01,12

Фактор Парселла в малых металлических полостях

© М.М. Глазов[1], Е.Л. Ивченко[1], А.Н. Поддубный[1], Г. Хитрова[2]

[1] Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
Санкт-Петербург, Россия
[2] College of Optical Sciences, The University of Arizona,
Tucson, USA

E-mail: glazov@coherent.ioffe.ru

(Поступила в Редакцию 1 марта 2011 г.)

Теоретически исследован фактор Парселла, описывающий изменение скорости излучения электрического или магнитного диполя, помещенного в центр сферической полости. Основное внимание уделено анализу полостей, радиус которых мал по сравнению с длиной волны. Показано, что в малых металлических полостях фактор Парселла изменяется в широких пределах в зависимости от соотношения между размером полости и толщиной скин-слоя.

Работа поддержана программами РАН, грантами РФФИ и Президента РФ, а также фондом „Династия“ — МЦФФМ. Г.Х. выражает благодарность за поддержку NSF AMOP (PHY-0757707) и AFOSR (FA9550-10-1-0003).

1. Введение

Эффект Парселла — в широком смысле — определяется как изменение скорости спонтанного излучения точечного источника света, помещенного в полость резонатора. Для описания этого эффекта вводится фактор Парселла f, определяемый отношением времен спонтанного излучения $\tau_{r,\mathrm{bulk}}/\tau_{r,\mathrm{cav}}$, где $\tau_{r,\mathrm{cav}}$ и $\tau_{r,\mathrm{bulk}}$ — времена жизни излучателя в системе с полостью и в бесконечной однородной среде, заполненной материалом полости. В оптимальном случае, когда резонансная частота излучателя ω_0 настроена в резонанс с частотой фотонной моды ω_c и излучатель находится в пучности поля, формула для фактора Парселла имеет вид [1]

$$f = \frac{3Q\lambda^3}{4\pi^2 V}. \tag{1}$$

Здесь V — объем резонатора, Q — его добротность, $\lambda \equiv \lambda_0$ — длина световой волны в вакууме, если полость пустая, и λ_0/n, если полость заполнена материалом с показателем преломления n. В оригинальной заметке [1], посвященной спонтанной эмиссии осциллирующего (ядерного) магнитного диполя, приведены три оценки для фактора f. Для резонансной металлической полости с линейным размером a и толщиной скин-слоя металла δ фактор Парселла f составляет

$$f \sim \frac{\lambda^3}{a^2\delta}. \tag{2}$$

Для нерезонансных систем, $\lambda \ll a$, в [1] приведены оценочные формулы

$$f \sim \frac{\lambda^3}{a^3} \quad \text{и} \quad f \sim \frac{\lambda^3}{a\delta^2}, \tag{3}$$

последняя оценка — применительно к случаю $a < \delta$. В отличие от широко известной и цитируемой формулы (1), см., например, обзор [2], указанные две оценки, насколько нам известно, в литературе не упоминаются. В настоящей работе мы рассчитали фактор Парселла f для излучателя в нерезонансной сферической металлической полости с размером $a \le \lambda$ и получили следующие результаты для излучающего магнитного диполя

$$f = \begin{cases} 9\delta/(2k_1^3 a^4), & a \gg \delta, \\ 2/(\delta^2 k_1^3 a), & a \ll \delta, \end{cases} \tag{4}$$

и излучающего электрического диполя

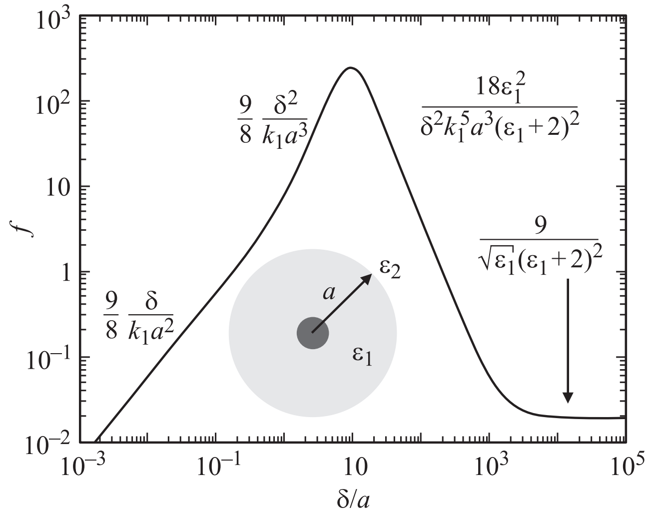
$$f = \frac{9}{8}\begin{cases} \delta/(k_1 a^2), & a \gg \delta, \\ \delta^2/(k_1 a^3), & a \ll \delta, \end{cases} \tag{5}$$

где $k_1 = 2\pi/\lambda$. Из сравнения (3) с (4) видно, что для излучения магнитного диполя получено согласие с [1] в случае $a \ll \delta$; оценка же $f \sim (\lambda/a)^3$ соответствует максимально возможному фактору Парселла в сверхмалой полости, для структуры с магнитным диполем это достигается при $\delta \sim a$.

Для получения формул (4) и (5) мы выведем общее выражение для фактора f при произвольных значениях λ, a и диэлектрических проницаемостей $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ материалов, соответственно, внутри и вне сферы радиуса a. Затем мы рассмотрим различные частные случаи, в том числе и те, при которых применимы выражения (4), (5). В дальнейшем мы считаем проницаемость ε_1 вещественной, тогда как ограничений на вещественную и мнимую части величины ε_2 не накладывается (кроме естественного условия $\mathrm{Im}\,\varepsilon_2 \ge 0$).

