

Квантовые флуктуации в двумерном антиферромагнетике с четырехспиновым взаимодействием кубической симметрии

© В.В. Вальков^{1,2}, Т.А. Валькова³, А.А. Шкляев¹

¹ Институт физики им. Л.В. Киренского СО РАН, Красноярск, Россия

² Сибирский государственный аэрокосмический университет им. М.Ф. Решетнева, Красноярск, Россия

³ Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия

E-mail: www@iph.krasn.ru

(Поступила в Редакцию 5 апреля 2011 г.)

В первом порядке по $1/2S$ вычислен спектр возбуждений негейзенберговского 2D-антиферромагнетика с четырехспиновым взаимодействием кубической симметрии. Показано, что при слабой анизотропии квантовые флуктуации разрушают неелевское состояние. Построены фазовые диаграммы, определяющие области устойчивости неелевской фазы в зависимости от величины спина и параметров анизотропии.

Работа выполнена при поддержке Программы Президиума РАН „Квантовая физика конденсированных сред“, Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН № 53, а также РФФИ № 09-02-00127 и Федеральной целевой программы „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России“ на 2009–2013 гг.

1. Введение

Открытие высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП) стимулировало исследование свойств двумерных антиферромагнетиков (2D-АФМ), поскольку магнитные свойства недопированных ВТСП можно описать на основе спинового гамильтониана на квадратной решетке. Один из центральных вопросов теории связан с влиянием квантовых флуктуаций (КФ) на характеристики 2D-АФМ [1–12]. Особое внимание уделялось исследованию устойчивости фазы Нееля. Оказалось, что для изотропного 2D-АФМ со взаимодействием между ближайшими соседями влияние КФ при $T = 0$ незначительно, а разложение по параметру $(1/2S)$ оправдано даже при $S = 1/2$ [7].

Для гамильтониана кубической симметрии спиновые инварианты, описывающие парное взаимодействие, вырождаются в изотропные формы $I_{fm}(\mathbf{S}_f \mathbf{S}_m)$, а гамильтониан инвариантен по отношению к преобразованиям группы $SU(2)$. При возникновении неелевской фазы имеет место спонтанное нарушение симметрии, и в соответствии с теоремой Голдстоуна спектр возбуждений является бесщелевым ($\Delta \equiv \omega_{q=0} = 0$). При этом вопрос о ренормировке щели за счет КФ даже не возникает.

Положение становится иным, если в гамильтониане учитываются инварианты четвертого порядка, симметрия которых не выше кубической. При формировании неелевской фазы имеет место спонтанное нарушение симметрии лишь относительно дискретной группы, и щель в спектре возбуждений отлична от нуля. Тогда КФ будут приводить к ренормировке „затравочной“ щели Δ_0 , определяемой в гармоническом приближении. При этом возникнет дополнительное условие, приводящее

к смещению границы устойчивости неелевской фазы. Особый интерес представляет случай, когда при включении даже слабого анизотропного взаимодействия КФ разрушают неелевскую фазу, устойчивую с точки зрения линейной теории. Изучению этого вопроса посвящена настоящая работа.

2. Гамильтониан негейзенберговского АФМ

Влияние КФ на устойчивость неелевской фазы анизотропного негейзенберговского 2D-АФМ на квадратной решетке исследуем в рамках гамильтониана

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{ff'} I_{ff'} (\mathbf{S}_f \mathbf{S}_{f'}) - \frac{1}{2} \sum_{gg'} I_{gg'} (\mathbf{S}_g \mathbf{S}_{g'}) + \sum_{fg} J_{fg} (\mathbf{S}_f \mathbf{S}_g) + H_{ms}, \quad (1)$$

$$H_{ms} = \frac{K_1}{4S^2} \sum_{\langle fgf'g' \rangle} (S_f^x S_g^x S_{f'}^x S_{g'}^x + S_f^y S_g^y S_{f'}^y S_{g'}^y + S_f^z S_g^z S_{f'}^z S_{g'}^z) + \frac{K_2}{4S^2} \sum_{\langle fgf'g' \rangle} \{ S_f^x S_{f'}^x (S_g^y S_{g'}^y + S_g^z S_{g'}^z) + S_f^y S_{f'}^y (S_g^x S_{g'}^x + S_g^z S_{g'}^z) + S_f^z S_{f'}^z (S_g^x S_{g'}^x + S_g^y S_{g'}^y) \} + \frac{K_3}{S^2} \sum_{\langle fgf'g' \rangle} (S_f^x S_{f'}^y S_g^x S_{g'}^y + S_f^y S_{f'}^z S_g^y S_{g'}^z + S_f^z S_{f'}^x S_g^z S_{g'}^x). \quad (2)$$

