01

Разложение потенциала однородного кругового тора в ряд Лапласа

© Б.П. Кондратьев, А.С. Дубровский, Н.Г. Трубицына, Э.Ш. Мухаметшина

Удмуртский государственный университет,
426034 Ижевск, Россия
e-mail: kond@uni.udm.ru

(Поступило в Редакцию 16 ноября 2007 г. В окончательной редакции 4 марта 2008 г.)

Внешний потенциал однородного кругового тора представлен разложением в ряд по сферическим функциям (рядом Лапласа). Получены точные аналитические формулы для коэффициентов этого ряда, которые выражаются через полиномы Лежандра, зависящие только от геометрического параметра тора. Доказана сходимость ряда и найден радиус сходимости. Проведена численная проверка полученных выражений.

PACS: 92.30.Em

Введение

Нахождение потенциала однородного гравитационного (или заряженного статическим электрическим зарядом) кругового тора представляет большой теоретический и практический интерес для многих задач гидродинамики, физики и астрономии. Вместе с тем в теории потенциала задача о торе относится к числу трудных. Это и неудивительно, достаточно вспомнить, что в XIX в. не менее важная задача о потенциале однородного трехосного эллипсоида, над решением которой трудилась плеяда крупных ученых, составила целую эпоху развития в математической физике. Аналогичная ситуация возникла с тором. Уже первое из известных нам исследований выполненное Риманом [1], обнажило трудности проблемы. Риман пытался представить потенциал тора рядом Фурье, но не смог учесть граничных условий и в итоге оставил работу в незавершенном виде. Цуге [2] довел решение задачи до двойного интеграла, но на этом остановился и далее не пошел.

Прогресс в задаче о торе связан с методами, развитыми в монографии [3, разд. 2.39], где удалось найти потенциал тора на его оси симметрии, причем сделать это удалось в конечном виде через полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода в форме Лежандра:

$$\varphi(x_3) = \frac{8\pi G\rho}{3k^2}\, r_0 R_0\, \frac{r_0+l}{l} \times \left[(2-k^2)E(k) - 2(1-k^2)K(k)\right], \qquad (1)$$

где

$$l = \sqrt{R_0^2 + x_3^2}; \qquad k^2 = \frac{4r_0 l}{(r_0+l)^2}.$$

Здесь ρ — однородная плотность тора, G — гравитационная постоянная. Кроме того, используются обозначения геометрических характеристик тора: R_0 — радиус осевой окружности, r_0 — радиус меридионального сечения рукава ($r_0 \le R_0$).

В монографии [4, с. 194], был найден и полный пространственный потенциал тора:

$$\frac{\varphi_{\text{tor}}(r, x_3)}{2\sqrt{2}G\rho R_0 r_0} = \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \left[c + 2\left(R_1^2 - \frac{r^2}{R_0^2}\right)\right] K(k_1) + (a-c)E(k_1) - 2\,\frac{(x_3 - r_0\sin\theta)^2}{R_0^2}\,\Pi(n, k_1) \right\} \frac{\cos\theta d\theta}{a-c}. \qquad (2)$$

Здесь и далее (r, x_3) — цилиндрические координаты, также введены следующие вспомогательные обозначения

$$R_1 = 1 + \frac{r_0}{R_0}\cos\theta;\ a = \frac{2\left(r^2 + (x_3 - r_0\sin\theta)^2\right)}{R_0^2};\ n = \frac{a-b}{2r^2/R_0^2};$$

$$\binom{a}{c} = \frac{a}{2} - R_1^2 \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2} - R_1^2\right)^2 + 4R_1^2\,\frac{(x_3 - r_0\sin\theta)^2}{R_0^2}};$$

$$k_1 = \frac{1-k'}{1+k'} \le 1; \qquad (3)$$

$$k' = \sqrt{\frac{(r-R_1)^2 + (x_3 - r_0\sin\theta)^2}{(r+R_1)^2 + (x_3 - r_0\sin\theta)^2}} \le 1.$$

Выражение для потенциала (2) содержит интегралы от стандартных полных эллиптических интегралов 1, 2 и 3-го рода. Оно было получено в [4] методом синтеза вкладов в потенциал тора от широких элементарых круговых колец. В [4] потенциал тора был тщательно изучен и построены семейства внешних и внутренних эквипотенциалей.