2. Излучение электрического диполя

Для определенности мы рассмотрим сферическую полупроводниковую квантовую точку, помещенную в



Зависимость фактора Парселла f от приведенной толщины скин-слоя δ/a в металлической полости. Расчет проводился по общей формуле (17) при $k_1 a = 1/5$ и $\varepsilon_1 = 10$. Отмечены также приближенные аналитические зависимости $f(\delta)$. На вставке показана схема рассматриваемой структуры: квантовая точка (темный кружок), окруженная средой с диэлектрической проницаемостью ε_1 (светлый материал внутренности полости), а затем среда с проницаемостью ε_2.

центр сферической полости. Диэлектрические проницаемости материала полости и окружающей среды обозначим как ε_1 и ε_2 соответственно. Различием между ε_1 и фоновой диэлектрической проницаемостью квантовой точки пренебрегаем. Радиус квантовой точки r_{QD} считается малым по сравнению с радиусом полости a. Электрическое поле световой волны, излучаемой квантовой точкой, удовлетворяет волновому уравнению

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}) - k_0^2\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi k_0^2\mathbf{P}_{\text{exc}}(\mathbf{r}),$$

или в эквивалентной форме

$$\Delta\mathbf{E}(\mathbf{r}) + k_0^2\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -4\pi k_0^2[\mathbf{P}_{\text{exc}}(\mathbf{r}) + k_1^{-2}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{P}_{\text{exc}}(\mathbf{r})]. \tag{6}$$

Здесь

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \begin{cases} \varepsilon_1, & r < a, \\ \varepsilon_2, & r > a, \end{cases}$$

$k_0 = \omega/c$, ω — собственная (комплексная) частота экситонного возбуждения в квантовой точке, определяемая из замкнутого алгебраического уравнения, получаемого при учете экситон-фотонного взаимодействия (см. далее), $\mathbf{P}_{\text{exc}}(\mathbf{r})$ — вклад выделенного экситонного резонанса в диэлектрическую поляризацию, имеющий вид [3,4]

$$4\pi\mathbf{P}_{\text{exc}}(\mathbf{r}) = \frac{\pi\varepsilon_1\omega_{LT}a_B^3}{\omega_0 - \omega - i\Gamma}\Phi(\mathbf{r})\int d^3r'\Phi(\mathbf{r}')\mathbf{E}(\mathbf{r}'), \tag{7}$$

ω_0 — резонансная частота экситона (не перенормированная экситон-фотонным взаимодействием), Γ — нерадиационное экситонное затухание (в дальнейшем для простоты не учитываем), a_B и ω_{LT} — боровский радиус и продольно-поперечное расщепление экситона в объемном полупроводнике, $\Phi(\mathbf{r})$ — огибающая волновой функции экситона при совпадающих координатах электрона и дырки, она считается изотропной: $\Phi(\mathbf{r}) \equiv \Phi(r)$. Схематически рассматриваемая система представлена на вставке к рисунку.

Выделим в собственной комплексной частоте экситона в квантовой точке вещественную и мнимую части: $\omega = \tilde{\omega}_0 - i\Gamma_0$, где $\tilde{\omega}_0 - \omega_0$ — перенормировка резонансной частоты, обусловленная экситон-фотонным взаимодействием, а излучательное время жизни экситона τ_r связано с излучательным затуханием соотношением $\tau_r^{-1} = 2\Gamma_0$. Для нахождения $\tilde{\omega}_0$ и Γ_0 воспользуемся тензорной функцией Грина, удовлетворяющей волновому уравнению [4–6],

$$[\Delta + k_0^2\varepsilon(\mathbf{r})]G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\left(\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{k_1^2}\frac{\partial^2}{\partial r_\alpha \partial r_\beta}\right)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \tag{8}$$

Учитывая сферическую симметрию полости с квантовой точкой, находим

$$\tilde{\omega}_0 - \omega_0 - i\Gamma_0 = -\pi k_1^2 a_B^3 \omega_{LT} \times \iint d^3r d^3r' \Phi(r)\Phi(r') G_{xx}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \tag{9}$$

где $k_1 = \sqrt{\varepsilon_1}k_0$. Формула (9) применима при слабой экситон-фотонной связи, когда частоту ω, от которой зависит функция Грина, можно заменить на затравочную частоту экситона ω_0. В случае сильной связи необходимо учитывать зависимость функции Грина от частоты ω и решать алгебраическое уравнение для собственных частот нульмерных экситонных поляритонов [5].

Цель настоящей работы — расчет радиационного времени жизни экситона в режиме слабой связи экситона с электромагнитным излучением. Поэтому мы оставим в левой и правой частях уравнения (9) только мнимые части и приведем общее выражение для излучательного затухания

$$\Gamma_0(\varepsilon_1, \varepsilon_2, a) = \pi k_1^2 a_B^3 \omega_{LT} \times \iint d^3r d^3r' \Phi(r)\Phi(r') \operatorname{Im}\{G_{xx}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\}. \tag{10}$$

В выражении (10) для затухания экситона в полости мы ввели в качестве аргументов диэлектрические проницаемости ε_1, ε_2 и радиус a.