В гамильтониане (1) три первых слагаемых описывают изотропное гейзенберговское обменное взаимодействие в F - и G -подрешетках, а также обменное взаимодействие между спинами из разных подрешеток. Индексы f и f' относятся к узлам F -подрешетки, тогда как g и g' нумеруют узлы G -подрешетки. Гамильтониан H_{ms} соответствует учету четырехузельного спин-спинового взаимодействия кубической симметрии, причем негейзенберговское взаимодействие определяется тремя инвариантами с константами K_1 , K_2 и K_3 . Если имеет место равенство $2K_3 = K_1 - K_2$, то четырехспиновый гамильтониан приобретает изотропную форму

$$H_{ms} = \frac{1}{4S^2} \sum_{(fgf'g')} \{ (K_1 - K_2)(\mathbf{S}_f \mathbf{S}_g)(\mathbf{S}_{f'} \mathbf{S}_{g'}) + K_2(\mathbf{S}_f \mathbf{S}_{f'})(\mathbf{S}_g \mathbf{S}_{g'}) \}. \quad (3)$$

Суммирование по индексам узлов в негейзенберговской части H проводится таким образом, чтобы четыре взаимодействующих между собой спина были расположены в узлах решетки, образующих наименьший элементарный квадратный плакет. Описанное ограничение для индексов f, g, f', g' в H_{ms} формально обозначено через угловые скобки. Множитель $1/S^2$ при слагаемых введен для того, чтобы в пределе $S \gg 1$ зависимость энергии системы от величины спина была одинаковой как у гейзенберговской, так и негейзенберговской частей ($\sim S^2$). Численные коэффициенты в H_{ms} выбраны такими, чтобы значение энергии, приходящейся на отдельный плакет, для допустимой конфигурации в классическом пределе равнялась $\pm K_i S^2$.

Для решения задачи о спектре элементарных возбуждений и об устойчивости неелевской фазы воспользуемся представлением Холстейна–Примакова [13] и учтем наличие F - и G -подрешеток

$$\begin{aligned} S_f^+ &= (2S - a_f^+ a_f)^{\frac{1}{2}} a_f, & S_f^- &= a_f^+ (2S - a_f^+ a_f)^{\frac{1}{2}}, \\ S_f^z &= S - a_f^+ a_f, \\ S_g^+ &= b_g^+ (2S - b_g^+ b_g)^{\frac{1}{2}}, & S_g^- &= (2S - b_g^+ b_g)^{\frac{1}{2}} b_g, \\ S_g^z &= -S + b_g^+ b_g, \end{aligned} \quad (4)$$

где $a_f^+(a_f)$, $b_g^+(b_g)$ — бозевские операторы рождения (уничтожения) квазичастиц для F - и G -подрешеток соответственно.

Используя (4) и действуя обычным образом, находим, что в импульсном представлении гамильтониан системы имеет вид

$$H = -NS^2(I_0 + J_0 - 2K_1) + H_{(2)} + H_{(4)} + H_{(6)} \dots \quad (5)$$

Квадратичная по операторам часть гамильтониана описывается выражением

$$H_{(2)} = \sum_q \{ \varepsilon_q (a_q^+ a_q + b_q^+ b_q) + \xi_q (a_q^+ b_{-q}^+ + b_q a_{-q}) \}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_q &= S(I_0 - I_q) + SJ_0 - 4S \left(K_1 - \frac{1}{2} K_2 (\cos q_x + \cos q_y) \right), \\ \xi_q &= SJ_q - 8SK_3 \cos(q_x/2) \cos(q_y/2). \end{aligned} \quad (7)$$