Однако до сих пор потенциал тора (2) не удавалось представить рядом по сферическим функциям

$$\varphi_{\text{tor}}(\theta, R) = G\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}}{R^{2n+1}}\, P_{2n}(\cos\theta),$$

$$R = \sqrt{r^2 + x_3^2}, \quad \cos\theta = \frac{x^3}{R}, \qquad (4)$$

(угол θ в этой формуле — полярный), который обычно называется также рядом Лапласа [5]. О важности такого разложения для тел различной формы говорит вся практика небесной механики, гидродинамики и электродинамики.

В настоящей работе авторы решают эту задачу и представляют потенциал однородного кругового тора рядом Лапласа; найдены точные формулы для коэффициентов этого ряда и показано, что они выражаются через гипергеометрическую функцию Гаусса и, как следствие, через полиномы Лежандра, зависящие от геометрического параметра тора $q = \frac{r_0}{R_0} \leq 1$. Данный результат особенно интересен тем, что, как известно, и сам ряд Лапласа есть резложение потенциала тела по полиномам Лежандра, причем эти полиномы зависят только от координат пробной точки.

1. Разложение в ряд потенциала тора на оси симметрии

Прежде чем решать задачу для пространственного потенциала тора, заметим, что потенциал тора (1) на оси симметрии можно представить рядом по обратным степеням расстояния x_3

$$\frac{\varphi}{2\pi^2 G\rho r_0 R_0^2} = \frac{r_0}{x_3}\left(1 - \frac{r_0^2 + 4R_0^2}{2^3 x_3^2} + \frac{24R_0^2 + 12r_0^2R_0^2 - r_0^4}{2^6 x_3^4} - \frac{5(48r_0^2R_0^4 + 64R_0^6 - 8r_0^4R_0^2 + r_0^6)}{2^{10}x_3^6}\dots\right). \quad (5)$$

Ниже этот ряд применяется для проверки разложения полного пространственного потенциала тора.

2. Постановка задачи

Уравнение поверхности тора в цилиндрических координатах (r, x_3) имеет вид

$$(r - R_0)^2 + x_3^2 = r_0^2. \quad (6)$$

Предполагаемый подход заключается в том, что вначале рассматривается потенциал тора на оси его симметрии Ox_3. Разложение внешнего потенциала тора (внешним для тора, как будет показано ниже, следует считать потенциал вне сферы радиусом R_0) на этой оси в ряд по обратным степеням x_3 имеет вид

$$\varphi(x_3) = G\sum_{n=0}^{\infty}\frac{G_{2n}}{x_3^{2n+1}}, \quad (r = 0, x_3 > 0). \quad (7)$$

Здесь коэффициенты разложения C_{2n}, как известно [5], представляют собой моменты

$$C_{2n} = \rho\iiint R^{2n}P_{2n}(\cos\theta)dx_1dx_2dx_3, \quad (8)$$

где введены декартовы координаты (x_1, x_2, x_3). Разумеется, все нечетные коэффициенты C_{2n+1} для тора обращаются в нуль в силу его азимутальной симметрии.

