

01;03

## Оценка адекватности нелинейных моделей для корреляций „давление—скорости деформаций“ в турбулентном потоке

© С.Р. Богданов

Карельский государственный педагогический университет,  
185680 Петрозаводск, Россия  
e-mail: sbogdanov@onego.ru

(Поступило в Редакцию 10 января 2008 г.)

Простые неравенства, выведенные на основе спектрального представления корреляций „давление—скорости деформаций“, использованы при анализе нелинейных по параметру анизотропии и средней скорости деформаций моделей для этих корреляций. Эти неравенства можно рассматривать как новый (по отношению к известным условиям реализуемости) критерий адекватности моделей. В частности, показано, что даже в случае моделей, автоматически удовлетворяющих условию „сильной реализуемости“, ограничения, вытекающие из этого критерия, выполняются не во всей физически доступной области. Причем во многих случаях нарушения происходят при достаточно высокой, но не экзотической степени анизотропии, соответствующей, например, пристеночным областям течения в канале. С другой стороны, новый критерий оказывается конструктивным при „калибровке“ моделей. В частности, исходя из условий выполнения этого критерия для некоторых типов моделей получены простые ограничения на значения констант.

PACS: 47.27.-i, 47.27.E-

### Введение

Инструментарий исследований, связанных с изучением развитой турбулентности, в последнее время все более расширяется. Теория фракталов и вейвлет-анализ, спектральные методы и прямое численное моделирование (DNS, Direct Numerical Simulations), ренорм-групповые расчеты и моделирование крупных вихрей (LES, Large Eddy Simulations) открывают все новые аспекты проблемы, изучения природы и структуры явления.

В то же время в расчетной практике по-прежнему преобладает классический подход, основанный на использовании уравнения для средней скорости  $\mathbf{U}$ , получаемого непосредственным усреднением уравнения Навье—Стокса (RANS, Reynolds averaged Navier—Stokes). При этом для замыкания этого уравнения, включающего неизвестное слагаемое — тензор Рейнольдса  $\tau_{ij} \equiv \langle u_i u_j \rangle$  (здесь  $\mathbf{u}$  — пульсационная скорость) — в свою очередь, в основном используются лишь так называемые модели первого и второго поколения. Несмотря на свой полуэмпирический статус эти модели имеют глубокое методологическое основание, связанное с идеями Н.Н. Боголюбова о сокращенном описании. Кроме того, именно эти модели являются едва ли не единственным связующим звеном для многих упомянутых подходов: как правило, именно они играют роль „точки приложения“ новых идей; их критикуют, обосновывают, улучшают.

В рамках моделей первого поколения, связанных с понятием турбулентной вязкости, осуществляется непосредственная параметризация тензора Рейнольдса через тензор скоростей деформаций  $U_{ij} \equiv \partial U_i / \partial x_j$  (гипотеза

Буссинеска):

$$\tau_{ij} - \frac{2}{3} K \delta_{ij} = -2\nu_t U_{ij}. \quad (1)$$

Здесь  $K \equiv \langle u^2 \rangle / 2$  — кинетическая энергия пульсационного движения,  $\nu_t$  — турбулентная вязкость. Последний параметр определяется характерными масштабами длины и скорости, которые, в свою очередь, обычно выражаются через  $K$  и среднюю скорость  $\varepsilon$  диссипации энергии, что приводит к представлению  $\nu_t \sim K^2 / \varepsilon$ .

Замыкание уравнений для средней скорости при этом осуществляется за счет дополнительных уравнений для турбулентной энергии  $K$  (оно имеет вид  $DK/Dt = P - \varepsilon$ , где  $P \equiv -\tau_{ij} S_{ij}$  — порождение турбулентной энергии) и аналогичного (модельного) — для средней скорости диссипации энергии  $\varepsilon$ .

Таким образом, с точки зрения сокращенного описания набор „управляющих“, секулярных параметров в моделях первого поколения включает лишь три функции:  $\mathbf{U}$ ,  $K$  и  $\varepsilon$ . Подобные простые схемы замыкания, известные как  $k$ - $\varepsilon$ -модели, оказались довольно успешными при описании некоторых простых классов течений. Однако все же область их использования весьма ограничена: экспериментальные данные свидетельствуют об отсутствии локальной связи между тензорами  $\tau_{ij}$  и  $U_{ij}$ .