Процессы с участием четырех магнонов отражаются посредством оператора

$$\begin{aligned} H_{(4)} &= \frac{1}{N} \sum_{1234} \left\{ \Gamma_{abba}^{(0)}(12; 34) a_1^+ b_2^+ b_3 a_4 \right. \\ &+ \Gamma_{aaaa}^{(0)}(12; 34) [a_1^+ a_2^+ a_3 a_4 + b_1^+ b_2^+ b_3 b_4] \\ &+ \frac{1}{2} \Gamma_{aabb}^{(0)}(123; 4) [a_1^+ b_2^+ b_3^+ b_4 + b_1^+ a_2^+ a_3^+ a_4 + \text{н.с.}] \\ &+ \frac{1}{4} \Gamma_{aabb}^{(0)}(12; 34) [a_1^+ a_2^+ b_3 b_4 + \text{н.с.}] \\ &+ \left. \frac{1}{4} \Gamma_{aabb}^{(0)}(1234) [a_1 a_2 b_3 b_4 + \text{н.с.}] \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для удобства записи волновые вектора, по которым производится суммирование, обозначены цифрами 1, 2, 3, 4. x - и y -компоненты данных векторов будем обозначать соответственно 1_x , 1_y и т.д. Входящие в $H_{(4)}$ затравочные амплитуды $\Gamma^{(0)}$ приведены в Приложении.

В рассматриваемом в настоящей работе приближении существенны лишь слагаемые не выше четвертой степени, поэтому вид $H_{(6)}$ не приводится.

3. Линейная теория спектра возбуждений негейзенберговского 2D-антиферромагнетика

В гармоническом приближении процессы рассеяния квазичастиц игнорируются и спин-волновой спектр определяется только $H_{(2)}$. Воспользовавшись преобразованием Боголюбова $a_q = u_q \alpha_q + v_q \beta_{-q}^+$, $b_q = u_q \beta_q + v_q \alpha_{-q}^+$, получим выражение для энергии спин-возбуждений $\omega_q = \sqrt{\varepsilon_q^2 - \xi_q^2}$. При этом энергетическая щель имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv \omega(\mathbf{q} = 0) \\ &= 2S \sqrt{2(2K_3 + K_2 - K_1)(J_0 - 4K_3 - 2K_1 + 2K_2)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из условия положительной определенности спектра при $\mathbf{q} = 0$ следуют ограничения (необходимые условия устойчивости рассматриваемой структуры) на соотношения между параметрами

$$K_1 - K_2 \geq \begin{cases} 2K_3, & \text{если } K_3 \leq J_0/8, \\ J_0/2 - 2K_3, & \text{если } K_3 \geq J_0/8. \end{cases} \quad (10)$$

При $2K_3 = K_1 - K_2$ спектр возбуждений становится бесщелевым, что связано с повышением симметрии гамильтониана.

Еще одно условие устойчивости следует из рассмотрения энергии возбуждений в точке $\mathbf{q} = (\pi, \pi)$. Тогда в предположении, что $I_q = 2I(\cos q_x + \cos q_y)$, $J_q = 4J \cos \frac{q_x}{2} \cos \frac{q_y}{2}$, получаем

$$K_2 \leq -K_1 + 2I + J. \quad (11)$$

Энергия, обусловленная нулевыми квантовыми колебаниями, в расчете на один узел описывается выражением $\Delta \varepsilon = \frac{1}{N} \sum_q (\omega_q - \varepsilon_q)$.

Если $\Delta \neq 0$, то нееелевская фаза остается устойчивой в некоторой конечной области температур. Для этого случая рассмотрим уменьшение намагниченности подрешетки при возрастании температуры. В первом порядке по $1/2S$ эта намагниченность определяется выражением

$$\sigma = S - \frac{1}{N} \sum_q \left(\frac{\varepsilon_q - \omega_q}{2\omega_q} \right) - \frac{1}{N} \sum_q \left(\frac{\varepsilon_q}{\omega_q} \right) n_q, \quad (12)$$

где $n_q = (\exp(\frac{\omega_q}{T}) - 1)^{-1}$ — функция Бозе-Эйнштейна. Температурная зависимость определяется последним слагаемым, которое при $T \ll T_N$ представимо в виде

$$\begin{aligned} \sigma_1(T) &= \frac{1}{N} \sum_q \left(\frac{\varepsilon_q}{\omega_q} \right) n_q \\ &= -\frac{Q}{8\pi S} \left(\frac{T}{J} \right) \ln \left(1 - \exp \left(-\frac{\Delta}{T} \right) \right), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$Q = \frac{J(J - K_1 + K_2)}{(J - K_1 + K_2)(I - K_2) + (J - 2K_3)^2}. \quad (14)$$

