

01;05;06

## Проникновение магнитного поля в трехмерную упорядоченную джозефсоновскую среду при малых значениях параметра пиннинга

© М.А. Зеликман

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,  
195251 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 22 мая 2009 г.)

Рассчитаны конфигурации токов и профиль магнитного поля, проникающего внутрь трехмерной упорядоченной джозефсоновской среды, при  $I < I_C$ . Для расчета использован модифицированный для образца конечной длины подход, основанный на анализе непрерывного видоизменения конфигурации, протекающего в направлении уменьшения ее потенциала Гиббса. Предложенный алгоритм позволяет найти ту конфигурацию, в которую переходит мейснеровское состояние в случае  $I < I_C$  при малом превышении внешним полем значения  $H_{\max}$ , и проследить ее развитие при дальнейшем увеличении поля.

При  $H > H_{\max}$  магнитное поле проникает внутрь образца в виде квазиоднородной последовательности плоских вихрей. При  $H$ , примерно равном  $H_0/2$ , где  $H_0$  — внешнее поле, при котором через каждую ячейку проходит один квант магнитного потока  $\Phi_0$ , плоские вихри распадаются на отдельные линейные вихри с центрами, расположенными в ячейках, соседствующих по диагонали. При дальнейшем росте поля вихревая картина уплотняется, при этом ячейки с нулевым флюксоидом, начиная от границы, постепенно „заполняются“. При приближении поля к  $H_0$  около границы начинает устанавливаться последовательность плоских вихрей с центрами в соседних рядах. При дальнейшем росте поля в приграничной области образуются последовательности линейных вихрей с двойным флюксоидом. Далее развитие ситуации повторяется с периодом  $H_0$  по внешнему полю.

### Введение

В массивных сверхпроводниках 2-го рода, помещенных во внешнее магнитное поле  $H_e$ , начиная со значения  $H_e = H_{C1}$  становится энергетически выгодным переход в смешанное состояние, когда магнитное поле частично проникает в толщу сверхпроводника в виде вихревых нитей. В то же время уравнения электродинамики формально допускают вплоть до термодинамического критического поля  $H_C$  равновесные решения мейснеровского типа с проникновением поля в тонкую приповерхностную область. Таким образом, существует возможность задержки проникновения вихрей в сверхпроводник для полей  $H_e > H_{C1}$ . С точки зрения термодинамики это явление представляет собой „перегрев“ мейснеровского состояния. Максимальное поле  $H_{S1}$ , до которого возможен этот „перегрев“, определяется как граница устойчивости метастабильного мейснеровского состояния по отношению к малым флуктуациям [1,2].

Аналогичная картина имеет место и в высокотемпературных сверхпроводниках (ВТСП). Физика происходящих в них процессов заметно отличается от того, что происходит в обычных сверхпроводниках. Важнейшую роль играет тот факт, что ВТСП состоят из сверхпроводящих гранул, в точках соприкосновения которых друг с другом возникают джозефсоновские контакты. Поэтому иной вид имеют вихри, иной физике соответствуют критические поля. В частности, характерные значения полей столь малы, что речь не может идти о переходе гранул в нормальное состояние (поэтому поле  $H_{S2}$ , до которого существует мейснеровское решение, отличается от термодинамического поля  $H_C$ ). Вихри

располагаются не в отдельных гранулах, а вовлекают в себя большое их количество, при этом токи проходят через джозефсоновские контакты между гранулами. Достаточно вспомнить, что такой контакт является существенно нелинейным, чтобы представить себе сложность возникающей картины. Добавим к этому зацепление (пиннинг) вихрей на пустотах между гранулами. Все эти моменты делают исследование поведения ВТСП во внешнем магнитном поле достаточно сложной задачей, требующей специального подхода.

В работах [3,4] была предложена простая модель гранулированного ВТСП, представляющая собой кубическую решетку, состоящую из сверхпроводящих проводов, каждый из которых содержит один джозефсоновский контакт. На базе условий квантования флюксоида в ячейках этой среды получена система уравнений для расчета структуры возможных токовых состояний. Как показали расчеты [3–5], такой модели, которую принято называть трехмерной упорядоченной джозефсоновской средой, присущи все свойства, характерные для сверхпроводников во внешнем магнитном поле: мейснеровские экранирующие токи, взаимодействующие друг с другом вихри, набор характерных полей и т.п., причем даже количественные соотношения аналогичны имеющим место в обычных и высокотемпературных сверхпроводниках. Поэтому использование этой модели целесообразно при анализе процессов, происходящих в реальных ВТСП.

В работе [5] рассмотрена устойчивость мейснеровского состояния трехмерной джозефсоновской среды относительно малых флуктуаций скачков фазы на контактах. Показано, что значение  $H_{S1}/H_{S2}$  растет с увели-

чением параметра пиннинга  $I$  и находится в пределах от 0.84 до 1, что согласуется с результатами, полученными для обычных сверхпроводников 2-го рода.

В сверхпроводниках второго рода предел мейсснеровского состояния определяется равенством энергий нормального и сверхпроводящего состояний с учетом энергии экранирующих токов и равен  $H_C$ . Если внешнее поле больше  $H_C$ , то образец переходит в нормальное состояние. В рассматриваемом случае джозефсоновской среды эти соображения неприменимы. Что происходит, если внешнее поле превысит величину  $H_{S2}$  и мейсснеровское состояние невозможно? В работе [6] предложен подход, основанный на анализе непрерывного видоизменения конфигурации, протекающего в направлении уменьшения потенциала Гиббса. Расчет показал [6], что характер вихревой картины определяется величиной так называемого параметра пиннинга  $I$ , определение которого будет дано далее. При значениях  $I$ , больших некоторого критического  $I_C$  (находящегося в диапазоне 0.7–0.8), вихри с ростом поля постепенно продвигаются от границы внутрь, а магнитное поле в глубине образца остается равным нулю. В [6] проведено подробное исследование этого случая. Если  $I < I_C$ , то такая приграничная структура может существовать лишь до значения внешнего поля  $H_{\max}(I)$ . При больших значениях поля длина приграничной конфигурации, рассчитанная по методу, использованному в [6], по ходу расчета все время увеличивается, это означает, что расчет может продолжаться бесконечно долго, а поле проникает в образец на бесконечную глубину. Однако детали этого процесса остаются неясными. Кажущаяся очевидной ситуация с установлением двумерной решетки вихрей по всему сечению образца оказывается невозможной, поскольку в этом случае поле между вихрями должно приблизительно равняться нулю. Если при  $H_e < H_{S2}$  приповерхностные мейсснеровские токи еще могут своим полем компенсировать внешнее, то при  $H_e > H_{S2}$  такая компенсация уже невозможна. Это означает, что предполагаемый вариант двумерной решетки линейных вихрей не может осуществиться. Какая же конфигурация реализуется на самом деле?

