

01;12

Влияние релаксационных процессов на величину и форму эхо-сигнала

© М.М. Ковалевский, О.В. Соколов

Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого,
173003 Великий Новгород, Россия
e-mail: evergreen79@yandex.ru

(Поступило в Редакцию 14 июля 2008 г.)

Рассмотрены вопросы теории аналоговых устройств обработки сигналов, принцип действия которых основан на явлении спинового, светового или ядерного квадрупольного эха, включая помехоустойчивость. Для решения основных уравнений, описывающих эти явления, применяется теория мультипликативного интегрирования. Данный метод позволяет в достаточно общем виде рассчитывать эхо-сигналы при произвольной величине и структуре обрабатываемых сигналов.

PACS: 76.20.+q, 78.47.jf

Ранее рядом авторов рассматривались вопросы резонансной обработки сигналов различными методами. Например, в [1] с помощью метода матрицы плотности были получены результаты, указывающие на то, что релаксационные процессы влияют на величину эхо-сигнала, но влияние на его форму не обнаружилось. Эти результаты совпадают с более ранними [2]. В [3] авторами было показано, что учет релаксации влияет как на величину, так и на форму эхо-сигнала. В настоящей статье это сделано более строго и доказательно, рассмотрены конкретные примеры и исследовано влияние помех.

1. Учет релаксационных процессов

Рассмотрим воздействие на вещество внешнего поля, состоящего из постоянного магнитного поля H_0 и перпендикулярного ему радиочастотного поля H_1

$$\mathbf{H} = \mathbf{k}H_0 + \mathbf{H}_1(t). \quad (1)$$

Поведение двухуровневой системы с учетом релаксационных процессов может быть описано уравнением Блоха [4]:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma[\mathbf{M} \times \mathbf{H}] - \frac{M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j}}{T_2} - \frac{M_z - M_0}{T_1} \mathbf{k}, \quad (2)$$

где \mathbf{M} — магнитный момент системы, γ — гиромагнитное отношение, T_1 — время продольной (спин-решеточной) релаксации, T_2 — время поперечной (спин-решеточной) релаксации, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — орты системы координат.

Произведем в уравнении (2) замену переменных

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} M_+ \\ M_- \\ M_z \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} M_+ &= M_x + iM_y, \\ M_- &= M_x - iM_y. \end{aligned} \quad (4)$$

Введя обозначения

$$\begin{aligned} R(t) &= \gamma\{H_x(t) + iH_y(t)\}, \\ R^*(t) &= \gamma\{H_x(t) - iH_y(t)\}, \\ \omega_0 &= \gamma H_0, \end{aligned} \quad (5)$$

перепишем (2) в матричной форме:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{M} + \mathbf{B}, \quad (6)$$

где

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_+ \\ M_- \\ M_z \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_2} - i\omega_0 & 0 & iR \\ 0 & -\frac{1}{T_2} + i\omega_0 & -iR^* \\ \frac{i}{2}R^* & -\frac{i}{2}R & -\frac{1}{T_1} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{M_0}{T_1} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Общее решение неоднородного уравнения (6) можно представить в виде суммы [5]

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 \quad (10)$$

общего решения однородного уравнения

$$\frac{d\mathbf{M}_1}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{M}_1 \quad (11)$$

и частного решения неоднородного уравнения

$$\frac{d\mathbf{M}_2}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{M}_2 + \mathbf{B}. \quad (12)$$

Рассмотрим сначала решение однородного уравнения (11). Представим матрицу A в виде суммы диагональной матрицы

$$A_0 = \begin{pmatrix} -\delta - i\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta + i\omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где $\delta = 1/T_2$, $\beta = 1/T_1$,

и матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & iR \\ 0 & 0 & -iR^* \\ \frac{i}{2}R^* & -\frac{i}{2}R & 0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Тогда фундаментальную матрицу решений уравнения (11) можно записать в виде

$$X = X_0 X_1, \quad (15)$$

где X_0 — решение уравнения

$$\frac{dX_0}{dt} = A_0 X_0, \quad (16)$$

а X_1 — решение уравнения

$$\frac{dX_1}{dt} = V X_1. \quad (17)$$

Матрица V определяется соотношением [5]:

$$V = X_0^{-1} A_1 X_0. \quad (18)$$

Поскольку матрица A_0 постоянная и диагональная, то решение (16) может быть представлено в форме

