

Флуктуации с $1/f^\alpha$ -спектром при неравновесных фазовых переходах в пространственно распределенной системе

© В.П. Коверда, В.Н. Скоков

Институт теплофизики УрО РАН,
620016 Екатеринбург, Россия
e-mail: koverda@itp.uran.ru

(Поступило в Редакцию 16 июня 2009 г.)

Изучена статистика флуктуаций в пространственно распределенной системе, описывающей взаимодействие неравновесных фазовых переходов. Показано, что при определенном значении интенсивности внешнего белого шума, воздействующего на фазовые переходы, временной и пространственный спектры флуктуаций имеют степенную зависимость: $S(f) \sim f^{-\alpha}$ и $S(k) \sim k^{-\gamma}$. Определена зависимость показателей α и γ от величины коэффициента диффузии, определяющего пространственное взаимодействие флуктуаций. Выделены экстремальные низкочастотные флуктуации и определены функции распределения их длительности $P(\tau) \sim \tau^{-\beta}$ и размера $P(s) \sim s^{-\nu}$. Найдено, что показатель временной спектральной зависимости α и показатель длительности флуктуаций β связаны между собой соотношением $\alpha + \beta = 2$. Показатели пространственного спектра γ и функции распределения по размерам ν связаны аналогичным соотношением: $\gamma + \nu = 2$.

Введение

В сложных системах часто наблюдается $1/f$ -шум, характеризующий флуктуации физических величин [1,2]. Этим термином обозначают случайные процессы, для которых спектральная плотность мощности флуктуаций $S(f)$ зависит от частоты f как $S(f) \sim 1/f^\alpha$. Такое поведение спектра может сохраняться с изменением частоты в диапазоне нескольких порядков величины. Типичные значения показателя α обычно находятся в интервале 0.8–2, и для обозначения таких флуктуаций также используют термин $1/f^\alpha$ -шум. Системы, в которых можно наблюдать $1/f$ -шум, относятся к различным областям исследований — это физика твердого тела и электроники [1–3], астрофизика [4], геофизика [5], биология [6], экономика [7] и социальные науки [8]. В некоторых случаях показатель спектральной зависимости α близок к единице, например, для флуктуаций электрического тока в резисторах [2,3] и для тепловых флуктуаций при неравновесных фазовых переходах [9].

Стационарные случайные процессы с $1/f$ -спектром характеризуются вспышками и лавинной динамикой. Значительная часть энергии флуктуаций накапливается на низких частотах, и в таких системах возможны катастрофические выбросы. Флуктуации с $1/f$ -спектром масштабно инварианты. Такими свойствами обладают пульсации потока жидкости при турбулентном режиме течения [10], а также флуктуации термодинамических величин вблизи равновесной критической точки [11]. Но большинство примеров флуктуаций с $1/f$ -спектром относятся к неравновесным явлениям. В качестве общего механизма возникновения $1/f$ -шума и лавинной динамики флуктуаций в неравновесных системах была предложена концепция самоорганизованной критичности [12]. Она проиллюстрирована большим числом компьютер-

ных моделей систем, в которых существуют масштабно инвариантные распределения флуктуаций. Критическое состояние устанавливается в них без тонкой подстройки параметров состояния, флуктуации не перекрываются, а следуют одна за другой. Спектры мощности флуктуаций в моделях самоорганизованной критичности чаще всего непосредственно не измеряются, а вычисляются из найденных распределений лавин. Для большинства стандартных моделей самоорганизованной критичности показатель спектральной зависимости α оценивается в пределах 1.4–2 [13,14]. Имеются также модели с прямым измерением спектра и α близким к единице, например [15]. Другим общим, но формальным, математическим описанием $1/f$ -шума является дробное броуновское движение, при котором интенсивность флуктуаций вычисляется дробным интегрированием белого шума [16].

Основные свойства точечной системы с $1/f$ -спектром

Стационарные случайные процессы с $1/f$ -спектром дает система двух стохастических дифференциальных уравнений [17]:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= -\phi\psi^2 + \psi + \Gamma_1(t), \\ \frac{d\psi}{dt} &= -\phi^2\psi + \lambda\phi + \Gamma_2(t), \end{aligned} \quad (1)$$

которые описывают динамику флуктуаций в точечной системе. Здесь ϕ и ψ — динамические переменные, их сумма $\psi + \phi$ и разность $\psi - \phi$ связаны с параметрами порядка докритического и закритического фазовых переходов теории Ландау; Γ_1 и Γ_2 — δ -коррелированные