В этой связи при расчетах более сложных турбулентных течений используются так называемые модели второго поколения, основу которых составляют уравнения переноса для рейнольдсовых напряжений (DRSM, Differential Reynolds Stress Models):

$$\frac{D \langle u_i u_j \rangle}{Dt} = P_{ij} - \varepsilon_{ij} + \Phi_{ij} + D_{ij}. \quad (2)$$

Здесь  $D/Dt = \partial/\partial t + U_j \partial/\partial x_j$ ,  $P_{ij} = -\tau_{im} U_{jm} - \tau_{jm} U_{im}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  — тензор диссипации энергии ( $\varepsilon = \varepsilon_{ii}/2$ ), остальные

слагаемые в правой части уравнения (2) представляют перераспределение энергии и диффузию соответственно; их необходимо моделировать.

Следует отметить, что с использованием тензора анизотропии  $b_{ij} \equiv \tau_{ij}/2K - \delta_{ij}/3$  базовую систему (2) можно с учетом уравнения для  $K$  записать в следующем эквивалентном виде:

$$2 \frac{K}{\varepsilon} \frac{Db_{ij}}{Dt} + 2 \left( \frac{1}{3} \delta_{ij} + b_{ij} \right) \left( \frac{P}{\varepsilon} - 1 \right) = (P_{ij} - \varepsilon_{ij} + \Phi_{ij} + D_{ij})/\varepsilon. \quad (3)$$

Генеалогически модели второго поколения являются естественным обобщением моделей первого поколения: здесь лишь несколько расширяется набор „секулярных“ параметров: в их число включается уже не только кинетическая энергия, а все компоненты тензора рейнольдсовых напряжений. Стратегия замыкания при этом заключается, как правило, в поиске (на основе интуитивных физических представлений или моделирования выражений для двух точечных корреляций) алгебраических соотношений, связывающих неизвестные слагаемые в уравнениях (2) для рейнольдсовых напряжений с набором секулярных величин.

## Обзор моделей второго поколения. Критерии реализуемости

Одно из таких слагаемых, тензор корреляций „давление–скорость деформаций“, описывает перераспределение энергии между компонентами пульсации

$$\Phi_{ij} = \left\langle p \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle p \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\rangle,$$

где  $p$  — пульсационная часть давления. Моделирование именно этого тензора, и особенно его „быстрой“, связанной со средней деформацией, части  $\Phi_{ij}^{(r)}$ , вызывает наибольшие трудности.

Первые попытки здесь основывались на физически привлекательных идеях о непосредственной связи этого тензора со слагаемыми, описывающими накачку. В частности, хорошо известна простейшая аппроксимация

$$\Phi_{ij}^{(r)} = \alpha P_{ij},$$

дающая при слабой анизотропии хорошо согласие с экспериментом при  $\alpha \approx 3/5$ , — „правило 60% налога“ („60% — income-tax rule“). Однако в общем случае приведенное соотношение не может быть принято даже как полуэмпирическое: тензор  $\Phi_{ij}^{(r)}$ , в отличие от  $P_{ij}$ , имеет нулевой след. Заманчивая возможность обобщения:

$$\Phi_{ij}^{(r)} \sim \left( P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right)$$

(„изотропизация накачки“), как показывают расчеты, оказывается несостоятельной, как и физически привлекательная модель

$$\Phi_{ij}^{(r)} \sim \left( P_{ij} - 2Pb_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right)$$

изотропного перераспределения производства анизотропии [1].

В результате наиболее распространенными в настоящее время являются несколько более сложные полуэмпирические модельные выражения для этого тензора, впервые предложенные в работах [2–5]:

$$\Phi_{ij}^{(r)} = C_2 K S_{ij} + C_3 K \left( b_{ik} S_{kj} + S_{ik} b_{kj} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{nm} \delta_{ij} \right) - C_4 K (b_{ik} W_{kj} - W_{ik} b_{ij}). \quad (4)$$

Здесь  $S_{ij} = \frac{1}{2}(U_{ij} + U_{ji})$  и  $W_{ij} = \frac{1}{2}(U_{ij} - U_{ji})$  — симметричная и антисимметричная части тензора скоростей деформации;  $\{C_i\}$  — модельные константы. В рамках представления (4) предполагается также, что тензор  $\varepsilon_{ij}$  диссипации энергии изотропен.