Возникают и другие вопросы. Могут ли сосуществовать в образце вихри, содержащие различное число квантов потока  $\Phi_0$ ? Реализуется ли при каком-то значении поля ситуация, когда каждая ячейка содержит целое число квантов  $\Phi_0$ , а суммарный магнитный момент образца обращается в нуль? Существует ли периодичность по внешнему магнитному полю, связанная с квантованием магнитного потока или флюксоида?

Настоящая работа посвящена поиску ответов на поставленные вопросы и детальному анализу процесса проникновения внешнего поля в среду для случая  $I < I_C$ . Пусть внешнее магнитное поле  $H_e$  увеличивается адиабатически. До значения магнитного поля  $H_{S1}$  реализуется мейсснеровское решение. Как было показано в [6], при  $H_{S1} < H_e < H_{\max}$  возникает приграничная

последовательность вихрей, полностью компенсирующая внешнее поле в глубине. Развитие ситуации при дальнейшем увеличении поля будем исследовать на базе модификации предложенного в [6] метода для образца конечной длины. В бесконечной среде (занимающей полупространство) длина приграничной конфигурации по ходу расчета все время увеличивается, что не позволяет прийти к решению за конечное время. Ограничение длины образца позволяет найти решение задачи, поскольку две симметричные конфигурации, идущие с разных концов образца, встретившись в его середине, остановятся. Пусть длина образца велика по сравнению с размерами приграничной области, тогда при расчете мейсснеровской токовой конфигурации можно считать образец бесконечным.

## Мейсснеровская конфигурация

Рассмотрим сначала токовую конфигурацию мейсснеровского типа, т.е. когда вдоль поверхности образца текут параллельные ей токи, замыкающиеся на бесконечности (рис. 1). Сила тока, протекающего в граничном слое, равна  $J_1 = J_C \sin \varphi_1$ . По мере углубления в образец имеем  $J_m = J_C \sin \varphi_m$  для  $m = 2, 3, \dots$  В глубине образца токи равны нулю, что является одним из граничных условий.

В каждой из ячеек выполняется условие квантования флюксоида [3], согласно которому сумма скачков фазы по замкнутому контуру с джозефсоновскими контактами должна равняться нормированному магнитному потоку через контур, т.е.

$$2\pi\Phi_m/\Phi_0 + \sum_k \varphi_k^{(m)} = 0, \quad (1)$$

где  $\sum_k \varphi_k^{(m)}$  — сумма скачков фазы на джозефсоновских контактах  $m$ -й ячейки с учетом знака;  $\Phi_0$  — квант магнитного потока;  $\Phi_m$  — полный магнитный поток через  $m$ -ю ячейку. Обычно в правой части условия квантования флюксоидов пишется член  $2\pi N_m$ , где  $N_m$  — целое число, равное величине флюксоида в  $m$ -й ячейке. При этом скачки фазы по модулю не должны превышать величины  $\pi$ . Не будем накладывать на них никаких

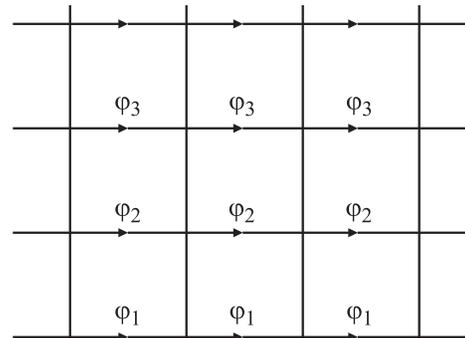


Рис. 1. Конфигурация мейсснеровского типа.

ограничений. Найдя решение, можно вычислить  $N_m$ , пересчитав фазы, как будет показано далее.

Для рассматриваемой мейсснеровской конфигурации (1) принимает вид

$$2\pi\Phi_m/\Phi_0 + \varphi_m - \varphi_{m+1} = 0, \quad (2)$$

а магнитный поток  $\Phi_m$  описывается выражением [3]

$$\begin{aligned} \Phi_m &= \mu_0(a - 2\delta) \int_{\delta}^{a-\delta} H(r) dr \\ &= \mu_0(a - 2\delta)^2 \left( \sum_{k=1}^m \frac{J_k}{a} + \frac{b}{a} (J_{m-1} - J_m) - H_e \right), \quad (3) \end{aligned}$$

где параметр

$$b = \frac{1}{2\pi(1 - 2\delta/a)} \ln \frac{1 - \exp(-2\pi(1 - \delta/a))}{1 - \exp(-2\pi\delta/a)}.$$

Далее будем рассматривать такие значения  $I$  и  $b$ , что  $Ib \ll 1$ , где  $I$  — параметр пиннинга, определяемый выражением (4). Тогда после подстановки (3) в (1) появляется возможность пренебречь вторым членом в (3). Отметим, что такое рассмотрение справедливо также для искусственной структуры, созданной из сверхпроводящих нитей, склеенных друг с другом по всей длине, так что джозефсоновскими контактами являются поверхности соединения нитей. Внешнее поле направлено вдоль нитей. Поперечное сечение структуры должно представлять собой квадратную решетку, при этом форма ячейки необязательно должна быть квадратной, в частности, она может быть образована нитями круглого сечения. Легко показать, что в этой ситуации поле в ячейках однородно и  $b = 0$ .

Подставив (3) в (2) для различных  $m$  и вычтя из уравнения для  $(m-1)$ -й ячейки уравнение для  $m$ -й, получим следующую систему разностных уравнений:

$$\varphi_{m+1} - 2\varphi_m + \varphi_{m-1} = I \sin \varphi_m \quad (m \geq 2), \quad (4)$$

где  $I = 2\pi\mu_0(a - 2\delta)^2 J_C / a \Phi_0$  — так называемый параметр пиннинга.

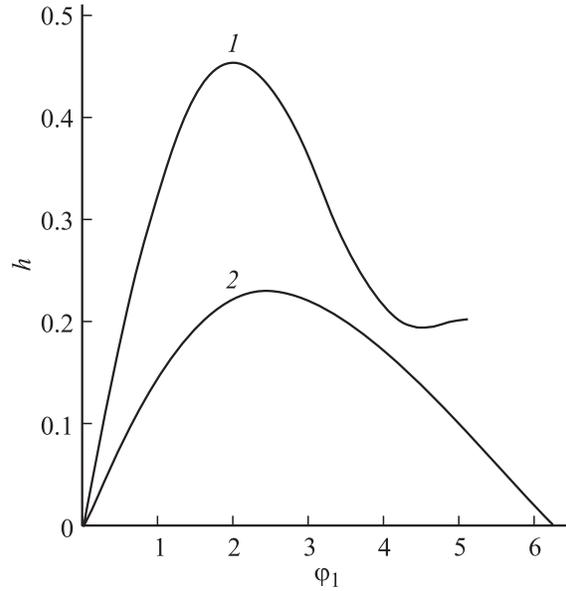
В качестве граничных условий к (4) используем стремление к нулю  $\varphi_m$  при стремлении  $m$  к бесконечности, а также условие (1) для  $m = 1$ , имеющее вид

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -I \sin \varphi_1 + 2\pi h, \quad (5)$$

где  $h = H_e / H_0$  — нормированная напряженность внешнего поля,  $H_0 = \Phi_0 / \mu_0 S$  — значение внешнего поля, при котором через каждую ячейку площадью  $S = (a - 2\delta)^2$  проходит один квант магнитного потока  $\Phi_0$ .