Итак, целью работы является представление потенциала тора в виде ряда (4). Важно заметить, что эквивалентной выражению (8) формулой является представление коэффициентов C_{2n} в виде

$$C_{2n} = \rho\iiint(x_3 + ix_1)^{2n}dx_1dx_2dx_3, \quad (9)$$

поскольку $(x_3 + ix_1)^{2n}$ — гармонический многочлен, и при усреднении по азимуту он должен давать тоже гармонический многочлен, стоящий под знаком интеграла в (8):

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(R\cos\theta + iR\sin\theta\cos\lambda)^{2n}d\lambda$$

$$= \frac{R^{2n}}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\cos\lambda\right)^{2n}d\lambda = R^{2n}P_{2n}(\cos\theta). \quad (10)$$

Выражение (10) представляет собой не что иное, как формулу Лапласа [5] интегрального представления полиномов Лежандра [6]. С выражением (9) будем далее работать.

3. Нахождение коэффициентов C_{2n}

Прямое интегрирование по x_3 выражения (9) дает

$$C_{2n} = \frac{\rho}{2n+1} \times \iint\left[(x_3 + ix_1)^{2n+1} - (ix_1 - x_3)^{2n+1}\right]dx_1dx_2, \quad (11)$$

где оставшийся двойной интеграл берется по экваториальному сечению тора, а x_3 относится только к верхней половине его поверхности.

В параметрической форме декартовы координаты далее представим через вспомогательные углы (угол θ здесь отсчитывается от экваториальной плоскости, а азимутальный угол λ — от оси Ox_1)

$$\begin{aligned} x_1 &= (R_0 + r_0\cos\theta)\cos\lambda, \\ x_2 &= (R_0 + r_0\cos\theta)\sin\lambda, \\ x_3 &= r_0\sin\theta. \end{aligned} \quad (12)$$

Якобиан преобразования для двух первых координат в (12) представим следующим образом:

$$J = \begin{bmatrix} -(R_0 + r_0\cos\theta)\sin\lambda & -r_0\sin\theta\cos\lambda \\ (R_0 + r_0\cos\theta)\cos\lambda & -r_0\sin\theta\sin\lambda \end{bmatrix} = r_0\sin\theta(R_0 + r_0\cos\theta).$$

Тогда (11) приводится к виду

$$C_{2n} = \frac{\rho r_0}{2n+1} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \left[r_0 \sin\theta + i(R_0 + r_0\cos\theta)\cos\lambda \right]^{2n+1} + \left[r_0 \sin\theta - i(R_0 + r_0\cos\theta)\cos\lambda \right]^{2n+1} \right\} \times \sin\theta (R_0 + r_0 \cos\theta) d\theta d\lambda.$$

Во втором члене делаем замену $\theta \to -\theta$ и оба интеграла объединяем в один

$$C_{2n} = \frac{\rho r_0}{2n+1} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[r_0 \sin\theta + i(R_0 + r_0\cos\theta)\cos\lambda \right]^{2n+1} \times \sin\theta (R_0 + r_0 \cos\theta) d\theta d\lambda. \qquad (13)$$

Используем далее бином Ньютона [7]

$$[r_0 \sin\theta + i(R_0 + r_0\cos\theta)\cos\lambda]^{2n+1} = [r_0(\sin\theta + i\cos\theta\cos\lambda) + iR_0\cos\lambda]^{2n+1} = \sum_{m=0}^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{m!(2n+1-m)!} r_0^m (\sin\theta + i\cos\theta\cos\lambda)^m \times (iR_0\cos\lambda)^{2n+1-m}, \qquad (14)$$

после чего (9) примет вид

$$C_{2n} = \frac{\rho r_0}{2n+1} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{m!(2n+1-m)!} \times \left[r_0^m (\sin\theta + i\cos\theta\cos\lambda)^m R_0 \sin\theta (iR_0\cos\lambda)^{2n+1-m} + r_0^{m+1} (\sin\theta + i\cos\theta\cos\lambda)^m \sin\theta \times \cos\theta (iR_0\cos\lambda)^{2n+1-m} \right] d\theta d\lambda \qquad (15)$$

или

$$C_{2n} = \rho r_0 (2n)! (iR_0)^{2n+1} \sum_{m=0}^{2n+1} (i)^{-m} \frac{q^m}{m!(2n+1-m)!} \times \int_0^{2\pi} (\cos\lambda)^{2n+1-m} (R_0 I_1 + r_0 I_2) d\lambda, \qquad (16)$$