шумы с нормальным распределением:

$$\langle \Gamma(t) \rangle = 0, \quad \langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle = \sigma^2 \delta(t - t'). \quad (2)$$

Шумы Γ_1 и Γ_2 могут иметь разные реализации, но одинаковые значения дисперсии σ^2 . Система уравнений (1) описывает случайные блуждания в потенциале, рельеф которого представляет собой две гиперболические долины, разделенные барьером с точкой перевала в начале координат [18]. Оптимальный уровень шума при достижении стационарности стохастического процесса должен быть достаточным для преодоления перевала при случайных блужданиях броуновской частицы. Сужающиеся все более круто стенки долины по мере удаления от начала координат не позволяют частице уйти слишком далеко по дну долины от перевала. Коэффициент $\lambda > 1$ во втором уравнении системы (1) нарушает потенциальность силового поля и на броуновское движение в потенциальном поле накладывается движение, связанное с некоторым нескомпенсированным потоком.

Статистика флуктуаций, описываемых системой (1), исследована численными методами в работе [18]. Показано, что спектр переменной $\psi(t)$ всегда обратно пропорционален квадрату частоты: $S_\psi \sim f^{-2}$, в то время как спектр переменной $\phi(t)$ имеет зависимость $S_\phi \sim f^{-\alpha}$, где показатель α определяется значением коэффициента λ и углом поворота потенциала. Показатель α в зависимости от этих величин лежит в диапазоне $0.8 < \alpha < 1.8$. Например, при $\lambda = 2$ и нулевом угле поворота имеем показатель $\alpha = 1$; при увеличении коэффициента λ по сравнению с 2 показатель α уменьшается, а при уменьшении λ показатель α растет.

Численные исследования показывают, что при низких частотах, начиная с некоторого характерного значения частоты, спектр мощности перестает зависеть от частоты и выходит на горизонтальную „полку“. Это свидетельствует о стационарности случайного процесса. Характерное значение частоты зависит от временного интервала разбиения при численном интегрировании. Чем меньше этот интервал, тем ниже характерная частота, и диапазон, в котором наблюдается $1/f$ -поведение, расширяется. В численных расчетах „белый шум“ аппроксимируется гауссовыми случайными числами и с уменьшением интервала интегрирования имеет место более точное приближение к „белому шуму“ и наблюдается более широкий диапазон $1/f$ -поведения.

Можно выделить экстремальные низкочастотные флуктуации и найти функцию распределения их длительности $P(\tau)$. Для этого следует рассчитать траектории броуновских частиц для двух систем (1) с одинаковыми белыми шумами, но с разными начальными условиями, которые соответствуют точкам в разных долинах потенциала. Траектории будут различаться между собой только до момента перехода одной из них через потенциальный барьер. Последующее движение этих двух броуновских частиц в одной и той же долине будет

совпадать, поскольку будет управляться одинаковым белым шумом.

Момент перехода через потенциальный барьер заметен при сравнении реализации траектории случайного процесса для первой частицы: $\phi^{(1)}(t)$ и $\psi^{(1)}(t)$ с реализацией для второй: $\phi^{(2)}(t)$ и $\psi^{(2)}(t)$. Отчетливая фиксация времени первого прохождения τ осуществлена по моменту обращения в нуль разностей $\Delta\phi(t) = \phi^{(2)}(t) - \phi^{(1)}(t)$ и $\Delta\psi(t) = \psi^{(2)}(t) - \psi^{(1)}(t)$. Для нахождения распределения $P(\tau)$ был использован ансамбль различных реализаций белых шумов $\Gamma_1(t)$ и $\Gamma_2(t)$. Показано, что если начальные условия для функций $\psi^{(1)}(0)$ и $\psi^{(2)}(0)$ выбрать близкими к нулевым, то $P(\tau)$ совпадает с распределением времен возврата и имеет степенной вид: $P(\tau) \sim \tau^{-\beta}$. Оно определяет распределение длительности низкочастотных экстремальных выбросов, которые не перекрываются и следуют один за другим. В этом смысле здесь имеется некоторая аналогия с лавинами, рассматриваемыми в моделях самоорганизованной критичности. Показатели α и β связаны между собой соотношением

$$\alpha + \beta = 2. \quad (3)$$

Пространственно распределенная система с $1/f^\alpha$ -спектром

Естественным обобщением системы (1), описывающей флуктуации при неравновесных фазовых переходах в точечной системе, на пространственно распределенный вариант было добавление к ней слагаемого $D(\nabla\phi)^2$, где D — коэффициент диффузии, определяющий пространственное взаимодействие флуктуаций.