Найдем точное решение системы (4). Представим ее в виде рекуррентного закона

$$\varphi_{m+1} = 2\varphi_m - \varphi_{m-1} + I \sin \varphi_m \quad (m \geq 2). \quad (6)$$



**Рис. 2.** Зависимость нормированной напряженности внешнего магнитного поля от скачка фазы на участке, ближайшем к границе, для  $I = 1.6$  (1) и  $0.5$  (2).

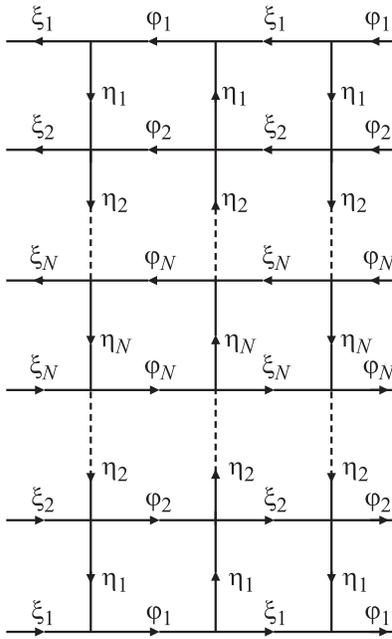
Задавая значения  $\varphi_1$ , будем численно искать соответствующие им возможные значения  $\varphi_2$ , при которых существует решение в виде монотонно убывающей с ростом  $m$  комбинации значений  $\varphi_m$ . Из уравнения (5) найдем соответствующее полученному решению значение нормированной напряженности внешнего магнитного поля  $h$ .

На рис. 2 приведены полученные графики зависимости  $h(\varphi_1)$  для некоторых значений  $I$ . Начальный участок кривой до максимума соответствует мейсснеровскому режиму. Максимально возможное значение  $h_{S2}$  соответствует величине магнитного поля  $H_{S2}$ , выше которой мейсснеровское решение отсутствует. Развитие ситуации при дальнейшем увеличении поля будем исследовать на базе анализа потенциала Гиббса системы.

## Методика вычислений

В работе [5] было показано, что флуктуации, относительно которых мейсснеровская конфигурация неустойчива, представляют собой быстро затухающие вглубь (на нескольких слоях) периодически повторяющиеся знакопеременные структуры шириной в одну ячейку. Это дает основания предположить, что в процессе развития неустойчивости распределение скачков фазы будет сохранять такую же геометрию (рис. 3). Равенство модулей и противоположность знаков скачков фазы в соседних вертикальных участках следует из периодичности конфигурации и условия непрерывности токов в узлах.

Будем рассматривать образец конечной длины в  $2N + 1$  ячеек. Пусть распределение фаз симметрично



**Рис. 3.** Распределение скачков фазы в рассматриваемой конфигурации.

относительно центральной плоскости образца, как показано на рис. 3.

Потенциал Гиббса такой конфигурации высотой в 1 м записывается в виде [5]

$$G = E_J + E_H - \int BH dV, \quad (7)$$

где  $E_J$  и  $E_H$  — джозефсоновская и магнитная энергии единицы длины (вдоль  $\mathbf{H}_e$ ), равные

$$E_J = \frac{E_C}{a} \sum_k (1 - \cos \psi_k) = IE_0 \sum_k (1 - \cos \psi_k), \quad (8)$$

$$E_H = \sum_i \frac{B_i^2}{2\mu_0} V_i = E_0 \frac{1}{2} \sum_i \left( \sum_l \psi_{il} \right)^2, \quad (9)$$

где  $E_C = \Phi_0 J_C / 2\pi$  — энергия джозефсоновского контакта;  $B_i = \Phi_i / S$  — магнитная индукция в  $i$ -й ячейке;  $B_i^2 / 2\mu_0$  — плотность магнитной энергии в  $i$ -й ячейке;  $V_i = S$  — объем единицы длины;  $E_0 = \Phi_0^2 / 4\pi^2 \mu_0 S$  — нормировочная постоянная. Суммирование по  $k$  в (8) ведется по всем джозефсоновским контактам, по  $i$  в (9) — по всем ячейкам, по  $l$  во внутренней сумме в (9) — по всем четырем контактам  $i$ -й ячейки (с учетом знака). Обозначение  $\psi_m$  введено для любого скачка фазы с индексом  $m$ . При выводе (9) использовано условие квантования флюксоида (1).

Как известно, в рассматриваемой геометрии термодинамическая напряженность магнитного поля  $H$  во всех точках одна и та же и равна напряженности внешнего поля  $H_e$ , поэтому последний член в (7) можно записать

в виде

$$H_e \sum_i \Phi_i = \frac{H_e \Phi_0}{2\pi} \sum_i \sum_l \psi_{il} = \frac{H_e \Phi_0}{2\pi} \sum_n \psi_{1n}, \quad (10)$$

где  $\psi_{il}$  — скачок фазы в  $l$ -м контакте  $i$ -й ячейки, а сумма по  $n$  берется по всем контактам граничных рядов. При выводе (10) учтено, что при суммировании по всем ячейкам все значения  $\psi_{il}$  для контактов внутри конфигурации входят в сумму дважды, причем с разными знаками, поэтому остается только суммирование по граничным контактам.

С учетом вышесказанного выражение для потенциала Гиббса принимает вид

$$G = E_0 \left( \sum_{k=1}^{N-1} (\varphi_k - \varphi_{k+1} + 2\eta_k)^2 + \sum_{k=1}^{N-1} (\xi_k - \xi_{k+1} - 2\eta_k)^2 + 2(\varphi_N + \eta_N)^2 + 2(\xi_N - \eta_N)^2 + 2I \sum_{k=1}^N (4 \cos \varphi_k - \cos \xi_k - 2 \cos \eta_k) - 2I(1 - \cos \eta_N) - 4\pi h(\varphi_1 + \xi_1) \right). \quad (11)$$

Далее будем измерять  $G$  в единицах  $E_0$ . Будем трактовать величину  $G$  как высоту (или потенциальную энергию) горного рельефа, заданного на многомерном множестве координат  $\varphi_i, \xi_i$ . Установившаяся при каком-либо значении внешнего поля  $h$  меиснеровская конфигурация (набор координат) соответствует минимуму энергии (впадине) в рельефе. С ростом  $h$  рельеф постепенно изменяется, меиснеровская конфигурация слегка смещается, но ей продолжает соответствовать локальный минимум. При достижении магнитным полем значения  $h_{S1}$  этот минимум становится седловой точкой. Если теперь система „сделает шаг“ в соответствующем направлении, т.е. получит нужную флуктуацию, то она окажется на склоне рельефа. Дальнейшее изменение формы этой конфигурации можно рассматривать как „скатывание“ по рельефу с уменьшением „потенциальной энергии“, в результате которого система окажется в другом минимуме, в котором конфигурация уже не будет меиснеровской. Пусть этот процесс происходит как результат большого количества маленьких шагов. Логично предположить, что в каждой „точке“ скатывание происходит вдоль линии наиболее быстрого спуска, т.е. вдоль градиента функции  $G$ . Это значит, что при каждом шаге все „координаты“  $\psi_i$  (т.е.  $\varphi_i, \xi_i$ ) получают приращения, пропорциональные соответствующей проекции градиента:

$$\Delta \psi_i = - \frac{\partial G}{\partial \psi_i} \delta,$$

где  $\delta > 0$  — малый постоянный множитель, задающий величину шага.