где для краткости вспомогательные интегралы обозначены так:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \sin\theta (\sin\theta + i\cos\theta\cos\lambda)^m d\theta; \qquad (17)$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \sin\theta\cos\theta (\sin\theta + i\cos\theta\cos\lambda)^m d\theta, \qquad (18)$$

а геометрический параметр тора

$$q = \frac{r_0}{R_0} \leq 1. \qquad (19)$$

3.1. Нахождение интеграла I_1

Прежде всего заметим, что при четных m будет $I_1 = 0$. Запишем для симметрии I_1 в таком виде

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \sin\theta (\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta)^m d\theta, \qquad (20)$$

где

$$\alpha = 1, \quad \beta = i\cos\lambda. \qquad (21)$$

Нормированные коэффициенты α и β представим в форме

$$\cos\theta_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}; \quad \sin\theta_0 = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}. \qquad (22)$$

Тогда вместо (20) имеем

$$I_1 = (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{m}{2}} \int_0^{2\pi} \sin^m(\theta - \theta_0) \sin\theta d\theta. \qquad (23)$$

Как легко видеть,

$$I_1 = (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{m}{2}} \int_0^{2\pi} \sin^m\theta \sin(\theta + \theta_0) d\theta = (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{m}{2}} \int_0^{2\pi} (\sin^{m+1}\theta\cos\theta_0 + \sin^m\theta\cos\theta\sin\theta_0) d\theta.$$

При нечетных m с учетом (21) имеем

$$I_1 = 2\pi \frac{m!!}{(m+1)!!} \sin^{m-1}\lambda. \qquad (24)$$

3.2. Нахождение интеграла I_2

В симметризованном виде при тех же α и β имеем

$$I_2 = \int_0^{2\pi} (\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta)^m \sin\theta\cos\theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta)^m \sin 2\theta d\theta. \qquad (25)$$

Очевидно, интеграл I_2 отличен от нуля только при четных m, и можно найти:

$$I_2 = \frac{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{m}{2}}}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sin^m(\theta+\theta_0)\sin 2\theta d\theta$$

$$= \frac{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{m}{2}}}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sin^m\theta\sin(2\theta-2\theta_0)d\theta$$

$$= \frac{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{m}{2}}}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sin^m\theta(\sin 2\theta\cos 2\theta_0-\cos 2\theta\sin 2\theta_0)d\theta$$

$$= -\frac{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{m}{2}}}{2}\sin 2\theta_0\int\limits_0^{2\pi}\sin^m\theta(1-2\sin^2\theta)d\theta$$

$$= -(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{m}{2}}\sin\theta_0\cos\theta_0\int\limits_0^{2\pi}(\sin^m\theta-2\sin^{m+2}\theta)d\theta$$

$$= -2\pi\left[\frac{(m-1)!!}{m!!}-\frac{2(m+1)!!}{(m+2)!!}\right](\alpha^2+\beta^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$= 2\pi\frac{m(m-1)!!}{(m+2)!!}\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{m}{2}-1}.$$

Тогда (m — четное):

$$I_2 = 2\pi i\frac{m(m-1)!!}{(m+2)!!}\cos\lambda\sin^{m-2}\lambda. \qquad (26)$$

3.3. Приведение C_{2n} к требуемому виду

Подставив I_1 из (24) и I_2 из (26) под знак интеграла по переменной λ в (16), находим интегралы

$$\int\limits_0^{2\pi}(\cos\lambda)^{2n+1-m}\lambda\sin^{m-1}\lambda d\lambda = 2\pi\frac{(2n-m)!!(m-2)!!}{(2n)!!}; \qquad (27)$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\cos\lambda\sin^{m-2}\lambda\cos^{2n+1-m}\lambda d\lambda = 2\pi\frac{(m-3)!!(2n+1-m)!!}{(2n)!!}. \qquad (28)$$