Простейший вариант пространственно распределенной системы имеет вид [19]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial t} &= -\phi\psi^2 + \psi + D\nabla^2\phi + \Gamma_1(\mathbf{r}, t), \\ \frac{\partial\psi}{\partial t} &= -\phi^2\psi + \phi + \Gamma_2(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь ϕ и ψ имеют тот же смысл, что и ранее, но появляется их зависимость от пространственной координаты \mathbf{r} . Шумы Γ_1 и Γ_2 — δ -коррелированные и с нормальным распределением. По аналогии с (2) можно записать

$$\langle \Gamma(\mathbf{r}, t) \rangle = 0, \quad \langle \Gamma(\mathbf{r}, t)\Gamma(\mathbf{r}', t') \rangle = \sigma^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t').$$

Если ввести потенциал

$$\Phi = \frac{1}{2} \phi^2 \psi^2 - \phi\psi + \frac{1}{2} D(\nabla\phi)^2, \quad (5)$$

то систему (4) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial t} &= -\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} + \Gamma_1(\mathbf{r}, t), \\ \frac{\partial\psi}{\partial t} &= -\frac{\partial\Phi}{\partial\psi} + \Gamma_2(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

При преобразовании (5) к новым динамическим переменным $\eta = (\phi + \psi)/2$ и $\theta = (\psi - \phi)/2$ потенциал Φ примет вид

$$\Phi = \frac{1}{2}\eta^4 - \eta^2 + \frac{1}{2}\theta^4 + \theta^2 - \eta^2\theta^2 + \frac{1}{2}D(\nabla\eta)^2 + \frac{1}{2}D(\nabla\theta)^2 - D\nabla\eta\nabla\theta, \quad (6)$$

который характерен для взаимодействия докритического (с параметром порядка η) и закритического (с параметром порядка θ) фазовых переходов. Слагаемое $-\eta^2\theta^2$ в выражении (6) для потенциала Φ учитывает взаимодействие параметров порядка, а следовательно, и фазовых переходов в самом общем виде. Диффузионное слагаемое в выражении (4) играет ту же роль, что и коэффициент λ в системе (1), но в пространственно распределенной системе оно способствует кластеризации флуктуаций не только во времени, но и в пространстве.

Для численного интегрирования в одномерном случае система (4) переписывается в виде:

$$\begin{aligned} \phi_{i+1,j} &= \left(\phi_{i,j} + \frac{D}{2}\phi_{i,j-1}\Delta t + \frac{D}{2}\phi_{i,j+1}\Delta t + \psi_{i,j}\Delta t \right) \\ &\times [1 + (\psi_{i,j})^2\Delta t + D\Delta t]^{-1} + \sigma_e(p_i)_j(\Delta t)^{0.5}, \\ \psi_{i+1,j} &= (\psi_{i,j} + \phi_{i,j}\Delta t)[1 + (\phi_{i,j})^2\Delta t]^{-1} + \sigma_e(q_i)_j(\Delta t)^{0.5}, \end{aligned} \quad (7)$$

где p_i и q_i — последовательности гауссовых случайных чисел с нулевым средним и единичным стандартным отклонением, которые моделируют белый шум. Эти последовательности случайных чисел должны быть различными для разных пространственных точек j .

Дисперсия гауссовых чисел σ_e^2 связана с дисперсией белого шума соотношением $\sigma_e^2 = \sigma^2\Delta t$. В уравнениях системы (7) она вынесена в качестве коэффициента перед случайными числами с единичной дисперсией и моделирует интенсивность белого шума. Численное значение дисперсии σ_e^2 находится из условия критичности индуцированного шумом перехода. Этот переход определяется интенсивностью белого шума, когда скачком изменяется положение максимума функции распределения произведения $(\phi_{i,j})^2(\psi_{i,j})^2$.

Система (7), на первый взгляд, отличается от системы (4). Значения $\phi_{i,j}$ в первом уравнении и $\psi_{i,j}$ во втором уравнении (7) берутся не в начальной, а в конечной точке интервала разбиения времени Δt_i . Это обеспечивает устойчивость численного интегрирования при произвольных начальных условиях и любых шагах интегрирования Δt_i . Для устойчивости численного интегрирования точечной системы уже использовался этот прием [20]. При записи системы (7) подразумевается, что масштаб пространственного разбиения Δx выражен через временной шаг интегрирования Δt и включен в коэффициент диффузии D . Поэтому для системы (7) коэффициент $D \sim (\Delta t)^2$, и это следует учитывать, если в расчетах приходится менять шаг интегрирования Δt .