Используя явное выражение для функции Грина [3], уравнение (10) можно преобразовать к виду

$$\Gamma_0(\varepsilon_1, \varepsilon_2, a) = f\Gamma_0(\varepsilon_1), \tag{11}$$

где $\Gamma_0(\varepsilon_1)$ — радиационное затухание экситона в однородной среде с диэлектрической проницаемостью ε_1, см. [4]:

$$\Gamma_0(\varepsilon_1) = \frac{1}{6} k_1^2 a_B^3 \omega_{LT} \iint d^3r d^3r' \Phi(r)\Phi(r') \frac{\sin k_1|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

$$= \frac{1}{6} k_1^3 a_B^3 \omega_{LT} \left[\int d^3r \frac{\sin k_1 r}{k_1 r} \Phi(r) \right]^2. \qquad (12)$$

а фактор Парселла связан соотношением

$$f = 1 + \mathrm{Re}\, R_{12,l}^{TM} \qquad (13)$$

с коэффициентом отражения электродипольной (TM) световой волны $R_{12,l}^{TM}(\omega)$ с полным угловым моментом $l = 1$ на частоте $\omega = \omega_0$. Согласно [6], коэффициент $R_{12,l}^{TM}(\omega)$ равен

$$R_{12,l}^{TM} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}\xi_1(k_2a)\xi_1'(k_1a) - \sqrt{\varepsilon_1}\xi_1'(k_2a)\xi_1(k_1a)}{\sqrt{\varepsilon_1}\psi_1(k_1a)\xi_1'(k_2a) - \sqrt{\varepsilon_2}\psi_1'(k_1a)\xi_1(k_2a)}. \qquad (14)$$

Здесь введены обозначения $\psi_1(x) = x j_1(x)$, $\xi_1(x) = x h_1^{(1)}(x)$, где $j_1(x)$ — сферическая функция Бесселя, $h_1^{(1)}(x) = j_1(x) + i y_1(x)$ — сферическая функция Ханкеля, штрих означает дифференцирование функции по ее аргументу. Эти функции удовлетворяют тождествам

$$[x h_1^{(1)}(x)]' = x h_0^{(1)}(x) - h_1^{(1)}(x),$$

$$[x j_1(x)]' = x j_0(x) - j_1(x),$$

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x},$$

$$y_0(x) = -\frac{\cos x}{x}, \quad y_1(x) = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}.$$

С учетом этих тождеств выражение для фактора Парселла можно привести к виду, удобному для дальнейшего анализа:

$$f = \mathrm{Im}\left[\frac{(1+S_d)y_1(k_1a) - y_0(k_1a)k_1a}{(1+S_d)j_1(k_1a) - j_0(k_1a)k_1a} \right], \qquad (15)$$

$$S_d = \frac{k_1^2 a \xi_1'(k_2a)}{k_2 \xi_1(k_2a)} = \frac{k_1^2}{k_2^2}\left(-1 + \frac{(k_2a)^2}{1 - i k_2 a} \right). \qquad (16)$$

Умножая числитель и знаменатель в (15) на комплексно-сопряженный знаменатель, учитывая вещественность волнового числа k_1 и тождество $j_1(x)y_0(x) - y_1(x)j_0(x) = 1/x^2$, получим

$$f = \frac{\mathrm{Im}\{S_d\}}{k_1a|(1+S_d)j_1(k_1a) - j_0(k_1a)k_1a|^2}. \qquad (17)$$

В последующих подразделах мы используем общие формулы (15) и (17) для нахождения фактора Парселла в нескольких частных случаях.

2.1. Сферический микрорезонатор. Строго говоря, в формуле (1) объем полости $V = (4\pi/3)a^3$ нужно заменить на эффективный объем $\tilde{V}$, отличный от V вследствие того, что электрическое (или магнитное) поле внутри полости неоднородно, а фактор Парселла определяется усилением поля в точке расположения излучателя [7–10].

Покажем, что из формулы (15) следует формула Парселла (1), и определим отношение $V/\tilde{V}$ для основной фотонной TM-моды (для TE-моды это отношение приведено в следующем разделе). Фотонные моды в сферической полости находятся из условия минимума модуля знаменателя в правой части (15). Введем функцию

$$F(x) = \frac{x j_0(x)}{j_1(x)} = \frac{x^2}{1 - x\,\mathrm{ctg}\, x}.$$

В структуре, удовлетворяющий условию $|S_d| \ll 1$, размерно-квантованные TM-моды в нулевом порядке по S_d находятся из уравнения $F(k_1a) = 1$. Первый корень этого уравнения приближенно равен 2.7437, см. [11,12]. Обозначим частоту и волновое число основной моды в виде ω^* и $k_1^* = \sqrt{\varepsilon_1}\omega^*/c$. Точное значение собственной комплексной частоты $\omega = \tilde{\omega}^* - i\gamma^*$ определяется из уравнения

$$F\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\omega a}{c} \right) - 1 = S_d(\omega).$$

Поправку первого порядка по S_d мы найдем, сохраняя в разложении F по степеням $\omega - \omega^*$ линейные слагаемые и заменяя $S_d(\omega)$ на $S_d(\omega^*)$. В результате получим

$$\tilde{\omega}^* = \omega^* - \frac{c\,\mathrm{Re}\{S_d(\omega^*)\}}{\sqrt{\varepsilon_1}a|F'(k_1^*a)|}, \quad \gamma^* = \frac{c\,\mathrm{Im}\{S_d(\omega^*)\}}{\sqrt{\varepsilon_1}a|F'(k_1^*a)|}.$$

