотические колебания*. Наука, М. (1987). 424 с.
- [16] H.G. Schuster. *W. Just. Deterministic chaos*. Wiley-VCH (2005). 312 p.
- [17] Ф.У. Браун. *Микромагнетизм*. Мир, М. (1979). 160 с.

- [18] Т. О'Делл. Ферромагнитодинамика. Динамика ЦМД, доменов и доменных стенок. Мир, М. (1983). 256 с.
- [19] Е.Е. Котова, В.М. Четвериков. ФТТ **32**, 1269 (1990).
- [20] R.A. Kosinski, A. Sukiennitcki. Acta Fisica Polonica A **76**, 309 (1969).
- [21] Н. Okuno, Т. Homma. IEEE Tran. Mag. **29**, 2506 (1993).
- [22] М.М. Соловьёв, Б.Н. Филиппов. ФТТ **39**, 2036 (1997).
- [23] М.М. Соловьёв, Б.Н. Филиппов. ЖТФ **70**, 58 (2000).
- [24] N.H. Packard, J.P. Crutchfield, J.D. Farmer, R.S. Shaw. Phys. Rev. Lett. **45**, 712 (1980).
- [25] F. Takens. In: Dynamical systems and turbulence / Eds D.A. Rand, L.-S. Yang. Lecture notes in mathematics **898**, 366–382 (1981).
- [26] Mane R. In: Dynamical systems and turbulence / Eds D.A. Rand, L.-S. Yang. Lecture notes in mathematics **898**, 230–242 (1981).
- [27] Г.И. Марчук. Методы вычислительной математики. Наука. М. (1989). 608 с.