Далее вычисляем все  $\frac{\partial G}{\partial \psi_i}$  в новой точке, т.е. при новых значениях  $\psi_i$ , и производим следующий шаг. Эта процедура повторяется до тех пор, пока не придем к новой устойчивой конфигурации, находящейся в минимуме рельефа. Этим завершается первый этап расчета.

На втором этапе анализируется развитие ситуации при дальнейшем увеличении магнитного поля. Если  $h$  увеличивается на какую-то малую величину, это приведет к некоторому видоизменению рельефа, в результате чего конфигурация, соответствовавшая минимуму прежнего рельефа, теперь окажется на склоне нового и „скатится“ в новый минимум. Последовательно увеличивая  $h$ , можно исследовать распределение скачков фазы  $\varphi_i, \xi_i$ , а значит, токов и магнитных полей, во всем диапазоне изменения внешнего поля.

Перед тем как записать выражения для  $\frac{\partial G}{\partial \psi_i}$ , учтем условия непрерывности токов в узлах. Последовательно записав эти условия в узлах каждого ряда, начиная от граничного, получим

$$\sin \eta_k = \sum_{i=1}^k (\sin \varphi_i - \sin \xi_i) \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (12)$$

откуда можно выразить значения  $\eta_k$  в виде функций от  $\varphi_i$  и  $\xi_i$

$$\eta_k = \arcsin \sum_{i=1}^k (\sin \varphi_i - \sin \xi_i). \quad (13)$$

Отметим, что в рассматриваемой геометрии исчезает граничное условие равенства нулю магнитного поля в глубине контакта, которое было важным для бесконечного образца [6].

Тогда выражение для „проекций градиента“  $G$  по осям  $\varphi_i$  принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \varphi_i} = & 2 \left( 2\varphi_i - \varphi_{i-1} - \varphi_{i+1} + 2(\eta_i - \eta_{i-1}) + I \sin \varphi_i \right. \\ & + 2 \cos \varphi_i \sum_{k=i}^{N-1} \frac{\varphi_k - \varphi_{k+1} - \xi_k + \xi_{k+1} + 4\eta_k + I \sin \eta_k}{\cos \eta_k} \\ & \left. + \frac{\cos \varphi_i}{\cos \eta_N} (2\varphi_N - 2\xi_N + 4\eta_N + I \sin \eta_N) \right) \quad (2 \leq i \leq N-1), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \varphi_1} = & 2 \left( -2\pi h + \varphi_1 - \varphi_2 + 2\eta_1 + I \sin \varphi_1 + 2 \cos \varphi_1 \right. \\ & \times \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\varphi_k - \varphi_{k+1} - \xi_k + \xi_{k+1} + 4\eta_k + I \sin \eta_k}{\cos \eta_k} \\ & \left. + \frac{\cos \varphi_1}{\cos \eta_N} (2\varphi_N - 2\xi_N + 4\eta_N + I \sin \eta_N) \right), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \varphi_{N+1}} = & 2 \left( 3\varphi_N - \varphi_{N-1} + 2(\eta_N - \eta_{N-1}) + I \sin \varphi_N \right. \\ & \left. + \frac{\cos \varphi_N}{\cos \eta_N} (2\varphi_N - 2\xi_N + 4\eta_N + I \sin \eta_N) \right). \end{aligned} \quad (16)$$

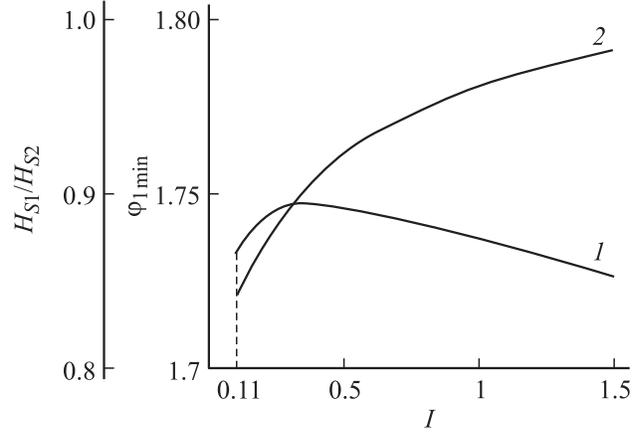


Рис. 4. Зависимости величин  $\varphi_{1 \min}$  (1) и  $H_{S1}/H_{S2}$  (2) от параметра  $I$ .

Производные по  $\xi_i$  можно получить из выражений (14)–(16), меняя местами все  $\varphi_i$  и  $\xi_i$  и поменяв везде знак у  $\eta_i$  на обратный.

На рис. 4 приведены полученные в [5] графики зависимостей от  $I$  величины  $h_{S1}/h_{S2}$ , а также  $\varphi_{1 \min}$ , соответствующей значению  $h_{S1}$ . В качестве начальной точки алгоритма возьмем мейсснеровскую конфигурацию при внешнем поле, немного превышающем  $h_{S1}$ . Для этого рассчитаем мейсснеровскую конфигурацию по алгоритму (6) для начального значения, чуть большего  $\varphi_{1 \min}$  для выбранного  $I$ . Далее дадим величинам  $\varphi_k$  и  $\xi_k$  для малых  $k$  небольшие приращения, соответствующие неустойчивой флуктуации [5] при внешнем поле, равном  $h_{S1}$ . Например, в табл. 2 в [5] приведены рассчитанные для  $I = 1$  и 0.1 величины таких приращений, нормированные на „амплитуду“ флуктуации. Для использованного в настоящей работе значения  $I = 0.7$  расчет дает 0.3101, 0.0609, 0.0098, 0.0015. Умножим эти числа на какую-то малую „амплитуду“, например 0.001, добавим полученные значения к соответствующим  $\varphi_k$  и  $\xi_k$  и предоставим возможность „точке“ двигаться по „линии наискорейшего спуска“, как это объяснялось выше. В смысле программирования это означает задать цикл, в каждом шаге которого новые значения  $\varphi_m$  и  $\xi_m$  при  $1 \leq m \leq N$  вычисляются по формуле  $\psi_m = \psi_m - \frac{\partial G}{\partial \psi_m} \delta$  с учетом (14)–(16). В конце концов придем к конфигурации, в которой все производные  $\partial G / \partial \psi_i$  обратятся в нуль, т.е. будут выполнены условия (1). Это и есть искомая равновесная конфигурация, отличающаяся от исходной мейсснеровской. Она является итогом первого этапа расчета. Начиная от нее, как говорилось выше, можно дать приращение  $\Delta h$  магнитному полю, проследить переход системы в новое равновесное состояние и т.д.