$$X_0 = \exp \left(\int_0^t A_0 d\tau \right) = \begin{pmatrix} e^{-(\delta+i\omega_0)t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-(\delta-i\omega_0)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta t} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Тогда матрица V имеет вид

$$V(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & iR(t)e^{\mathfrak{L}} \\ 0 & 0 & -iR^*(t)e^{\mathfrak{R}} \\ \frac{i}{2}R^*(t)e^{-\mathfrak{L}} & -\frac{i}{2}R(t)e^{-\mathfrak{R}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где $\mathfrak{L} = (\delta - \beta + i\omega_0)t$, $\mathfrak{R} = (\delta - \beta - i\omega_0)t$.

Поскольку в общем случае $R(t)$ — производная финитная функция, фундаментальная матрица решений уравнения (17) в общем виде может быть представлена с помощью мультипликативного интеграла

$$X_1 = \int_0^{\square t} V(\tau) d\tau. \quad (21)$$

Нахождение точного значения мультипликативного интеграла в данном случае сопряжено с большими математическими трудностями в связи с функциональной некоммутативностью матрицы V : $[V(t), V(t')] \neq 0$. В первом приближении мультипликативный интеграл может быть заменен матричной экспонентой

$$X_1 = \exp(N(t, \omega_0)), \quad (22)$$

где

$$N(t, \omega_0) = \int_0^t V(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & iS_1 \\ 0 & 0 & -iS_1^* \\ \frac{i}{2}S_2^* & -\frac{i}{2}S_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Здесь

$$S_1 = \int_0^t R(\tau) e^{\alpha\tau} e^{i\omega_0\tau} d\tau,$$

$$S_2 = \int_0^t R(\tau) e^{-\alpha\tau} e^{i\omega_0\tau} d\tau$$

— текущие, зависящие от времени спектры сигнала с возрастающей и убывающей экспонентой, а

$$\alpha = \delta - \beta = \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}.$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} \frac{S_1 S_2^* + S_1^* S_2 a}{m} & \frac{S_1^* S_2^* (1-\alpha)}{m} & 2i S_1^* b \\ \frac{S_1 S_2 (1-\alpha)}{m} & \frac{S_1^* S_2 + S_1 S_2^* a}{m} & -2i S_1 b \\ i S_2 b & -i S_2^* b & a \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где $m = S_1 S_2^* + S_1^* S_2$,

$$b = \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{m}{2}}\right)}{\sqrt{2m}},$$

$$a = \cos\left(\sqrt{\frac{m}{2}}\right).$$

Частное решение неоднородного уравнения (12) можно представить в виде [5]:

$$M_2 = X C(t, \omega_0), \quad (25)$$

где

$$C(t, \omega_0) = \int_0^t X^{-1} B dt' = \begin{pmatrix} -2i\beta M_0 \int_0^t S_1^* b e^{\beta t'} dt' \\ 2i\beta M_0 \int_0^t S_1 b e^{\beta t'} dt' \\ \beta M_0 \int_0^t a e^{\beta t'} dt' \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Подставив в (25) фундаментальную матрицу (15) и (26), получим

$$M_2 = \begin{pmatrix} \frac{(c_1 S_1 S_2^* + c_1 S_1^* S_2 a + c_2 S_1^* S_2^* - c_2 S_1 S_2 a + 2i c_3 S_1^* b m) e^{-(\delta+i\omega_0)t}}{m} \\ \frac{(c_1 S_1 S_2 - c_1 S_1 S_2 a + c_2 S_1^* S_2^* a - 2i c_3 S_1^* b m) e^{-(\delta-i\omega_0)t}}{m} \\ (i c_1 S_2 b - i c_2 S_2^* b + a c_3) e^{-\beta t} \end{pmatrix}. \quad (27)$$

где c_1, c_2, c_3 — элементы матрицы $C(t, \omega_0)$ (26).

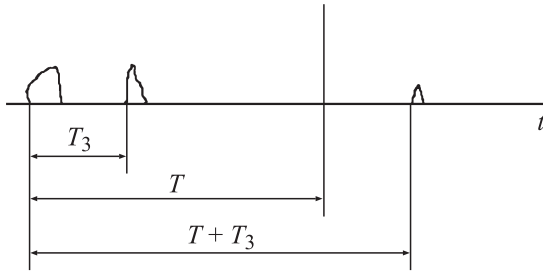


Рис. 1.