Добротность Q, стандартный параметр резонатора, связана с затуханием фотонной моды γ^* соотношением $\gamma^* = \tilde{\omega}^*/(2Q)$. Для любого корня x^* уравнения $F(x) = 1$ имеем $F'(x^*) = (2 - x^{*2})/x^*$, и для затухания экситона получаем

$$\Gamma_0(\varepsilon_1, \varepsilon_2, a) = \left(\frac{\Delta}{2} \right)^2 \frac{\gamma^*}{(\omega_0 - \tilde{\omega}^*)^2 + \gamma^{*2}},$$

где введено расщепление Раби

$$\Delta = 2\sqrt{\frac{c\Gamma_0(\varepsilon_1)}{\sqrt{\varepsilon_1}a} \frac{1 - x^{*2} + x^{*4}}{x^{*2}|2 - x^{*2}|}}.$$

В режиме слабой связи выполняется неравенство $\Delta \ll 2\gamma^*$ (напомним, что мы рассматриваем случай пренебрежимо малого нерадиационного затухания экситона, $\Gamma \ll \gamma^*$). При точном резонансе $\omega_0 = \tilde{\omega}^*$ получаем для фактора Парселла

$$f = \frac{3Q\lambda_1^3}{4\pi^2\tilde{V}}, \quad \frac{V}{\tilde{V}} = \frac{4}{9}\frac{1 - x^{*2} + x^{*4}}{|2 - x^{*2}|}. \qquad (18)$$

При $x^* = 2.7437$ отношение $V/\tilde{V} \approx 4$. Отметим, что в резонансных полостях три величины $V, \tilde{V}$ и λ_1^3 различаются лишь численными множителями. Поэтому фактор

Парселла с точностью до численного коэффициента порядка единицы равен добротности резонатора. Действительно, именно в меру добротности Q усиливается амплитуда электромагнитного поля в резонаторе.

Рассмотрим далее структуры с нерезонансной полостью сверхмалого размера, удовлетворяющего условию $k_1 a \ll 1$.

2.2. Малая нерезонансная полость в непоглощающих средах. Здесь мы считаем, что диэлектрические проницаемости $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ вещественны и положительны. Учитывая следующие разложения при малых значениях аргумента

$$x j_0(x) \approx x, \quad j_1(x) \approx \frac{x}{3} \tag{19}$$

и подставляя их в (17), получим

$$f = \frac{9\,\mathrm{Im}\{S_d(\omega_0)\}}{(k_1 a)^3 |2 - S_d|^2}. \tag{20}$$

В частном случае $k_2 a \ll 1$ имеем

$$\mathrm{Im}\, S_d \approx k_1^2 k_2 a^3 \ll 1, \quad \mathrm{Re}\, S_d \approx -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2},$$

и фактор Парселла определяется известным выражением [13–18]

$$f = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \left(\frac{3\varepsilon_2}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \right)^2. \tag{21}$$

На качественном уровне формулу (21) можно интерпретировать как классическое усиление стационарного электрического поля в диэлектрической полости.

В обратном предельном случае $k_2 a \gg 1$ фактор Парселла равен

$$f = \frac{9}{4 k_1 k_2 a^2} \tag{22}$$

и может быть как больше, так и меньше единицы.

2.3. Нерезонансная полость в металле. Рассмотрим теперь малую полость с $k_1 a \ll 1$ в металле, диэлектрическая проницаемость которого дается формулой

$$\varepsilon_2(\omega) = 1 + \frac{4\pi i \sigma}{\omega} = 1 + \frac{2i}{\delta^2} \left(\frac{c}{\omega} \right)^2, \tag{23}$$

где σ и δ — статическая проводимость и глубина скин-слоя в металле, соответственно. В квазистационарном приближении, т. е. при $\delta \ll c/\omega$, единицей в (23) можно пренебречь:

$$\varepsilon_2(\omega) = \frac{2i}{\delta^2} \left(\frac{c}{\omega} \right)^2, \quad k_2 = \frac{1+i}{\delta}. \tag{24}$$

Согласно (16), (20), при тонком скин-слое, т. е. при $\delta \ll a$, так что $|k_2 a| \gg 1$, имеем

$$S_d \approx i\, \frac{k_1^2 a}{k_2}, \quad \mathrm{Im}\{S_d\} = \frac{1}{2} k_1^2 a \delta \quad \text{и} \quad |S_d| \ll 1,$$

откуда и следует первая из формул (5). Если толщина скин-слоя превышает линейные размеры полости, но мала по сравнению с длиной волны, так что $\delta \gg a$ и $|k_1 \delta| \ll 1$, имеем $|S_d| \ll 1$ и $\mathrm{Im}\{S_d\} = -\mathrm{Im}\{k_1^2/k_2^2\} = k_1^2 \delta^2/2$, откуда следует вторая из формул (5). В случае, когда толщина скин-слоя является самым большим параметром в задаче, $\delta \gg a$, $\delta \gg 1/k_1$, квазистационарное приближение неприменимо, и волновой вектор в металле k_2 должен определяться с использованием общей формулы (23) для ε_2. В этом режиме может быть получена следующая асимптотика для фактора Парселла:

$$f = \frac{18\varepsilon_1^2}{\delta^2 k_1^5 a^3 (\varepsilon_1 + 2)^2} + \frac{9}{\sqrt{\varepsilon_1}(2 + \varepsilon_1)^2}. \tag{25}$$

В пределе $\delta \to \infty$ фактор Парселла определяется вторым слагаемым в (25). При этом металл прозрачен, $\varepsilon_2 \equiv 1$, так что выражение (25) эквивалентно выражению (21) из предыдущего раздела.