Выполнение условий (1) будем проверять, вычисляя магнитное поле  $h_m = \Phi_m / \Phi_0$  внутри  $m$ -й ячейки по

формуле

$$2\pi h_m = -2\pi h + I \sum_{i=1}^m \sin \psi_i. \quad (17)$$

Такая проверка показывает, что условия (1) с высокой точностью выполняются в конце как первого этапа, так и каждого цикла расчетов (при новом значении  $h$ ) на втором этапе.

## Результаты расчетов, их интерпретация и анализ

Критическое значение параметра пиннинга  $I_C$ , вычисленное в работе [6], находится в диапазоне 0.7–0.8. На рис. 5 приведены полученные в [6] зависимости  $h_{S1}(I)$  (1),  $h_{S2}(I)$  (2) и  $h_{\max}(I)$  (3). Кривая  $h_{S1}(I)$  начинается от  $I = 0.1$ , поскольку, как было показано в [5], при  $I < 0.1$  неустойчивость отсутствует.

Для исследования было выбрано значение  $I = 0.7 < I_C$ , при котором  $h_{S1} = 0.260$ ,  $h_{S2} = 0.277$ ,  $h_{\max} = 0.318$ . Длина образца составляла  $2N - 1 = 59$  ячеек. Компьютерные расчеты полностью подтвердили возможность использования предложенного алгоритма для расчета проникновения поля в среду. Действительно, постепенным увеличением значения  $h$  от  $h_{S1} = 0.260$  удастся проследить постепенное изменение конфигурации токов, причем при каждом  $h$  найденные конфигурации удовлетворяют условиям (1). Пока  $h < h_{\max}$ , расчет при любом значении внешнего поля  $h$  (которое является постоянным параметром на каждом этапе расчета) приводит к приграничной конфигурации конечной длины. Эта длина увеличивается с ростом параметра  $h$ . При  $h > h_{\max}$  токовая конфигурация теряет характер приграничной структуры и распространяется на все сечение образца.

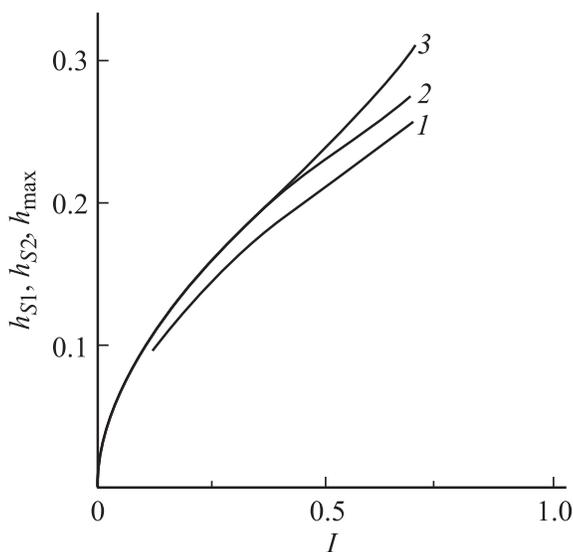


Рис. 5. Зависимости  $h_{S1}(I)$  (1),  $h_{S2}(I)$  (2) и  $h_{\max}(I)$  (3).

Получающиеся решения имеют период вдоль границы, равный двум ячейкам (см. рис. 3). Будем далее называть конфигурацию шириной в две ячейки, периодическое повторение которой дает искомые токовые распределения, основой. Основа состоит из двух столбцов. При исследовании конфигурации основы оказывается удобной интерпретация ее как последовательности вихрей, проникших в образец. При этом анализ распределения скачков фазы [6] показывает, что центры вихрей находятся в тех ячейках, в которых  $\psi_m$  (т.е.  $\varphi_m$  или  $\xi_m$ ) впервые (если двигаться из глубины) превосходят значения  $2\pi K + \pi$  ( $K$  — целое число). Отсюда следует, что для трактовки картины как последовательности вихрей нужно каждый раз, как только  $\psi_m$  превосходит  $\pi$ , вычитать из него целое число раз по  $2\pi$ , так, чтобы все  $|\psi_m| < \pi$ . При этом количество вычитенных  $2\pi$  минус аналогичная величина на предыдущем разе даст значение флюксоида в соответствующей ячейке.

Говоря о вихрях, следует учитывать важное замечание: вихрем обычно называют самоподдерживающуюся токовую структуру, центральная ячейка которой содержит флюксонид, отличный от нуля [3,4]. При этом имеется в виду, что внешнее поле отсутствует или экранировано за счет экранирующих поверхностных токов, как это происходит в меиснеровском состоянии. Тогда соответствующий флюксонид создается самими токами вихря. Если внешнее магнитное поле не равно нулю, то флюксонид создается и внешним полем, и полем токов. При этом флюксонид, создаваемый самими токами, может иметь любое значение, в зависимости от величины внешнего поля, и по направлению может как совпадать, так и быть противоположным внешнему, лишь бы доводить суммарный флюксонид до целого числа. Из сказанного ясно, что такие объекты не вполне правильно называть вихрями. Было бы точнее говорить о флюксонидах, содержащихся в ячейках. Однако, имея в виду отмеченные выше отличия, все же будем и далее использовать термин „вихри“.

На рис. 6 изображены основы, полученные на базе предложенного алгоритма при  $I = 0.7$  для различных значений  $h$ , приведенных в нижней строке. Нижний ряд на рис. 6 соответствует границе образца, а верхний — его середине. Ячейки с флюксонидом, равным единице, обозначены крестиками. Видно, что при  $h < h_{\max} = 0.318$  в обоих столбцах основы от границы вглубь выстраиваются две различные вихревые последовательности, длина которых растет с увеличением поля. При  $h > h_{\max}$  вихри заполняют все сечение образца. Заметим, что отдельные вихри существуют лишь в самой внутренней части конфигурации. В основном же, вихри располагаются парами (с центрами в соседних ячейках), что соответствует плоским вихрям, рассмотренным в [3,4], а также вихрям в длинном джозефсоновском контакте [7,8]. До значения  $h = 0.477$  конфигурации представляют собой квазиоднородные последовательности таких плоских вихрей, расстояния между которыми незначительно отклоняются от среднего значения,