Если $J, |I| \gg K_1, K_2, K_3$, то $Q = J/(J + I)$. При самых низких температурах, когда $T \ll \Delta$,

$$\sigma_1(T) = \frac{Q}{8\pi S} \left(\frac{T}{J} \right) \exp \left(-\frac{\Delta}{T} \right). \quad (15)$$

В промежуточной области температур $\Delta \ll T \ll T_N$

$$\sigma_1(T) = \frac{Q}{8\pi S} \left(\frac{T}{J} \right) \ln \left(\frac{T}{\Delta} \right). \quad (16)$$

4. Учет КФ в первом порядке по $1/2S$

Для изучения влияния квантовых флуктуаций на устойчивость антиферромагнитной фазы учтем слагаемые гамильтониана, описывающие взаимодействие магнонов. После применения преобразования Боголюбова эти слагаемые в представлении новых операторов приобретают структуру, в которой часть операторных выражений не имеет форму нормального произведения относительно операторов рождения и уничтожения (в нормальной форме все операторы уничтожения стоят справа от операторов рождения). Использование стандартных коммутационных соотношений позволяет привести все эти выражения к нормальному виду. При этом

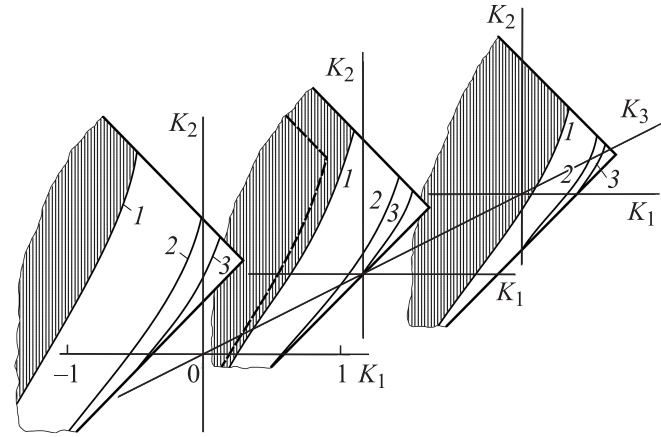


Рис. 1. Области устойчивости фазы Нееля 2D-гегейзенберговского АФМ при фиксированном I .

возникают вклады нулевого и второго порядка по операторам вторичного квантования. Слагаемые нулевого порядка дают вклады в энергию основного состояния, а квадратичные члены определяют ренормировку энергетических выражений гамильтониана $H_{(2)}$. В результате такой процедуры получим, что для нулевой температуры спектр возбуждений определяется выражением

$$\Omega_q^2 = A_q^2 - B_q^2, \quad (17)$$

где $A_q = \varepsilon_q + \delta\varepsilon_q$, $B_q = \xi_q + \delta\xi_q$. Величины ε_q и ξ_q задаются формулами (7), а $\delta\varepsilon_q$ и $\delta\xi_q$ в соответствии с описанным алгоритмом выражаются через затравочные амплитуды и параметры преобразования

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_q &= \frac{1}{N} \sum_p \left\{ 2\Gamma_{abbb}^{(0)}(p, q, -p; q) u_p v_p \right. \\ &\quad \left. + [\Gamma_{aaaa}^{(0)}(p, q; p, q) + \Gamma_{abba}^{(0)}(q, p; p, q)] v_p^2 \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\xi_q &= \frac{1}{N} \sum_p \left\{ 2\Gamma_{abbb}^{(0)}(q, p, -q; p) v_p^2 \right. \\ &\quad \left. + [\Gamma_{abba}^{(0)}(p, -p; q, -q) + \Gamma_{aabb}^{(0)}(p, q; -p, -q)] u_p v_p \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

При таком подходе нахождение параметров преобразования Боголюбова с учетом вкладов от КФ сводится к решению интегрального уравнения для функции Φ_p , через которую выражаются u_p и v_p

$$u_p = \text{ch } \Phi_p, \quad v_p = \text{sh } \Phi_p,$$

$$\text{ch } 2\Phi_p = A_p/\Omega_p, \quad \text{sh } 2\Phi_p = -B_p/\Omega_p. \quad (19)$$

Использование конкретных зависимостей затравочных амплитуд рассеяния от квазиимпульсов позволяет свести решение интегрального уравнения к системе трех трансцендентных уравнений для величин L, M и R , через