Общее решение неоднородного уравнения (6) получается в виде

$$M = XC_0 + M_2, \quad (28)$$

где C_0 — столбец начальных условий. Обычно полагают

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим воздействие на систему трех последовательных импульсов длительностью τ_1 , τ_2 и τ_3 соответственно (рис. 1), на котором показано только интересующее нас стимулированное эхо, возникающее в момент времени $T + T_3$.

Состояние системы сразу после первого импульса описывается выражением

$$K_1 = X_{-1}C_0 + M_{2,-1}, \quad (29)$$

индекс „1“ после подчеркивания указывает номер импульса. Так как вектор K_1 является начальным условием для дальнейшей эволюции системы, то перед началом второго импульса

$$KR_1 = D_1K_1 + MR_{2,-1}, \quad (30)$$

где

$$D_1 = \begin{pmatrix} e^{-\delta(T_3-\tau_1)-i\omega_0(T_3-\tau_1)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\delta(T_3-\tau_1)+i\omega_0(T_3-\tau_1)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta(T_3-\tau_1)} \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$$MR_{2,-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_0(1 - e^{-\beta(T_3-\tau_1)}) \end{pmatrix}$$

соответствуют свободной эволюции системы между импульсами.

Повторив далее эту схему для второго и третьего импульса, найдем окончательное выражение для спектра эхо-сигнала. Члены, соответствующие сигналу стимулированного эха, образованного первым и вторым сигналами (короткий третий сигнал будем считать управляющим с постоянным спектром в пределах линии

поглощения)

$$P_E = 2S_{1-1}^* S_{2-2} S_{1-3} b_2 b_3 \times \left[2ib_1(M_0 + c_{3-1}) + \frac{1-a_1}{m_1} c_{2-1} S_{2-1}^* + \frac{a_1}{m_1} c_{1-1} S_{2-1} \right] \times e^{-\frac{t}{T_2} + (\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1})(T-T_3) + i\omega_0(t-T_3-T)}. \quad (32)$$

Последние индексы в выражении (32) соответствуют номеру сигнала. Зависимость эхо-сигнала от времени получается интегрированием этого выражения по ω_0 .

Полученный экспоненциальный множитель в (32) согласуется с классическими результатами, полученными ранее [2]. Из (32) видно, что наличие релаксационных процессов приводит не только к уменьшению эхо-сигнала, но и к асимметрии его формы. Времена релаксации T_1 и T_2 участвуют в изменении формы сигнала через спектры сигналов, содержащих возрастающую и убывающую экспоненты; T_2 также непосредственно входит в экспоненту совместно с текущим временем.

Рассмотрим сначала работу эхо-процессора в режиме сжатия. Для этого в качестве первого и второго сигнала используем импульсы с линейной частотой модуляции (ЛЧМ)

$$R = d \sin(\omega_0 t + bt^2) [\theta(\tau - t) - \theta(-t)], \quad (33)$$

где d — амплитуда, ω_0 — начальная частота, b — девиация ЛЧМ-сигнала.

Числовые параметры, использованные для расчетов, условны, не обязательно соответствуют какому-либо реальному веществу и призваны только подчеркнуть зависимость от них эхо-сигнала.

На рис. 2 и 3 показан рассчитанная зависимость величины эхо-сигнала (E) от времени для следующих параметров: $d_1 = \frac{\pi}{2}$, $d_2 = \frac{\pi}{2}$, $\omega_0 = 750$, $b = 800$, $\tau = 1$, $T_3 = 6$, $T = 10$, $T_1 = 4$ и $T_2 = 1$ для рис. 2 и $T_1 = 0.0105$ и $T_2 = 0.01$ для рис. 3.

Асимметрия формы эхо-сигнала на рис. 2 явно не выражена, это связано с тем, что длительность эхо-сигнала мала по сравнению со временем релаксации. На рис. 3

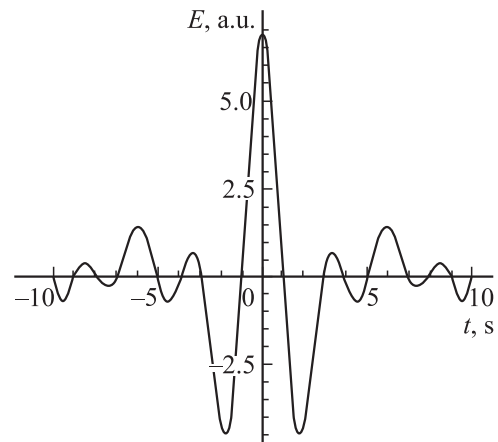


Рис. 2.