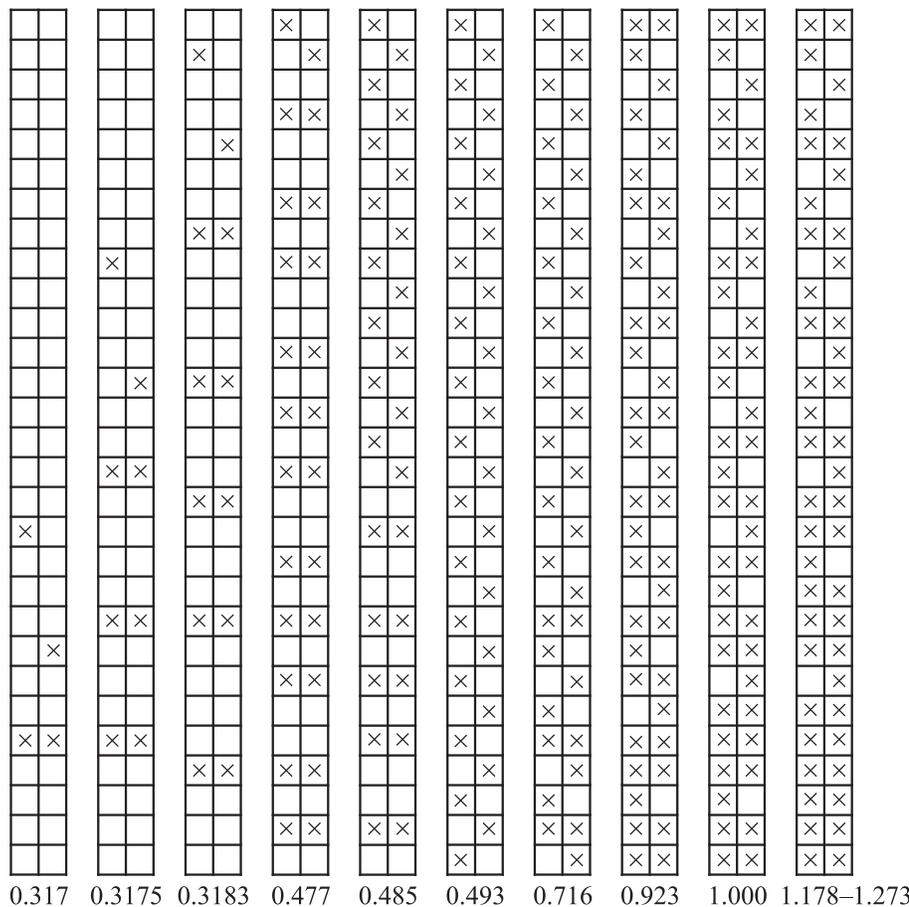


Рис. 6. Вихревые конфигурации основы при различных значениях внешнего поля  $h$  (они указаны внизу).

убывающего с ростом  $h$ . Только в самой середине образца существуют отдельные (неспаренные) линейные вихри, что и отличает ситуацию от рассмотренной в [8]. При  $h > 0.477$  пары вихрей распадаются на отдельные линейные вихри с центрами, расположенными в ячейках, соседствующих по диагонали. Этот процесс начинается от середины и с ростом  $h$  распространяется к границе. К значению  $h = 0.493$  решетка линейных вихрей с центрами в соседних по диагонали ячейках устанавливается по всему сечению образца. При дальнейшем росте поля вихревая картина уплотняется, при этом некоторые (не все) „пустые“ (т.е. с нулевым флюксоидом) ячейки, начиная от границы, постепенно „заполняются“.

Отметим следующий факт. При  $h = 1$  поле таково, что магнитный поток через каждую ячейку, созданный внешним полем, равен  $\Phi_0$ . При этом система уравнений, описывающая задачу, может быть удовлетворена решением, при котором все ячейки содержат единичный флюксоид, а все токи и суммарный магнитный момент всего контакта обращаются в нуль. Однако это лишь одно из бесчисленного множества возможных решений системы, и предыстория развития, т.е. адиабатическое увеличение внешнего поля, не дает ему возможности

реализоваться, так как к моменту, когда  $h = 1$ , в образцах еще существуют ячейки с нулевым флюксоидом (см. рис. 6). Поэтому ситуация развивается следующим образом.

При  $h \approx 0.923$  около границы начинает устанавливаться последовательность пар вихрей с центрами в соседних рядах. При дальнейшем увеличении  $h$  длина этой последовательности растет и достигает максимальной длины в 6 рядов при  $h$ , находящемся в диапазоне 1.178–1.273. При  $h > 1.273$  можно было бы ожидать дальнейшего роста длины этой последовательности, но при таких полях используемый алгоритм перестает работать, поскольку сумма в (14) становится больше единицы. Для объяснения этого факта учтем следующие соображения.

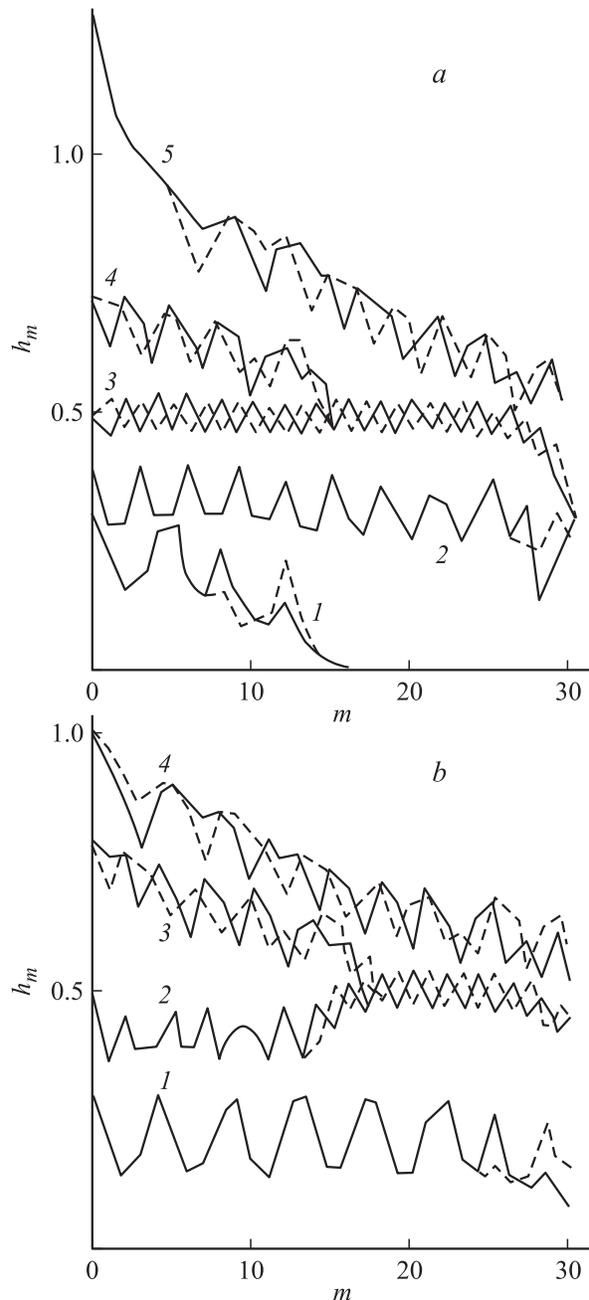
В работах [7,8] проведено исследование проникновения внешнего поля в длинный периодически модулированный джозефсоновский контакт. Как с математической, так и с физической точки зрения, процессы, происходящие в таком контакте, имеют много общего с рассматриваемыми в настоящей работе. В [8] показано, что устанавливающиеся токовые конфигурации периодичны по внешнему полю  $h$  с периодом 1.