В целом, выражение (16) примет вид

$$C_{2n} = 4\pi^2\rho r_0 R_0(2n)!(iR_0)^{2n+1}\sum_{m=0}^{2n+1}\frac{(i)^{-m}q^m}{m!(2n+1-m)!}$$
$$\times\left\{\frac{m!!(2n-m)!!(m-2)!!}{(m+1)!!(2n)!!}+iq\right.$$
$$\left.\times\frac{m(m-1)!!(m-3)!!(2n+1-m)!!}{(m+2)!!(2n)!!}\right\}. \qquad (29)$$

Подстановка $m=2k+1$ в первой сумме и $m=2k$ — во второй дает

$$C_{2n} = 4\pi^2\rho r_0 R_0^{2n+2}(-1)^n(2n-1)!!$$
$$\times\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k q^{2k+1}(2k-1)!!}{(2k)!!(2n-2k)!!(2k+2)!!}\right.$$
$$\left.+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k q^{2k+1}(2k-3)!!}{(2k-2)!!(2k+2)!!(2n-2k)!!}\right\}.$$

Общий множитель выражения в фигурных скобках здесь

$$q^{2k+1}(-1)^k\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!(2k+2)!!(2n-2k)!!}.$$

Так как $(2k-1)!!-2k(2k-3)!!=-1$, из (29) получаем

$$C_{2n} = -4\pi^2\rho r_0 R_0^{2n+2}(-1)^n(2n-1)!!\cdot S_n, \qquad (30)$$

где через S_n обозначена сумма

$$S_n = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m q^{2m+1},\frac{(2m-3)!!}{(2m)!!(2m+2)!!(2n-2m)!!}. \qquad (31)$$

Так как

$$(2m)!! = 2^m m!,$$
$$(2m+2)!! = 2^{m+1}(m+1)!,$$

то после преобразований сумму (31) можно представить в компактном виде через гипергеометрическую функцию

$$S_n = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m q^{2m+1}\frac{(2m-3)!!}{(2m)!!(2m+2)!!(2n-2m)!!}$$
$$= -\frac{q}{2^{n+1}n!^2}F_1\left(-\frac{1}{2},-n,2,q^2\right). \qquad (32)$$

Но существенно (и это можно показать), что гипергеометрическая функция из (32) выражается через полином Лежандра. Для параметра S_n получим следующую формулу:

$$S_n = -\frac{(1-q^2)^{\frac{n-1}{2}}}{6q2^n(n+1)!}\left\{\sqrt{1-q^2}\left[\big(2n+(3+6n+4n^n)q^2\big)\right.\right.$$
$$\left.\times P_n\left(\frac{2-q^2}{2\sqrt{1-q^2}}\right)\right]-2n(1-q^2)\big(1+2(n+1)q^2\big)$$
$$\left.\times P_{n-1}\left(\frac{2-q^2}{2\sqrt{1-q^2}}\right)\right\}. \qquad (33)$$

В итоге, коэффициенты разложения из (29) принимают вид

$$C_{2n} = (-1)^n\frac{\pi^2\rho R_0^{2n+3}(1-q^2)^{\frac{n}{2}}(2n-1)!!}{32^{n-2}(n+1)!}$$
$$\times\left\{\left[n+\left(\frac{3}{2}+3n+2n^2\right)q^2\right]P_n(\mu)-n\sqrt{1-q^2}\right.$$
$$\left.\times\left[1+2(n+1)q^2\right]P_{n-1}(\mu)\right\}, \qquad (34)$$

для краткости обозначено

$$\mu = \frac{2 - q^2}{2\sqrt{1 - q^2}}. \qquad (35)$$

Таким образом, потенциал однородного кругового тора в любой точке пространства (θ, R) действительно может быть представлен рядом Лапласа из (4), причем коэффициенты C_{2n}, согласно (34), также выражаются через полиномы Лежандра от параметра тора $q = \frac{r_0}{R_0} \leq 1$.