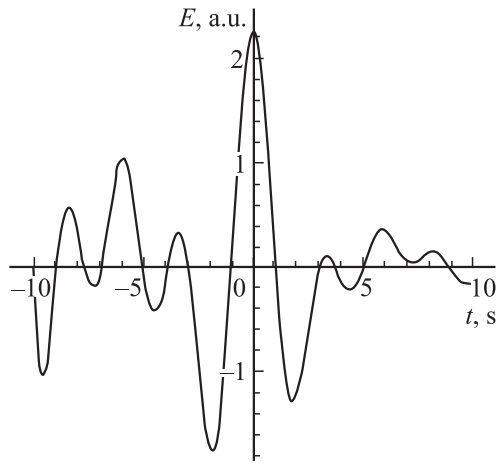


Рис. 3.

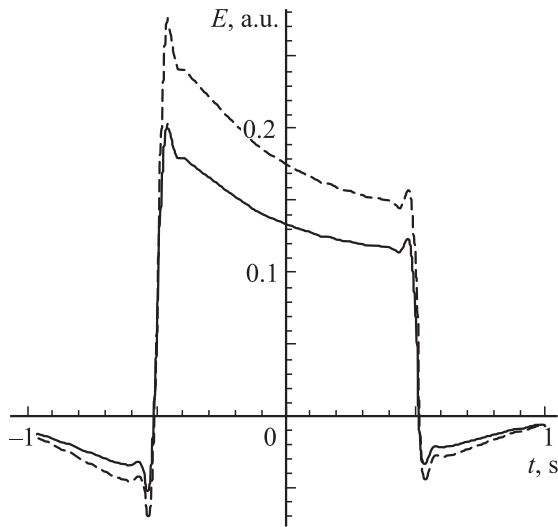


Рис. 4.

асимметрия заметна, что соответствует сравнимости длительности эхо-сигнала и времени релаксации. Такое малое время релаксации встречается при наблюдении светового эха.

В режим воспроизведения первый сигнал, так же как и третий, должен быть очень коротким, чтобы его спектр можно было считать постоянным в пределах линии поглощения. Второй сигнал возьмем в виде простого радиоимпульса с прямоугольной огибающей

$$R_2 = d_2 \left(\theta \left(\frac{\tau_2}{2} - t \right) - \theta \left(-\frac{\tau_2}{2} - t \right) \right), \quad (34)$$

где d_2 — величина импульса.

На рис. 4 показана рассчитанная зависимость огибающей эхо-сигнала (E) от времени для следующих параметров: $d_2 = \frac{\pi}{2}$, $T_1 = 3$, $\tau_2 = 1$, $T_3 = 6$, $T = 10$, $T_1 = 6$ — сплошная кривая, $T_1 = 10$ — пунктир. Из рисунка видно, что форма эхо-сигнала зависит от времени релаксации T_1 .

2. Влияние помехи на форму эхо-сигнала

Рассмотрим формирование эхо-сигнала в случае, когда первый сигнал является радиоимпульсом с линейной частотной модуляцией, а второй представляет собой смесь ЛЧМ-сигнала и шума. Длительность шумового сигнала в пять раз больше, чем длительность ЛЧМ.

Шум моделируется следующим образом

$$R_S = Q \sum_{i=1}^n (a_i \sin(\omega_1 t) [\theta(t_{i+1} - t) - \theta(t_i - t)]), \quad (35)$$

где Qa_i — амплитуды шума, a_i — случайные числа от нуля до единицы, ω_1 — несущая частота шума, t_i — равномерное разбиение по длительности шумового сигнала.

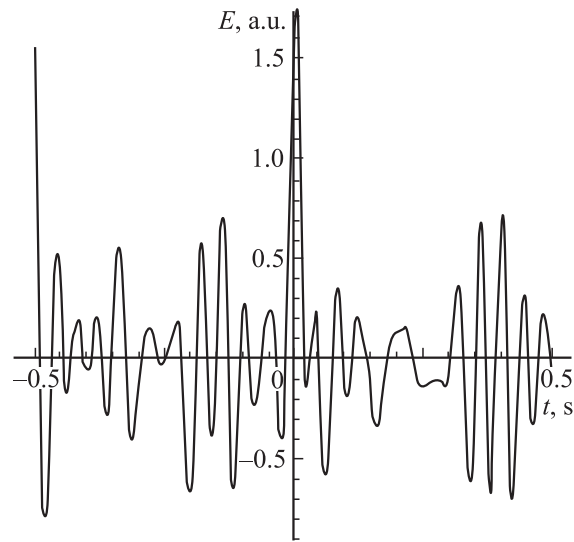


Рис. 5.