Рассчитанная зависимость фактора Парселла f от толщины скин-слоя δ, выраженной в единицах радиуса полости a, представлена на рисунке. Построенная в двойном логарифмическом масштабе кривая демонстрирует, что в зависимости $f(\delta)$ можно выделить три участка, на которых она с высокой точностью описывается степенными законами, указанными на рисунке. Первые два участка кривой, соответствующие малым $\delta \ll 1/k_1$, демонстрируют линейную и квадратичную зависимости фактора Парселла от δ в согласии с уравнением (5). При $\delta \sim 1/k_1$ фактор f достигает максимума, $f \sim 1/(k_1 a)^3$ (в этой оценке численный множитель, зависящий от ε_1, опущен), а затем при $\delta \gg 1/k_1$ спадает как $1/\delta^2$. Наконец, когда нарушается квазистационарное приближение и $\delta \gg a(k_1 a)^{-5/2}$, фактор Парселла выходит на постоянное значение, описываемое вторым членом в (25). Следует отметить, что на высоких частотах приближенное выражение (23) для восприимчивости металла следует заменить на

$$\varepsilon_2(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega(\omega + i\gamma_m)},$$

где ω_{pl} — плазменная частота, и γ_m — затухание, описывающее релаксацию электронов в металле. В таком случае, следует подставить приведенное выше выражение для $\varepsilon_2(\omega)$ в формулу (17) для более точного расчета фактора Парселла.

Качественно полученные результаты могут быть интерпретированы следующим образом. При малой толщине скин-слоя электрическое поле слабо проникает из полости в металл. Поэтому спонтанное излучение квантовой точки подавлено в пределе $\delta \to 0$ и усиливается с ростом δ. В противоположном предельном случае $\delta \to \infty$, когда $\varepsilon_2 \to 1$, электрическое поле внутри полости с $\varepsilon_1 > 1$ меньше, чем снаружи, что также ведет к ослаблению спонтанного излучения. При промежуточных значениях δ возможно проникновение поля внутрь металла, приводящее к увеличению фактора Парселла. Это усиление спонтанного затухания обеспечено эффективным поглощением волны, излученной квантовой точкой, внутри металла.

3. Излучение магнитного диполя

Пусть система со сферической полостью по-прежнему характеризуется диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2, но в центре полости вместо электрического диполя располагается магнитный диполь, распределенный с плотностью $\mathbf{M}_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ в малой области радиуса $r_{QD} \ll a$ и осциллирующий на резонансной частоте ω_0. Тогда вместо уравнения (6) для электрического поля $\mathbf{E}$ удобнее решать волновое уравнение для магнитного поля

$$\Delta\mathbf{H}(\mathbf{r}) + k_0^2\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -4\pi k_1^2 \times \left[\mathbf{M}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + k_1^{-2}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{M}_{\text{ext}}(\mathbf{r})\right]. \quad (26)$$

Следовательно, решение $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ можно записать с использованием той же функции Грина (8). Заметим, что по сравнению с (6) вместо множителя k_0^2 в правой части уравнения (26) входит множитель $k_1^2 = k_0^2\varepsilon_1$. Кроме того, в случае магнитного диполя при расчете фактора Парселла в разложении функции Грина по мультиполям [6] нужно учесть TE-волну с полным угловым моментом $l = 1$, для которой магнитное поле имеет в центре полости пучность. В результате фактор Парселла равен $1 + \mathrm{Re}\,R_{12,1}^{TE}$, где [6]

$$R_{12,1}^{TE} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}\xi_1(k_2a)\xi_1'(k_1a) - \sqrt{\varepsilon_2}\xi_1'(k_2a)\xi_1(k_1a)}{\sqrt{\varepsilon_2}\psi_1(k_1a)\xi_1'(k_2a) - \sqrt{\varepsilon_1}\psi_1'(k_1a)\xi_1(k_2a)}.$$

Используя свойства сферических функций Бесселя, можем привести выражения для f к виду, аналогичному (15):

$$f = 1 + \mathrm{Re}\,R_{12,1}^{TE} = \mathrm{Im}\left[\frac{(1+S_m)y_1(k_1a) - k_1ay_0(k_1a)}{(1+S_m)j_1(k_1a) - k_1aj_0(k_1a)}\right], \quad (27)$$

где

$$S_m = \frac{k_2^2}{k_1^2}S_d = -1 + \frac{(k_2a)^2}{1 - ik_2a}.$$

Вместо (17) получаем

$$f = \frac{\mathrm{Im}\{S_m\}}{k_1a|(1+S_m)j_1(k_1a) - j_0(k_1a)k_1a|^2}. \quad (28)$$

В нерезонансной металлической полости, удовлетворяющей условию $k_1a \ll 1$, применимо выражение (20), в котором S_d заменено на S_m. Для малой диэлектрической полости с $k_1a \ll 1$ можно использовать асимптотики $S_m \approx ik_2a$ при $k_2a \gg 1$ и $S_m \approx -1 + (k_2a)^2$ при $k_2a \ll 1$. В результате получаем вместо (21) и (22): $f = (k_2/k_1)^3 = (\varepsilon_2/\varepsilon_1)^{3/2}$ при $k_2a \ll 1$ и $f = 9/(k_1^3k_2a^4)$ при $k_2a \gg 1$.