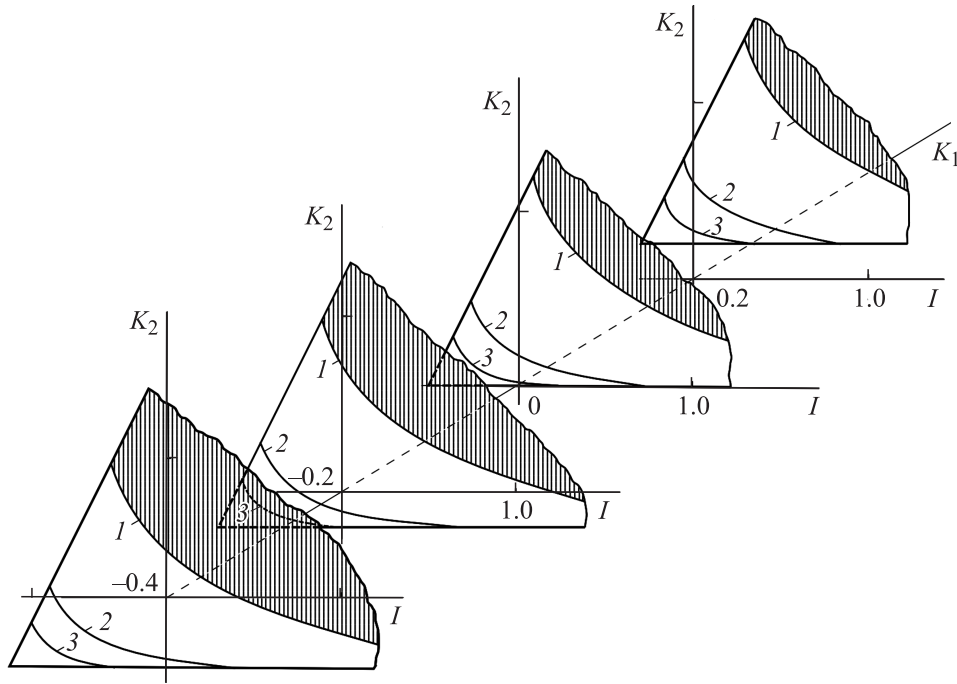


Рис. 2. Области устойчивости фазы Нееля 2D-негейзенберговского АФМ в пространстве параметров K_1, K_2, J .

которые в явном виде выражаются квазимпульсные зависимости ренормировок $\delta\varepsilon_q$ и $\delta\xi_q$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\delta\varepsilon_q &= (I - 3K_2)R - (J + I - 3K_1)M - (J - 6K_3)L \\ &\quad - \frac{1}{2}[(I - 2K_1 - K_2)R - (I - 3K_2)M - 4K_3L] \\ &\quad \times (\cos q_x + \cos q_y), \\ \frac{1}{4}\delta\xi_q &= [(4K_1 - 4K_2 + K_3 - J)L - (J - 6K_3)M + 4K_3R] \\ &\quad \times \cos \frac{q_x}{2} \cos \frac{q_y}{2}. \end{aligned} \quad (20)$$

При этом уравнения для величин L, M и R следует из выражений

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{N} \sum_p \cos \frac{p_x}{2} \cos \frac{p_y}{2} u_p v_p, \quad M = \frac{1}{N} \sum_p v_p^2, \\ R &= \frac{1}{N} \sum_p \cos p_x \cdot v_p^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Применяя полученные соотношения, проанализируем ренормированный спектр возбуждений и определим смещения границ устойчивости неелевской фазы, индуцированные квантовыми флуктуациями.

Результаты численных расчетов показаны на рис. 1 и 2. На первом рисунке по осям декартовой системы координат откладываются параметры четырехузельного обменного взаимодействия K_1, K_2, K_3 , измеренные в

единицах J . Модификация области устойчивости неелевской фазы приведена для трех значений параметра K_3 : $K_3 = -0.2J$; $K_3 = 0$; $K_3 = 0.2J$. Для каждого значения этого параметра выделяется область, ограниченная двумя прямыми

$$K_3 \geq \frac{1}{2}(K_1 - K_2), \quad K_2 \leq J - K_1. \quad (22)$$

Эти линии определяются из условия положительной определенности спектра при $q = 0$ и $q = (\pi, \pi)$ соответственно. На рис. 1 им соответствуют две взаимно перпендикулярные прямые. Таким образом, без учета квантовых флуктуаций область устойчивости неелевской фазы не изменяется для различных величин спина S .