Граничные условия при численных расчетах, как правило, выбираются циклическими. Поскольку в пространственно распределенной системе (4) имеется первая производная по времени и вторая по пространству, то при проведении расчетов временных точек должно быть гораздо больше, чем пространственных.

На рис. 1 приведены усредненные по всем пространственным точкам временные спектры $S_\psi(f)$ и $S_\phi(f)$, которые получены из реализаций случайных флуктуаций во времени. Следует заметить, что и временные спектры в каждой пространственной точке имели такую же частотную зависимость, что и усредненные, но характеризовались большим разбросом точек. Усреднение по пространственным точкам позволяет уменьшить разброс и отчетливо выявить частотную зависимость спектра мощности. На этом же рисунке приведен усредненный по всем временным точкам пространственный спектр $S_\phi(k)$, который найден из пространственного распределения флуктуаций. Интегрирование системы (7) было проведено для системы, содержащей $M = 256$ пространственных точек при $N = 2048$ шагах интегрирования с шагом $\Delta t = 0.05$. Интенсивность внешнего шума, опре-

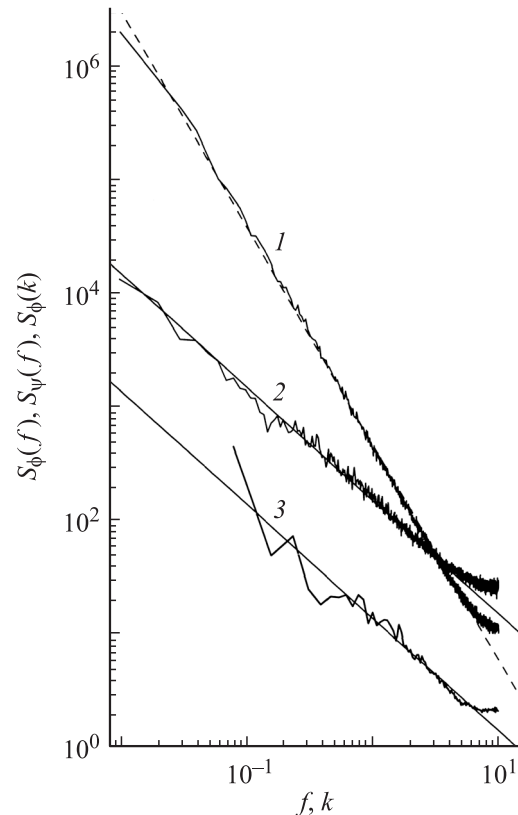


Рис. 1. Спектры $S_\psi(f)$ — 1 и $S_\phi(f)$ — 2, найденные из реализаций случайных флуктуаций и усредненные по всем пространственным точкам, и пространственный спектр $S_\phi(k)$ — 3, найденный из пространственного распределения флуктуаций и усредненный по всем временным точкам. Пунктир 1 — зависимость $S_\psi(f) \sim f^{-2}$; сплошные линии 2 и 3 — соответственно зависимости $S_\phi(f) \sim f^{-1}$ и $S_\phi(k) \sim k^{-1}$.

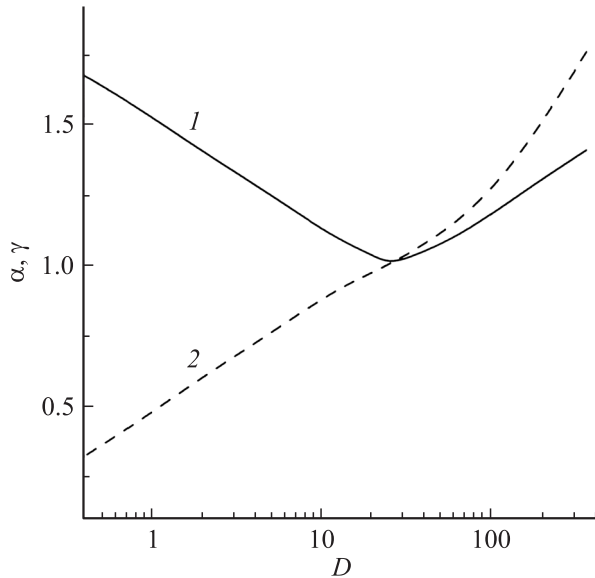


Рис. 2. Зависимость показателей α — 1 и γ — 2 от коэффициента диффузии D .

деляемая дисперсией гауссовых случайных чисел, была $\sigma_e = 0.9$, значение коэффициента диффузии $D = 25$.