Есть все основания ожидать такой же периодичности и в рассматриваемой задаче. Это значит, что ситуация при  $h = 1.273$  должна быть такой же, как и при  $h = 0.273$ . Но граница устойчивости мейснеровской конфигурации  $h_{S1} = 0.260$ , т.е. при  $h > 0.260$  возникает неустойчивость, приводящая к образованию вихрей с флюксоидом, равным единице, в приграничной области. Предполагаемая периодичность по внешнему полю предсказывает, что при  $h > 1.260$  в образце должны начать образовываться вихри с флюксоидом, равным двум. Казалось бы, возникающие при этом конфигурации должны получаться из расчета, точно так же, как это было при возникновении вблизи границы первых вихрей с единичным флюксоидом. Однако следует учитывать, что при  $h = 0.260$  конфигурация истинно мейснеровская, т.е. все ячейки обладают нулевым флюксоидом, а при  $h = 1.260$  не все ячейки внутри образца содержат единичный флюксоид, в некоторых он равен нулю. Из-за этого различия конфигураций образование вихрей с флюксоидом, равным двум, начинается только при  $h > 1.273$ , а не при 1.260. Это также объясняет, почему алгоритм расчета, эффективный при единичном флюксоиде, может не работать при рассмотрении вихрей с флюксоидом, равным двум. Отметим, что при  $I = 0.7$  граница мейснеровского состояния  $h_{S2} = 0.277$ , т.е. при соблюдении периодичности мейснеровский режим в области  $h > 1.277$ , в принципе, реализоваться не может.

Расчет при  $h > 1.273$  произвести не удастся. Однако исходя из соображений периодичности и из аналогии с проникновением поля в длинный джозефсоновский контакт [8] можно предсказать, что вблизи границы образца начнут возникать вихри с двойным флюксоидом. Сначала в глубине образца еще будут существовать ячейки с нулевым флюксоидом — остатки конфигураций рис. 6. При  $h > 1.318$  вихри с двойным флюксоидом распространятся на весь образец, при этом в нем не останется ячеек с нулевым флюксоидом.

При дальнейшем росте  $h$  ситуация будет аналогична изображенной на рис. 6 со сдвигом по  $h$  на 1, с учетом того что в ячейках, не содержащих крестов на рис. 6, флюксоид будет равен единице, а в ячейках с крестами — двум. Далее все будет развиваться в соответствии с рис. 6 с периодом 1 по  $h$ . Потом в образце начнут проникать вихри с флюксоидом, равным трем, и т.д. Таким образом, одновременно в образце могут существовать вихри с флюксоидами, различающимися не более, чем на 2. Можно также предположить, что периодичность картины с проникновением вихрей, обладающих флюксоидом 3 и более, будет более строгой, чем при переходе от единичного флюксоида к двойному, поскольку конфигурации, соответствующие изменению  $h$  на единицу, не будут иметь тех заметных различий, о которых шла речь в предыдущем абзаце.

На рис. 7 приведены графики зависимостей полей  $h_m$  в ячейках основы, рассчитанных по формуле (17), от расстояния ячеек от границы. Крайнее левое значение ( $m = 0$ ) на графиках равно внешнему полю  $h$ . Если поля



**Рис. 7.** Зависимости магнитного поля в ячейке от расстояния до границы в двух столбцах основы для различных значений внешнего поля. Сплошные кривые соответствуют одному столбцу основы, пунктирные — другому. *a*:  $h = 0.317$  (1); 0.400 (2); 0.493 (3); 0.732 (4); 1.273 (5); *b*:  $h = 0.3183$  (1); 0.485 (2); 0.796 (3); 1 (4).

в соседних ячейках двух рядов основы не одинаковы, то кривая для одного ряда представлена сплошной линией, а для другого — пунктиром. Вихревая интерпретация позволяет объяснить поведение этих кривых в соответствии с рис. 6. При  $h < 0.260$  наблюдается эффект Мейснера, т.е. токи и магнитное поле существуют только в приграничной области. При  $0.260 < h < 0.318$

имеются приграничные структуры в виде последовательности вихрей вблизи границы. Примером являются кривые 1 на рис. 7, а ( $h = 0.317$ ). Видно, что в глубь образца вихри не проходят. При  $h > 0.318$  в процесс вовлекается все сечение образца, причем поле проникает внутрь его в виде последовательности плоских вихрей [3,4,7,8], расстояния между которыми незначительно отклоняются от среднего значения, постепенно уменьшающегося с ростом  $h$ . Примерами таких ситуаций являются кривые 1 на рис. 7, б ( $h = 0.3183$ ) и 2 — на рис. 7, а ( $h = 0.4$ ). При  $h = 0.485$  (кривые 2 на рис. 7, б) плоские вихри, начиная от середины образца, распадаются на линейные вихри с центрами, расположенными в ячейках, соседствующих по диагонали. С ростом  $h$  этот процесс распространяется к границе, и к значению  $h = 0.493$  (3 на рис. 7, а) решетка линейных вихрей с центрами в соседних по диагонали ячейках устанавливается по всему сечению образца. Такая конфигурация сохраняется до значения  $h = 0.668$ . При дальнейшем росте поля линейные вихри, начиная от границы, заполняют некоторые пустые ячейки (4 на рис. 7, а для  $h = 0.732$  и 3 на рис. 7, б — для  $h = 0.796$ ). На этой стадии в области, до которой такое заполнение еще не дошло, поле является квазиоднородным, но там, где заполнение уже произошло, поле в среднем увеличивается с приближением к границе. При  $h \approx 0.8$  процесс такого заполнения доходит до середины образца (с обеих сторон), после чего областей квазиоднородного поля в образце не существует, везде поле в среднем убывает от границы вглубь (4 на рис. 7, б для  $h = 1$  и 5 на рис. 7, а — для  $h = 1.273$ ). Это убывание поля внутрь образца можно объяснить тем, что с ростом внешнего поля изменение в виде отдельных флюксоидов проникает от границы внутрь образца постепенно, т.е. чем ближе к границе, тем меньше ячеек с нулевым флюксоидом. В случае плоских вихрей [8] соответствующее внешнему полю изменение конфигурации происходит сразу во всем образце.

При  $h > 1.273$  расчет произвести не удастся. Можно предположить, что ситуация будет развиваться аналогично случаю длинного джозефсоновского контакта [8], т.е. сначала будут образовываться вихри с двойным флюксоидом около границы, и графики будут представлять собой некую суперпозицию кривых 1 и 5 рис. 7, а. При  $h > 1.318$  такие вихри распространятся на весь образец, при этом в нем не останется ячеек с нулевым флюксоидом. Далее будут повторяться графики рис. 7, а и 7, б с периодом 1 по  $h$  и  $h_m$ .