Если же КФ принимаются во внимание, то одна из границ устойчивости определяется не уравнением $2K_3 - K_1 + K_2 = 0$, а более сложной нелинейной зависимостью между параметрами K_1, K_2 и K_3 . В результате происходит существенная модификация границы устойчивости неелевской фазы для случая слабой анизотропии (рис. 1 и 2). При учете КФ эта граница устойчивости неелевской фазы становится зависящей от величины спина S . Наиболее сильная модификация границы (изменение формы и смещение) происходит при малых значениях спинового момента. На приведенных рисунках отмеченная граница устойчивости, рассчитанная для $S = 1/2, 1$ и $3/2$, изображена кривыми 1, 2 и 3 соответственно. Видно, что при $S = 1/2$ и 1 квантовые ренормировки весьма значительны. Для $S = 1/2$ область устойчивости фазы Нееля отмечена штриховкой. Существенно, что КФ разрушают неелевскую фазу при наличии сколь угодно

малой анизотропии четырехспинового взаимодействия. На центральном сечении рис. 1 штриховой линией показана граница устойчивости неелевской фазы при $I/J = -0.2$ и $S = 1/2$. Как и должно быть, фрустрации приводят к уменьшению области стабильности.

На рис. 2 показаны сечения области устойчивости неелевской фазы в пространстве параметров K_1 , K_2 и I для четырех значений параметра K_1 : $K_1 = -0.4J$; $K_1 = -0.2J$; $K_1 = 0$ и $K_1 = 0.2J$. Заштрихованные участки сечений рис. 2 соответствуют области устойчивости для $S = 1/2$. В случаях $S = 1$ и $3/2$ штриховку (как и на рис. 1) следовало бы продлить до линий 2 и 3 соответственно. Этот рисунок также демонстрирует неустойчивость неелевской фазы слабо анизотропного негейзенберговского 2D-АФМ с четырехспиновым взаимодействием по отношению к учету КФ. Только при относительно большой величине анизотропии многоспинового обмена неелевская фаза не разрушается КФ.

5. Заключение

В работе развита квантовая теория негейзенберговского 2D-АФМ на квадратной решетке с точностью до вкладов первого порядка по параметру $1/2S$ включительно. В общем виде (при трех кубических инвариантах) вычислены зависимости от квазиимпульсов затравочных вершин, учитывающих четырехспиновое взаимодействие. Использование этих зависимостей позволило перейти от интегрального уравнения для ренормированных характеристик спектра к системе трех трансцендентных уравнений. Благодаря этому в компактной форме получены замкнутые выражения для спектра, содержащие вклады от квантовых флуктуаций.

На основе анализа спектра элементарных возбуждений получены условия устойчивости неелевской фазы по отношению к квантовым флуктуациям. Оказалось, что при учете этих флуктуаций области устойчивости неелевской фазы приобретают при малых S сильную зависимость от величины спина. Качественно новый эффект связан с тем, что квантовые флуктуации разрушают неелевскую фазу как только четырехспиновое взаимодействие становится слабо анизотропным. Наиболее сильно этот эффект проявляется при малых значениях S . На качественном уровне этот результат можно интерпретировать следующим образом. Появление анизотропии кубической симметрии приводит к возникновению щели в спектре элементарных возбуждений. С этой точки зрения анизотропия стабилизирует неелевскую фазу. Однако одновременно с этим возникновение анизотропных инвариантов приводит к появлению слагаемых, индуцирующих квантовые флуктуации. Эти слагаемые формируют тенденцию к разрушению дальнего антиферромагнитного порядка. В результате при малой величине анизотропии последние процессы преобладают и магнитный порядок исчезает. С ростом анизотропии происходит увеличение эффективного по-

ля анизотропии, квантовые флуктуации подавляются и дальний магнитный порядок при $T = 0$ становится устойчивым.