При других значениях коэффициента диффузии D спектры флуктуаций для пространственно распределенной системы имеют степенную зависимость: $S_\psi(f) \sim f^{-2}$, $S_\phi(f) \sim f^{-\alpha}$ и $S_\phi(k) \sim k^{-\gamma}$. Во всем диапазоне изменения D спектр $S_\psi(f)$ обратно пропорционален квадрату частоты.

Зависимость показателей α и γ от коэффициента диффузии D приведена на рис. 2. При нулевом коэффициенте диффузии спектр $S_\phi(k)$ белый ($\gamma = 0$), как и следовало ожидать при отсутствии пространственного взаимодействия. Спектр $S_\phi(f)$ при $D = 0$ ничем не отличается от спектра $S_\psi(f)$, следовательно, показатель $\alpha = 2$. С ростом коэффициента D показатель γ увеличивается, а показатель α вначале уменьшается, достигая минимума $\alpha_m = 1$ при коэффициенте диффузии $D_m = 25$ (для выбранного в расчетах шага интегрирования $\Delta t = 0.05$), затем снова растет. Но если интенсивность белого шума не соответствует критичности индуцированного шумом перехода, т.е. если численное значение σ_e больше или меньше 0.9, то минимум α_m не достигает единицы и $\alpha_m > 1$. Величина D_m выделена и для показателя γ : при $D = D_m$ зависимость $\gamma(D)$ имеет славный перегиб.

Статистика низкочастотных временных флуктуаций

Для пространственно распределенной системы (7) также можно выделить экстремальные низкочастотные флуктуации. Чтобы найти функцию распределения $P(\tau)$ длительности этих флуктуаций, нужно, по аналогии с

работой [18], рассчитать траектории броуновских частиц для двух систем (7) с одинаковыми наборами белых шумов, но с разными начальными условиями. Начальные условия для каждой пространственной точки для этих двух систем выбирались с разными знаками, что соответствовало разным долинам потенциала. Полученные отдельные реализации случайных процессов для одной выбранной пространственной точки приведены на рис. 3. Видно, что начальные участки для реализаций $\phi_{i,j}^{(1)}$ и $\phi_{i,j}^{(2)}$, а также $\psi_{i,j}^{(1)}$ и $\psi_{i,j}^{(2)}$ различаются, но с некоторого момента времени начинают совпадать. Для каждой

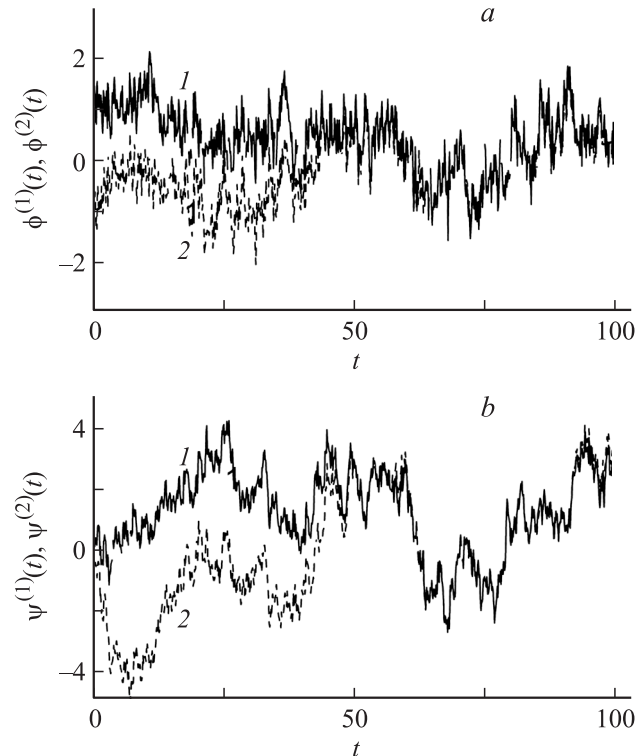


Рис. 3. Реализации случайных процессов с различными начальными условиями для одной выбранной пространственной точки: a — $\phi_{i,j}^{(1)}$, $\phi_{i,j}^{(2)}$ и b — $\psi_{i,j}^{(1)}$, $\psi_{i,j}^{(2)}$.