Нормированную на  $B_0 = \mu_0 H_0$  магнитную индукцию  $b$  определяемую как среднее значение магнитного поля в образце, найдем как сумму значений поля  $h_m = \Phi_m / \Phi_0$  по всем ячейкам обоих столбцов основы, деленную на число этих ячеек, равное  $2(2N - 1)$ . Аналогично (10) получим

$$b = B/B_0 = (\varphi_1 + \xi_1)/2\pi(2N - 1). \quad (18)$$

На рис. 8 приведена зависимость средней индукции  $b$  в образце от внешнего поля  $h$  (1).

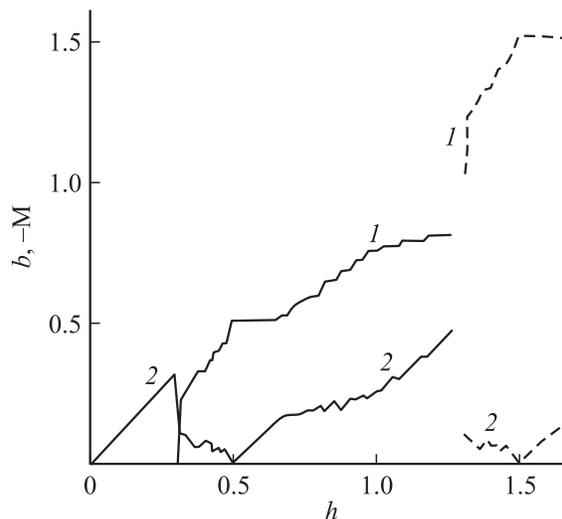


Рис. 8. Зависимости средней индукции  $b$  (кривая 1) и магнитного момента единицы объема —  $M$  (2) от внешнего поля  $h$ .

Намагниченность  $M$  найдем из соотношения  $M = b - h$ . На рис. 8 приведен график зависимости величины  $-M$  от магнитного поля  $h$  (2). Заслуживает внимания факт обращения намагниченности в нуль при  $h \approx 0.5$ . При дальнейшем увеличении  $h$  начиная со значения  $h \approx 1.318$  можно ожидать периодического поведения обеих зависимостей с периодом по  $h$ , равным единице (а кривая 1 еще и с периодом 1 по  $b$ ), как это показано пунктиром на рис. 8.

Расчеты, проведенные для других значений параметра пиннинга, дают похожие результаты. Отметим следующие особенности.

1) С уменьшением  $I$  ( $I = 0.5, 0.3$ ), снижается крутизна убывания поля с продвижением в глубь образца на участках типа кривых 4 и 5 рис. 7, а. При  $I = 0.2$  эта крутизна равна нулю. Эти факты можно объяснить тем, что с уменьшением пиннинга отдельным флюксоидам становится проще проникать в глубь от границы.

2) При  $I = 0.2$  пары плоских вихрей не распадаются на отдельные линейные вихри с центрами в ячейках, соседствующих по диагонали, как это происходит при больших значениях  $I$ . С ростом поля последовательность плоских вихрей становится все более плотной, и после того как расстояния между ними уменьшаются до одной ячейки, „пустые“ (т.е. с нулевым флюксоидом) ячейки начиная от границы постепенно „заполняются“.

3) При малых значениях параметра пиннинга ( $I < 0.1$ ) неустойчивость не обнаруживается. Поведение среды со столь малыми значениями  $I$  требует отдельного исследования.

## Заключение

Расчитаны конфигурации токов и профиль магнитного поля, проникающего внутрь трехмерной упорядо-

ченной джозефсоновской среды, при  $I < I_C$ . Для расчета использован модифицированный для образца конечной длины подход, основанный на анализе непрерывного видоизменения конфигурации, протекающего в направлении уменьшения ее потенциала Гиббса. Предложенный алгоритм позволяет найти ту конфигурацию, в которую переходит мейснеровское состояние в случае  $I < I_C$  при малом превышении внешним полем значения  $H_{\max}$ , и проследить ее развитие при дальнейшем увеличении поля.

Компьютерные расчеты по предложенному методу были выполнены для случая  $I = 0.7$ , при котором  $h_{S1} = 0.260$ ,  $h_{S2} = 0.277$ ,  $h_{\max} = 0.318$ . Длина образца равнялась 59 ячейкам. Расчет показал, что при  $h < h_{\max}$  конфигурация имеет вид приграничной структуры. При  $h > h_{\max}$  магнитное поле проникает внутрь образца в виде квазиоднородной последовательности плоских вихрей, расстояния между которыми незначительно отклоняются от среднего значения, убывающего с ростом  $h$ . Только в самой середине образца существуют отдельные линейные вихри. При  $h$ , примерно равном 0.5, плоские вихри распадаются на отдельные линейные вихри с центрами, расположенными в ячейках, соседствующих по диагонали. При дальнейшем росте поля вихревая картина уплотняется, при этом „пустые“ (т. е. с нулевым флюксоидом) ячейки начиная от границы постепенно „заполняются“.

При приближении  $h$  к единице около границы начинает устанавливаться последовательность пар вихрей с центрами в соседних рядах, достигающая максимальной длины в 6 рядов при  $h$ , находящемся в диапазоне 1.178–1.273. При  $h > 1.273$  используемый алгоритм перестает работать. Можно предположить, что при дальнейшем росте поля около границы начнут образовываться вихри с двойным флюксоидом. Далее развитие ситуации будет повторяться с периодом по внешнему полю, равным единице. В частности, при  $h > 1.318$  плоские вихри с двойным флюксоидом в каждой ячейке распространятся на весь образец, при этом в нем не останется ячеек с нулевым флюксоидом. Отметим, что ни при каком поле в образце не могут находиться вихри с флюксоидами, различающимися больше чем на два.

Процесс проникновения вихрей с  $(k + 1)\Phi_0$  в образец, каждая ячейка которого содержит  $k\Phi_0$ , полностью аналогичен проникновению вихрей с одним  $\Phi_0$  в мейснеровскую конфигурацию. Этот факт подтверждается тем, что зависимость средней индукции  $b$  в образце от внешнего поля  $h$  имеет почти строгую периодичность с периодом 1 по обем осям, а также видом зависимостей магнитного поля в ячейках от их расстояния до границы.

## Список литературы

- [1] Галайко В.П. // ЖЭТФ. 1966. Т. 50. С. 717.
- [2] Kramer L. // Phys. Rev. 1968. Vol. 170. P. 475.
- [3] Zelikman M.A. // Supercond. Sci. Tech. 1997. Vol. 10. N 7. P. 469–474.

- [4] Zelikman M.A. // Supercond. Sci. Tech. 1997. Vol. 10. N 11. P. 795–800.
- [5] Зеликман М.А. // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 8. С. 14–21.
- [6] Зеликман М.А. // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 9. С. 47–57.
- [7] Dorogovtsev S.N., Samuhin A.N. // Europhys. Lett. 1994. Vol. 25. P. 693–698.
- [8] Зеликман М.А. // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 12. С. 19–25.