Приложение

Вид затравочных амплитуд $\Gamma^{(0)}$, входящих в $H_{(4)}$, следующий:

$$\begin{aligned} \Gamma_{abba}^{(0)}(12; 34) = & \left\{ (8K_1 - 4J) \cos \frac{1_x - 4_x}{2} \cos \frac{1_y - 4_y}{2} \right. \\ & + 2(K_1 + K_2) \left[\cos \frac{2_x + 3_x}{2} \cos \frac{1_y + 4_y}{2} \right. \\ & \left. \left. + \cos \frac{2_y + 3_y}{2} \cos \frac{1_x + 4_x}{2} \right] - 4K_2 \right. \\ & \times \left[\cos \frac{2_x - 3_x}{2} \left(\cos \frac{1_y + 4_y}{2} + \cos \frac{2_y + 3_y}{2} \right) \right. \\ & \left. \left. + \cos \frac{2_y - 3_y}{2} \left(\cos \frac{1_x + 4_x}{2} + \cos \frac{2_x + 3_x}{2} \right) \right] \right\} \\ & \times \Delta(1 + 2 - 3 - 4), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{aaaa}^{(0)}(12; 34) = & \left\{ (I - K_2) \left(1 + \frac{1}{8S} \right) (\cos 1_x + \cos 2_x \right. \\ & + \cos 3_x + \cos 4_x + \cos 1_y + \cos 2_y + \cos 3_y + \cos 4_y) \\ & + (K_1 - I) [\cos(1_x - 3_x) + \cos(1_x - 4_x) + \cos(2_x - 3_x) \\ & + \cos(2_x - 4_x) + \cos(1_y - 3_y) + \cos(1_y - 4_y) \\ & \left. \left. + \cos(2_y - 3_y) + \cos(2_y - 4_y) \right] \right\} \Delta(1 + 2 - 3 - 4), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{abbb}^{(0)}(123; 4) = & \left\{ 8K_3 \left[\cos \frac{1_x}{2} \cos \frac{4_y}{2} \cos \frac{2_y - 3_y}{2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \cos \frac{1_y}{2} \cos \frac{4_x}{2} \cos \frac{2_x - 3_x}{2} \right] - 2 \left(1 + \frac{1}{8S} \right) \right. \\ & \left. \times (J - 2K_3) \cos \frac{1_x}{2} \cos \frac{1_y}{2} \right\} \Delta(1 + 2 + 3 - 4), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{aabb}^{(0)}(12; 34) = & 2(K_1 - K_2 - 2K_3) \\ & \times \left[\cos \frac{1_x - 2_x}{2} \cos \frac{3_y - 4_y}{2} + \cos \frac{1_y - 2_y}{2} \cos \frac{3_x - 4_x}{2} \right] \\ & \times \Delta(1 + 2 - 3 - 4), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{aabb}^{(0)}(1234) = & 2(K_1 - K_2 + 2K_3) \\ & \times \left[\cos \frac{1_x - 2_x}{2} \cos \frac{3_y - 4_y}{2} + \cos \frac{1_y - 2_y}{2} \cos \frac{3_x - 4_x}{2} \right] \\ & \times \Delta(1 + 2 + 3 + 4). \end{aligned} \quad (27)$$

Список литературы

- [1] P.W. Anderson. *Science* **235**, 1196 (1987).
- [2] S. Chakravarty, B.I. Halperin, D.R. Nelson. *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1057 (1988).
- [3] D.P. Arovas, A. Auerbach. *Phys. Rev. B* **38**, 316 (1988).
- [4] М.И. Каганов, А.В. Чубуков. *УФН* **153**, 537 (1987).
- [5] T. Barnes. *Int. J. Mod. Phys. C* **2**, 659 (1991).
- [6] E. Manousakis. *Rev. Mod. Phys.* **63**, 1 (1991).
- [7] J. Igarashi, A. Watabe. *Phys. Rev. B* **43**, 13 456; *B* **44**, 5057 (1991).
- [8] A.P. Kampf. *Phys. Rep.* **249**, 219 (1994).
- [9] A.V. Chubukov, S. Sachdev, J. Ye. *Phys. Rev. B* **49**, 11 919 (1994).
- [10] А.В. Михеенков, А.Ф. Барабанов. *ЖЭТФ* **132**, 392 (2007).
- [11] P. Thalmeier, M.E. Zhitomirsky, B. Schmidt, N. Shannon. *Phys. Rev. B* **77** 104 441 (2008).
- [12] A.V. Mikheyenkov, N.A. Kozlov, A.F. Barabanov. *Phys. Lett. A* **373**, 693 (2009).
- [13] T. Holstein, H. Primakoff. *Phys. Rev.* **58**, 1098 (1940).