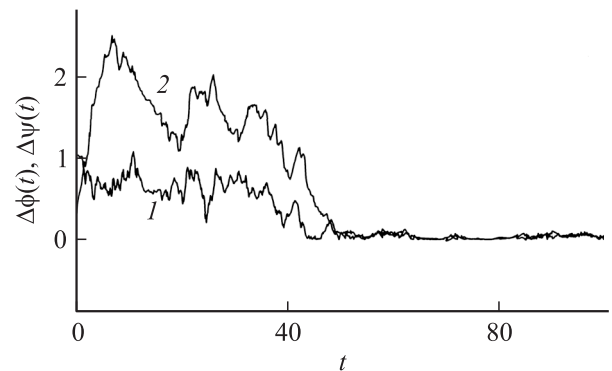


Рис. 4. Зависимость разностей случайных функций $\Delta\phi_{i,j} = \phi_{i,j}^{(2)} - \phi_{i,j}^{(1)}$ — 1 и $\Delta\psi_{i,j} = \psi_{i,j}^{(2)} - \psi_{i,j}^{(1)}$ — 2 от времени для одной выбранной пространственной точки.

пространственной точки этот момент времени свой. Он легко находится по обращению в нуль разностей случайных функций, зависящих от времени: $\Delta\phi_{i,j} = \phi_{i,j}^{(2)} - \phi_{i,j}^{(1)}$ и $\Delta\psi_{i,j} = \psi_{i,j}^{(2)} - \psi_{i,j}^{(1)}$ (рис. 4).

Обращение в нуль разностей $\Delta\phi_{i,j}$ и $\Delta\psi_{i,j}$ соответствует переходу через потенциальный барьер, а промежуток времени до перехода определяет длительность низкочастотной флуктуации. Усредненные по пространственным точкам релаксационные кривые для разностей

$$\langle \Delta\phi_i \rangle = M^{-1} \sum_j \Delta\phi_{i,j}$$

и

$$\langle \Delta\psi_i \rangle = M^{-1} \sum_j \Delta\psi_{i,j}$$

приведены на рис. 5. Такие расчеты были проведены для различных значений коэффициента диффузии D , и следовательно, для различных показателей степенной зависимости спектра мощности флуктуаций от частоты в пространственно распределенной системе. В такой системе наблюдается кластеризация флуктуаций, которую демонстрирует рис. 6 для временной развертки

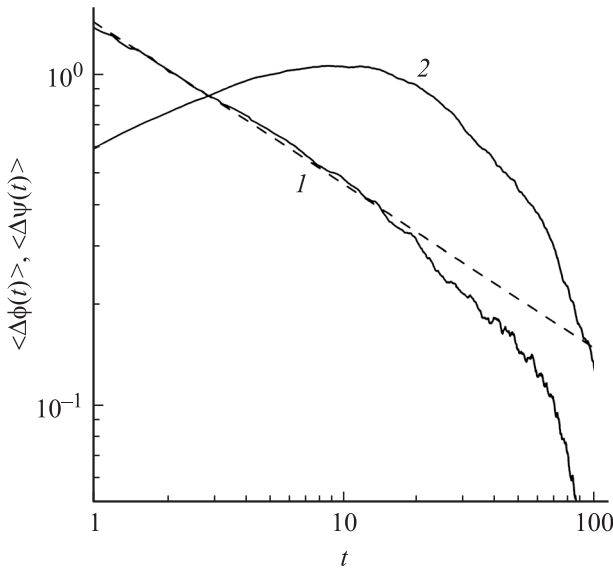


Рис. 5. Усредненные по пространственным точкам релаксационные кривые для разностей $\langle \Delta\phi_i \rangle$ — 1 и $\langle \Delta\psi_i \rangle$ — 2. Пунктир — зависимость $\sim t^{-0.5}$.

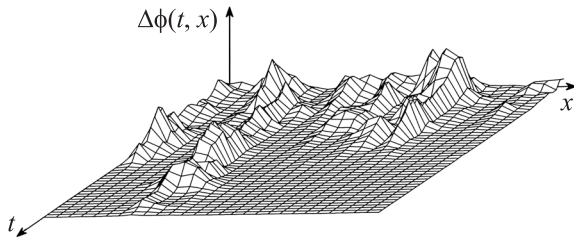


Рис. 6. Пространственно-временная развертка разности флуктуаций $\Delta\phi_{i,j}$.

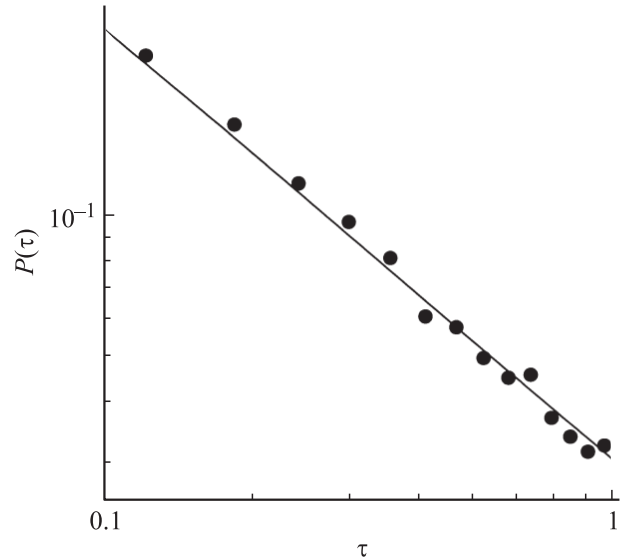


Рис. 7. Распределение флуктуаций по длительностям. Коэффициент диффузии $D = 25$. Прямая линия — зависимость $P(\tau) \sim \tau^{-1}$.