В металлических полостях, отклик которых описывается уравнением (23) при $|k_2|a \ll 1$, получаем выражения (4). При произвольном соотношении между δ и a, но по-прежнему при $k_1a \ll 1$, фактор Парселла описывается следующим выражением:

$$f = \frac{18\delta(\delta + a)}{k_1^3a(4a^4 + 12a^3\delta + 18a^2\delta^2 + 18a\delta^3 + 9\delta^4)}. \quad (29)$$

Так же как и для электрического диполя, зависимость фактора Парселла от толщины скин-слоя при фиксированной геометрии полости является немонотонной, особенность магнитного диполя состоит в том, что максимума фактор Парселла достигает при $\delta \sim a \ll 1/k_1$. В этом несложно убедиться из общей формулы (29) или из оценок (4), причем максимальное усиление излучения магнитного диполя по порядку величины есть $f \sim 1/(k_1a)^3$.

Теперь кратко проанализируем резонансные системы, содержащие магнитный диполь. Для высокодобротной полости выполняется условие $|k_2|a \gg 1$. В этом случае $S_m \approx ik_2a$ и в нулевом приближении по малому параметру $|S_m|^{-1} \ll 1$ собственные TE-моды удовлетворяют уравнению $j_1(k_1a) = 0$, или $\mathrm{tg}\,k_1a = k_1a$. Наименьший корень уравнения $j_1(y) = 0$ приближенно равен $y^* = 4.4934$, в согласии с [11,12], а основная частота TM-моды равна $\omega_m^* \equiv y^*c/(\sqrt{\varepsilon_1}a)$.

При близких резонансных частотах излучателя и TE-моды, т.е. при $\omega_0 \approx \omega_m^*$, с учетом неравенства $|S_m| \gg 1$ выражение (27) упрощается

$$f = \mathrm{Im}\left[\frac{y_1(y^*)}{j_1'(y^*)(k_1a - y^*) - y^*j_0(y^*)S_m^{-1}}\right] = \frac{1 + y^{*2}}{y^{*2}}\frac{c}{a\sqrt{\varepsilon_1}}\frac{\gamma_m^*}{(\omega_0 - \tilde{\omega}_m^*)^2 + \gamma_m^{*2}},$$

где

$$\tilde{\omega}^* - \omega^* = -\,\mathrm{Im}\,\frac{\omega_m^*}{k_2a}, \quad \gamma_m^* = \mathrm{Re}\,\frac{\omega_m^*}{k_2a}.$$

Для добротности получаем $Q_m = [\mathrm{Re}(2/k_2a)]^{-1} = \delta/a$ в согласии с формулами (1), (2). В системе, настроенной на резонанс ($\omega_0 = \tilde{\omega}_m^*$), фактор Парселла определяется формулой (18) с отношением объемов

$$\frac{V}{\tilde{V}} = \frac{4}{9}(y^{*2} + 1).$$

4. Анализ структуры полей и обсуждение

Согласно уравнению (13), фактор Парселла определяется коэффициентом отражения электромагнитного поля от стенок полости. Покажем, как эту формулу можно вывести, используя явные выражения для электрического ($\mathbf{E}$) и магнитного ($\mathbf{B}$) полей, создаваемых излучающим электрическим диполем

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{d}e^{-i\omega t} + \mathbf{d}^*e^{i\omega t}$$

внутри и вне сферической полости. Структура этих полей имеет следующий вид:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathbf{E}_{\text{in},1}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_{\text{in},2}(\mathbf{r}), & r_{QD} < r \le a, \\ \mathbf{E}_{\text{out}}(\mathbf{r}), & a \le r, \end{cases} \tag{30}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathbf{B}_{\text{in},1}(\mathbf{r}) + \mathbf{B}_{\text{in},2}(\mathbf{r}), & r_{QD} < r \le a, \\ \mathbf{B}_{\text{out}}(\mathbf{r}), & a \le r, \end{cases} \tag{31}$$

где

$$\mathbf{E}_{\text{in},1}(\mathbf{r}) = \frac{i}{3} k_0^2 k_1 [2h_0^{(1)}(x_1)\mathbf{d} + h_2^{(1)}(x_1)\tilde{\mathbf{d}}].$$

$$\mathbf{E}_{\text{in},2}(\mathbf{r}) = \frac{iR_{12,1}^{TM}}{3} k_0^2 k_1 [2j_0(x_1)\mathbf{d} + j_2(x_1)\tilde{\mathbf{d}}],$$

$$\mathbf{E}_{\text{out}}(\mathbf{r}) = \frac{iT}{3} k_0^2 k_2 [2h_0^{(1)}(x_2)\mathbf{d} + h_2^{(1)}(x_2)\tilde{\mathbf{d}}] \tag{32}$$

и

$$\mathbf{B}_{\text{in},1}(\mathbf{r}) = \sqrt{\varepsilon_1} k_0^2 k_1 h_1^{(1)}(x_1)\mathbf{d} \times \mathbf{n},$$

$$\mathbf{B}_{\text{in},2}(\mathbf{r}) = R_{12,1}^{TM} \sqrt{\varepsilon_1} k_0^2 k_1 j_1(x_1)\mathbf{d} \times \mathbf{n},$$

$$\mathbf{B}_{\text{out}}(\mathbf{r}) = T\sqrt{\varepsilon_2} k_0^2 k_2 h_1^{(1)}(x_2)\mathbf{d} \times \mathbf{n}. \tag{33}$$