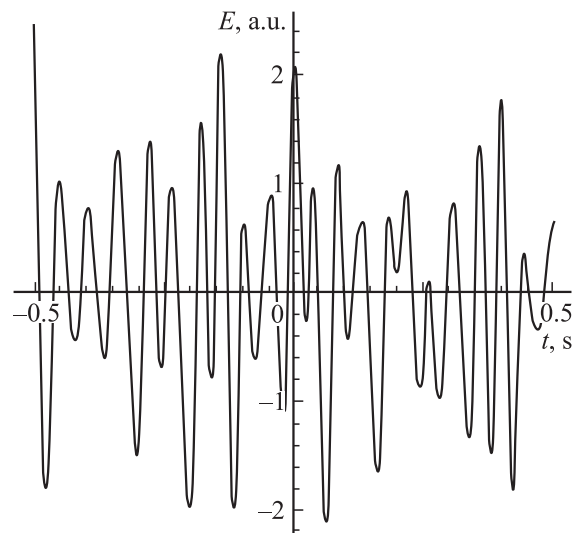


Рис. 6.

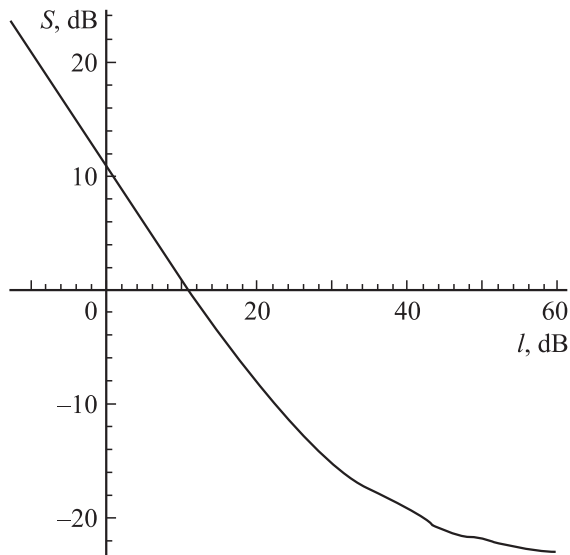


Рис. 7.

На рис. 5 и 6 показаны рассчитанные зависимости величины эхо-сигнала (E) от времени для следующих параметров: $d_1 = \frac{\pi}{2}$, $d_2 = \frac{\pi}{6}$, $\omega_0 = 750$, $b = 800$, $T_1 = 50$, $T_2 = 20$, $\tau = 1$, $T_3 = 4$, $T = 10$, $\omega_1 = 250\pi$, $\tau = 5$; $Q = \pi$ и 4π соответственно для рис. 5 и 6.

Из рисунка видно, что при отношении площади импульсов шума и сигнала 30:1 полезный эхо-сигнал достаточно хорошо выделяется на фоне шума, а при соотношении 120:1 (см. рис. 6) сигнал совершенно неразличим на фоне помех.

На рис. 7 показана зависимость отношения сигнал-шум на выходе (S) от отношения шум-сигнал на входе (I). Видно, что при небольших амплитудах шума зависимость практически линейная, а с ростом амплитуды шума появляется нелинейность, что легко понять из формулы (32), так как при больших шумах сказываются входящие в нее нелинейные члены.

Список литературы

- [1] Баукин В.Е. // Обработка сложных сигналов в системах в неэквидистантном спектре. Деп. в ВИНТИ 03.04.89, № 2106–В89. Л.: Ленингр. электротехн. ин-т, 1989. 6 с.
- [2] Леше А. Ядерная индукция. М.: ИЛ, 1963.
- [3] Васильев А.А., Евстигнеев Ю.Ф., Ковалевский М.М. // Техника средств связи. Сер. Техника радиосвязи. 1982. Вып. 2. С. 103–107.
- [4] Абрагам А. Ядерный магнетизм. М.: ИЛ, 1963.
- [5] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1976.