разности $\Delta\phi_{i,j}$. Это влияет на релаксацию на начальной и конечной стадии, поэтому степенной характер функции распределения $P(\tau) \sim \tau^{-\beta}$ выявляется только в промежуточной асимптотике.

На рис. 7 приведена функция распределения значений длительности низкочастотных флуктуаций для коэффициента диффузии $D = 25$. С учетом этого обстоятельства в пространственно распределенной системе выполняется и соотношение (3) между показателями α и β , которое получено в [18] для точечной системы. Для пространственно распределенной системы усредненная по времени релаксация разности на начальной стадии следует также степенной зависимости $\Delta\phi(t) \sim t^{-n}$, где показатель $n = \beta/2$, как и в точечной системе [18].

Статистика пространственных флуктуаций

Для пространственно распределенной системы можно попытаться определить также распределение флуктуаций по размерам. Для этого также рассчитывались траектории броуновских частиц для двух систем (7) с одинаковыми наборами белых шумов, но с разными граничными условиями. Выбор граничных условий был сделан так, что на одной из границ системам отвечали разные долины потенциала. Если рассматривать какой-то определенный момент времени, то по мере удаления от границы ее влияние на броуновское движение будет убывать. Начиная с некоторого расстояния координаты броуновской частицы для обеих систем начнут совпадать. Ситуация в общем аналогична той, которая была рассмотрена выше для зависимости от времени. Только теперь рассматривается зависимость от расстояния. Для

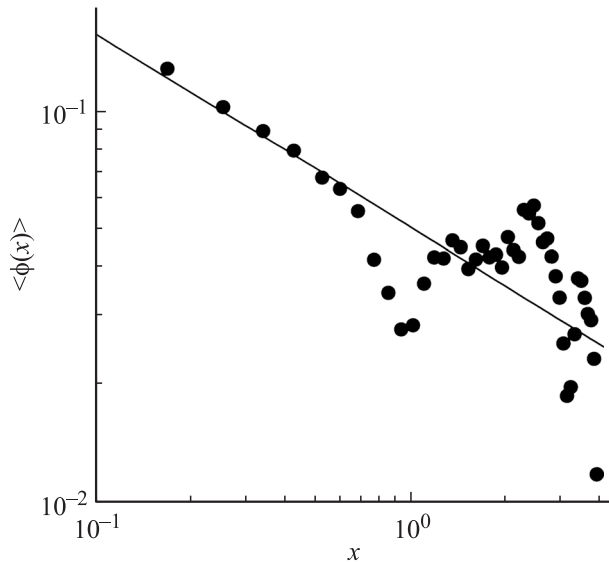


Рис. 8. Зависимость разности $\langle \Delta\phi \rangle$ от расстояния от границы x (пространственная релаксация). Коэффициент диффузии $D = 25$. Прямая линия — зависимость $\langle \Delta\phi \rangle \sim x^{-0.5}$.

уменьшения разброса пространственных точек применялось еще усреднение по ансамблю для независимых пар систем. По усредненной по времени разности функции

$$\langle \Delta\phi_j \rangle = N^{-1} \sum_i \Delta\phi_{i,j}$$

определялась пространственная релаксация (зависимость разности от расстояния от границы), которая для коэффициента диффузии $D = 25$ приведена на рис. 8. Эта зависимость и для других коэффициентов диффузии имеет степенной характер: $\Delta\phi(x) \sim x^{-m}$. Распределение флуктуаций по размерам $P(s) \sim s^{-\nu}$ для того же значе-