Здесь $x_1 = k_1 a$, $x_2 = k_2 a$, $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, $\tilde{\mathbf{d}} = 3(\mathbf{d}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{d}$, коэффициент $R_{12,1}^{TM}$ введен в [6], а T можно выразить через $T_{12,1}^{TM}$ из той же работы в виде $T = (\varepsilon_1/\varepsilon_2)T_{12,1}^{TM}$. Величины $R_{12,1}^{TM}$ и T в (32) и (33) можно получить из граничных условий на сфере $r = a$

$$x_1 h_0^{(1)}(x_1) - h_1^{(1)}(x_1) - iR_{12,1}^{TM}[x_1 j_0(x_1) - j_1(x_1)] = T[x_2 h_0^{(1)}(x_2) - h_1^{(1)}(x_2)],$$

$$\varepsilon_1[h_1^{(1)}(x_1) - iR_{12,1}^{TM} j_1(x_1)] = \varepsilon_2 T h_1^{(1)}(x_2). \tag{34}$$

Заметим, что фактор Парселла можно эквивалентно представить как отношение

$$f = \frac{I_{\text{cav}}}{I_{\text{bulk}}} \tag{35}$$

потоков электромагнитной энергии через сферу радиуса $r < a$ при излучении диполя $\mathbf{d}$ в системе с полостью и однородном материале:

$$I = \frac{cr^2}{2\pi} \int_{4\pi} d\Omega \mathbf{n} \cdot \text{Re}[\mathbf{E}^*(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})],$$

где $d\Omega$ — элемент телесного угла. Подставляя выражения (32), (33) для электромагнитных полей и выполняя необходимые преобразования, получим формулу (13). Приравнивая потоки энергии на внутренней и внешней границах сферы радиуса a и учитывая граничные условия (34), получим тождество

$$k_2' \left(1 + \frac{2k_2''|1 - ik_2 a|^2}{|k_2|^4 a^3}\right) e^{-2k_2'' a} |T|^2 = k_1(1 + \text{Re}\, R_{12,1}^{TM}),$$

связывающее $|T|$ с $\text{Re}\, R_{12,1}^{TM}$. Здесь k_2' и k_2'' — вещественная и мнимая части волнового числа k_2.

В частном случае $a \ll \delta \ll \lambda$ имеем приближенно вместо (34):

$$x_1 h_1^{(1)}(x_1) - \frac{2x_1}{3} R_{12,1}^{TM} = -T h_1^{(1)}(x_2),$$

$$\varepsilon_1 \left[h_1^{(1)}(x_1) - \frac{x_1}{3} R_{12,1}^{TM}\right] = \varepsilon_2 T h_1^{(1)}(x_2), \tag{36}$$

где в свою очередь можно положить $h_1^{(1)}(x_j) \approx -i/x_j^2$ ($j = 1, 2$). Отдельные слагаемые в этих уравнениях позволяют оценить величину поля вблизи сферы, а также найти приближенное значение коэффициента отражения

$$R_{12,1}^{TM} \approx -\frac{3}{2} \frac{i}{k_1^2 a^2} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{k_1^2}{k_2^2}\right).$$

При $k_2 = (1 + i)/\delta$ находим $\text{Re}\, R_{12,1}^{TM} = (9/8)(\delta^2/k_1 a^3)$ в согласии с (5).

Представляет интерес установить связь между фактором Парселла, определенным как отношение $\tau_{r,\text{bulk}}/\tau_{r,\text{cav}}$, и добротностью излучателя Q_{ant}, определенной в физике антенн [19,20] как отношение запасенной (нераспространяющейся) энергии W_{nonprop} к потоку излучаемой энергии S, точнее, $Q_{\text{ant}} = 2\omega W_{\text{nonprop}}/S$. Учитывая, что размер излучателя r_{QD} (радиус квантовой точки удовлетворяет условию $k_1 r_{QD} \ll 1$) является самым малым линейным размером в изучаемой системе с полостью, находим

$$Q_{\text{ant}} = \frac{1}{f k_1^3 r_{QD}^3}. \tag{37}$$

где $f = 1 + \text{Re}\, R_{12,1}$ — фактор Парселла. При излучении в однородном пространстве $R_{12,1} = 0$ и $Q_{\text{ant}} = (k_1 r_{QD})^{-3}$ в согласии с [19]. В работе [20] рассчитывалась добротность излучения антенны в виде элементарного диполя, помещенного в центр сферического слоя конечной толщины из материала с отрицательными диэлектрической и магнитной проницаемостями. Согласно (37), фактор Парселла для рассмотренных систем можно найти по формуле $f = [Q_{\text{ant}}(k_1 r_{QD})^3]^{-1}$, используя результаты численного расчета Q_{ant}.

В данной работе в качестве излучателя рассматривается полупроводниковая квантовая точка, отклик которой находится квантовомеханически, см. формулу (7). Однако эффект Парселла может быть получен и в терминах классической электродинамики, например, для излучения электрона, совершающего механическое колебательное движение в сферически симметричном, параболическом потенциале. Если минимум потенциала располагается в центре полости радиуса a, то согласно второму закону Ньютона

$$m(\ddot{\mathbf{d}} + \omega_0^2 \mathbf{d}) = e^2[\mathbf{E}_{\text{rad.fric.}} + \mathbf{E}_{\text{in},2}(0)], \tag{38}$$

где m — масса электрона, ω_0 — резонансная частота его колебаний, точки обозначают производные по времени, $e\mathbf{E}_{\text{rad.fric.}}$ — сила „торможения излучением“, создаваемым колеблющимся электроном [21], а $\mathbf{E}_{\text{in},2}(0)$ — поле, обусловленное наличием сферической границы и введенное в (32). Для поля $\mathbf{E}_{\text{rad.fric.}}$ имеем

$$\mathbf{E}_{\text{rad.fric.}} = \frac{2}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}}. \tag{39}$$