4. Радиус сходимости ряда (4)

Важно найти радиус сходимости, т. е. радиус той сферы, вне которой ряд Лапласа (4) для внешнего потенциала тора сходится. Для этого оценим величину члена этого ряда при больших n. Так как

$$(2n - 1)!! = \frac{(2n)!}{2^n n!},$$

то для C_{2n} из (30) с величиной S_n, взятой из (32), имеем

$$C_{2n} = (-1)^n \frac{4\pi^2 \rho r_0 R_0^{2n+2} q_2F_1\left(-\frac{1}{2}, -n, 2, q^2\right)}{2^{2n+1}(n!)^2}. \qquad (36)$$

С учетом асимптотики при больших n для гипергеометрической функции находим

$$C_{2n} \sim (-1)^n \frac{8}{3} \pi\rho q^2 r_0 R_0^{2n+2} = (-1)^n \frac{4}{3\pi} q M_{\text{tor}} R_0^{2n}, \qquad (37)$$

где $M_{\text{rot}} = 2\pi^2 r_0^2 R_0$ — масса тора. Тогда член ряда (4) в асимптотике больших n будет иметь вид

$$N(n) \sim (-1)^n \frac{M_{\text{tor}} G}{R_0} \frac{4q}{3\pi} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{2n+1}. \qquad (38)$$

Отсюда следует, что при

$$R \geq R_0 \qquad (39)$$

ряд (4) будет сходиться. Следовательно, осевой радиус R_0 и есть искомый радиус сходимости ряда Лапласа для внешнего потенциала однородного кругового тора. Разложение (4) имеет место только вне сферы радиуса R_0. Однако эту сферу нельзя считать только объемлющей, так как она проходит и по внутренним точкам фигуры.

5. Численная проверка

1. Потенциал тора на оси симметрии x_3 $(\theta = 0, P_{2n}(1) = 1)$.

Установлено, что формулы (1) и (4) дают одинаковые численные результаты и ряд быстро сходится. Важно подчеркнуть, что ряд (4) на оси симметрии действительно приводится к ряду (5), полученному выше независимым способом. Это доказывается выписыванием членов ряда (4) и представлением полиномов Лежандра их алгебраическими выражениями.

2. Потенциал тора в экваториальной плоскости $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$.

Ряд (4) быстро сходится и дает результаты, совпадающие с расчетами по формуле (2).

3. Проверка ряда (4) в произвольной пространственной точке выполнена с помощью общей формулы (2).

Результаты расчетов обоими способами оказываются одинаковыми.

Заключение

Потенциал однородного кругового тора впервые представлен рядом Лапласа. Найдены точные аналитические формулы для коэффициентов этого ряда и показано, что они выражаются через полиномы Лежандра, зависящие от геометрического параметра тора. Данный результат интересен тем, что, как известно, и сам ряд Лапласа представляет собой разложение потенциала тела по полиномам Лежандра, причем эти полиномы зависят только от координат пробной точки. Проверка показала, что указанный ряд быстро сходится и дает правильные результаты. Важно заметить также, что найденное здесь значение радиуса сходимости ряда полностью согласуется со значением максимальной „длины“ составного мнимого стержня, входящего в комплект эквигравитирующих элементов тора [4].

Список литературы

[1] *Риман Б.* О потенциале тора. Сочинения. М.–Л.: ОГИЗ, 1948. С. 367–372.
[2] *Züge A.* // J. Reine Angew. Math. 1889. Bd 104. S. 89–101.
[3] *Кондратьев Б.П.* Теория потенциала и фигуры равновесия. М.–Ижевск: РХД, 2003. 624 с.
[4] *Кондратьев Б.П.* Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. М.: МИР, 2007. 512 с.
[5] *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975. 800 с.
[6] *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. М.: ГИТТЛ, 1953. 380 с.
[7] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1970. 720 с.