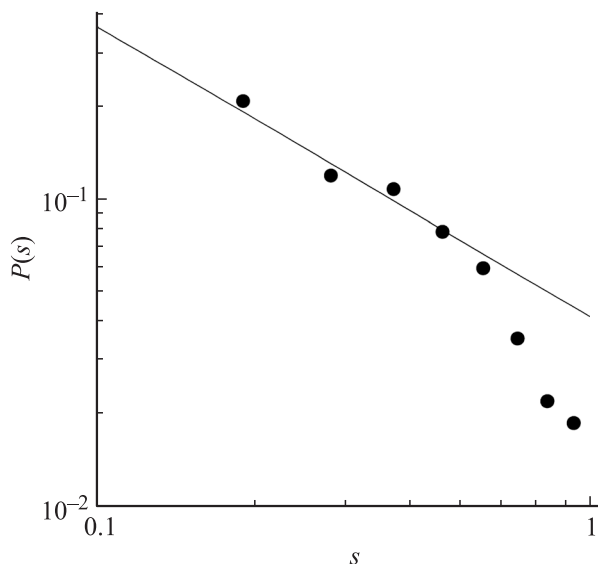


Рис. 9. Распределение флуктуаций по размерам. Коэффициент диффузии $D = 25$. Прямая линия — зависимость $P(s) \sim s^{-1}$.

ния коэффициента диффузии приведено на рис. 9. Показатели релаксации и размера связаны соотношением $m = \nu/2$, аналогичным для временных флуктуаций.

Соотношение между показателями пространственного спектра γ и распределением по размерам ν имеет вид:

$$\gamma + \nu = 2, \quad (8)$$

что также аналогично соотношению (3) для временных флуктуаций.

Заключение

В настоящей работе изучена статистика экстремальных низкочастотных флуктуаций в простейшем варианте одномерной пространственно распределенной системы с неравновесными фазовыми переходами. Показано, что для такой системы выполняются основные соотношения статистики временных флуктуаций, ранее полученные для точечной системы. Сделана оценка статистики пространственных флуктуаций. Скейлинговые соотношения между показателями спектральных зависимостей распределений длительности и размеров низкочастотных флуктуаций отличаются от моделей самоорганизованной критичности. Это означает, что они имеют разные объемы приложений.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 09-08-00244а и Программы фундаментальных исследований ОЭММПУ РАН.

Список литературы

- [1] *Климонтович Ю.Л.* Статистическая теория открытых систем. М.: Янус, 1995.
- [2] *Коган Ш.М.* // УФН. 1985. Т. 145. № 2. С. 285–328.
- [3] *Yakimov A.V., Hooge F.N.* // Physica B. 2000. Vol. 291. N 1–2. P. 97–104.
- [4] *Press W.H.* // Comments. Astrophys. 1978. Vol. 7. N 4. P. 103–119.
- [5] *Mandelbrot B.B., Wallis J.R.* // Water Resour. Res. 1968. Vol. 4. P. 909–918.
- [6] *Tong Sh., Jiang D., Wang Z., Zhu Y., Geocadin R.G., and Thakor N.V.* // Physica A. 2007. Vol. 380. P. 25–258.
- [7] *Plerou V., Gopikrishnan P., Rosenow B., Amaral L.A.N., and Stanley H.E.* // Physica A. 2009. Vol. 279. P. 443–456.
- [8] *West B.J., Geneston E.L., Grigolini P.* // Phys. Rep. 2008. Vol. 468. P. 1–99.
- [9] *Skokov V.N., Koverda V.H., Reshetnikov A.V., Skripov V.P., Mazheiko N.A., Vinogradov A.V.* // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2003. Vol. 46. P. 1879–1883.
- [10] *Колмогоров А.Н.* // ДАН СССР. 1941. Т. 30. № 4. С. 299–303.
- [11] *Паташинский А.З., Покровский В.Л.* Флуктуационная теория фазовых переходов. М.: Наука, 1982. 381 с.
- [12] *Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.* // Phys. Rev. A. 1998. Vol. 38. N 1. P. 364–374.

- [13] *Jensen H.J., Christinsen K., Fogedby H.C.* // Phys. Rev. B. 1989. Vol. 40. P. 7425–7427.
- [14] *Laurson L., Alava M.J.* // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 74. P. 066 106(5).
- [15] *Daividsen J., Schuster H.G.* // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 65. N 2. P. 026 120(4).
- [16] *Mandelbrot B.B., Van Ness J.W.* // SIAM Rev. 1968. Vol. 10. P. 422–437.
- [17] *Коверда В.П., Скоков В.Н., Скрипов В.П.* // ЖЭТФ. 1998. Т. 113. № 5. С. 1748–1757.
- [18] *Коверда В.П., Скоков В.Н.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 6. С. 8–12.
- [19] *Скоков В.Н., Коверда В.П., Решетников А.В.* // ЖЭТФ. 2001. Т. 119. № 3. С. 613–620.
- [20] *Коверда В.П., Скоков В.Н.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 11. С. 1–6.