При наличии полости (для простоты считаем $\varepsilon_1 = 1$) полное поле в точке нахождения диполя содержит вклад $\mathbf{E}_{\text{in},2}(0)$, в который, согласно (32), можно представить в виде

$$\mathbf{E}_{\text{in},2}(0) = \frac{2iR_{12,1}^{TM}}{3}\,k_0^3\mathbf{d}. \tag{40}$$

При слабом излучательном затухании $\dddot{\mathbf{d}} = -\omega_0^2\dot{\mathbf{d}}$ и уравнение (38) можно записать как

$$\ddot{\mathbf{d}} + \omega_0^2\mathbf{d} + \frac{2e^2\omega_0^3}{3c^3m}\,(1 + R_{12,1}^{TM})\dot{\mathbf{d}} = 0. \tag{41}$$

откуда следует формула (13).

5. Заключение

Мы разработали теорию эффекта Парселла — влияния окружения на темп излучения электрического или магнитного диполя — для сферических полостей произвольных размеров. Особое внимание уделено нерезонансным полостям, радиус которых мал по сравнению с длиной волны дипольного излучения. В таких системах увеличение темпа излучения диполя происходит из-за отражения излучаемой волны от сферической границы полости и сильного увеличения амплитуды электромагнитного поля в месте расположения диполя. Получены асимптотические выражения для фактора Парселла для металлических полостей и показано, что ускорение излучения диполя существенно зависит от соотношения между толщиной скин-слоя и размером полости.

Экспериментально указанные эффекты могут наблюдаться в металлических полостях с малыми прорезями, которые способны обеспечить выход излучения за пределы поглощающей среды. Усиление излучения может также исследоваться в экспериментах, где излучатель (молекула или локализованный экситон) находится снаружи металлической частицы [10,22–27].

Список литературы

[1] E.M. Purcell. Phys. Rev. **69**, 681 (1946).
[2] А.Н. Ораевский. УФН **164**, 415 (1994).
[3] E.L. Ivchenko. Optical spectroscopy of semiconductor nanostructures. Alpha Science Int., Harrow, UK (2005).
[4] Е.Л. Ивченко, А.В. Кавокин. ФТТ **34**, 1815 (1992).
[5] M.A. Kaliteevski, S. Brand, R.A. Abram, V.V. Nikolaev, M.V. Maximov, C.M. Sotomayor Torres, A.V. Kavokin. Phys. Rev. B **64**, 115305 (2001).
[6] H. Ajiki, T. Tsuji, K. Kawano, K. Cho. Phys. Rev. B **66**, 245322 (2002).
[7] R. Coccioli, M. Boroditsky, K.W. Kim, Y. Rahmat-Saii, E. Yablonovitch. IEE Proc. Optoelectronics **145**, 391 (1998).
[8] L.C. Andreani, G. Panzarini, J.M. Gérard. Phys. Rev. B **60**, 13276 (1999).
[9] J.T. Robinson, C. Manolatou, Long Chen, M. Lipson. Phys. Rev. Lett. **95**, 143901 (2005).
[10] A.F. Koenderink. Opt. Lett. **35**, 4208 (2010).
[11] S. Gallagher, W.J. Gallagher. IEEE Trans. Nucl. Sci. **NS-32**, 2980 (1985).
[12] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. 3-е изд. Наука, М. (1992).
[13] K. Ohtaka, A.A. Lukas. Phys. Rev. B **18**, 4643 (1978).
[14] E. Yablonovitch, T.J. Gmitter, R. Bhat. Phys. Rev. Lett. **61**, 2546 (1988).
[15] R.J. Glauber, M. Lewenstein. Phys. Rev. A **43**, 467 (1991).
[16] P. Lavallard, M. Rosenbauer, T. Gacoin. Phys. Rev. A **54**, 5450 (1996).
[17] A. Thränhardt, E. Ell, G. Khitrova, H.M. Gibbs. Phys. Rev. B **65**, 035327 (2002).
[18] S.V. Goupalov. Phys. Rev. B **68**, 125311 (2003).
[19] J.S. McLean. IEEE Trans. Antennas Propagat. **44**, 672 (1996).
[20] R.W. Ziolkowski, A.D. Kipple. IEEE Trans. Antennas Propagat. **51**, 2626 (2003).
[21] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля. Наука, М. (1967).
[22] P. Anger, P. Bharadwaj, L. Novotny. Phys. Rev. Lett. **96**, 113002 (2006).
[23] S. Kühn, U. Håkanson, L. Rogobete, V. Sandoghdar. Phys. Rev. Lett. **97**, 017402 (2006).
[24] A.A. Toropov, T.V. Shubina, V.N. Jmerik, S.V. Ivanov, Y. Ogawa, F. Minami. Phys. Rev. Lett. **103**, 037403 (2009).
[25] A.G. Curto, G. Volpe, T.H. Taminiau, M.P. Kreuzer, R. Quidant, N.F. Van Hulst. Science **329**, 930 (2010).
[26] N. Meinzer, M. Ruther, S. Linden, C.M. Soukoulis, G. Khitrova, J. Hendrickson, J.D. Olitzky, H.M. Gibbs, M. Wegener. Opt. Express **18**, 24140 (2010).
[27] K. Tanaka, E. Plum, J.Y. Ou, T. Uchino, N.I. Zheludev. Phys. Rev. Lett. **105**, 227403 (2010).