С помощью моделей, основанных на представлении (4), удалось получить удовлетворительные результаты при расчетах довольно широкого класса течений, хотя, например, при расчете течений в канале для пристеночных областей приходится вводить дополнительные корректирующие функции.

В целом, однако, несмотря на физическую содержательность идей, используемых при построении подобных выражений, они все же обладают двумя принципиальными недостатками. Во-первых, модельные „константы“ во многом сохраняют (вследствие полуэмпиричности подхода) функциональную неопределенность. Во-вторых, как было отмечено еще в [6], велика (и, главное, заранее непредсказуема) вероятность нарушения известных условий реализуемости, к которым относятся, например, неравенства

$$\langle u_1^2 \rangle \geq 0; \quad \langle u_1 u_2 \rangle^2 \leq \langle u_1^2 \rangle \langle u_2^2 \rangle \quad (5)$$

и аналогичные им, вытекающие из положительной определенности тензора Рейнольдса.

Критерии реализуемости были далее развиты в работе [7], в которой была сформулирована „сильная“ (strong realizability) версия критерия: скорость изменения параметра должна обращаться в нуль при приближении к соответствующему физическому пределу. Такая формулировка, как будет показано ниже, оказалась более удобной и конструктивной для совершенствования моделей.

В целом для преодоления этих трудностей в развитии моделей второго поколения в последнее время произошло смещение акцентов: все больше внимания уделяется точному соотношению для  $\Phi_{ij}^{(r)}$  [8,9]:

$$\Phi_{ij}^{(r)} = 2U_{lm} (M_{imlj} + M_{jmli}). \quad (6)$$

Здесь  $M_{ilmj} \equiv \int (F_{mj}\theta_l\theta_i) d\mathbf{k}$ ,  $F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r})$  — спектральная матрица двухточечных корреляций  $\langle u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle$ ,  $\theta \equiv \mathbf{k}/k$ ,  $\mathbf{k}$  — волновой вектор.

Строго говоря, приведенное представление является строгим лишь для однородных течений: в общем случае необходимо учитывать и пристеночные эффекты, и высшие производные средней скорости [10]. Однако в приближении локально однородной (интегральный масштаб турбулентности существенно меньше соответствующего „внешнего“ масштаба длины) турбулентности, которое и принимается всюду в дальнейшем, выражение (6) можно считать очень хорошей аппроксимацией.

Проблема моделирования  $\Phi_{ij}^{(r)}$  сводится при этом к отысканию тензора  $M_{ilmj}$ , точнее, к изучению матрицы  $F_{ij}$  двухточечных корреляций. Предпринятые в ряде работ [8,9] попытки такого изучения физически обогатили полуэмпирические модели, позволили лучше увязать их с представлениями о структуре турбулентности. Для модельных коэффициентов  $\{C_i\}$  удается получить явные выражения через двухточечные корреляции, причем один из этих коэффициентов, как было показано еще Crow, непосредственно выводится из явного выражения для  $M_{ilmj}$  в случае изотропных начальных условий:  $C_2 = 4/5$ .

Однако наиболее естественный (и, по существу, единственный в рамках стратегии DRSM) подход для отыскания  $\Phi_{ij}^{(r)}$  заключается в параметризации тензора  $M_{ilmj}$  через тензор анизотропии  $b_{ij}$  (при этом модель для  $\Phi_{ij}^{(r)}$  должна быть, согласно (6), линейной по средней скорости деформаций). В наиболее общем виде такой подход, по-видимому, был реализован в [10,11], а именно, вначале с использованием теоремы Кейли–Гамильтона и пакетов вычислительной матричной алгебры для  $M_{ilmj}$  было получено общее (четвертого по тензору  $\mathbf{b}$  порядка) выражение, включающее 15 тензорно независимых слагаемых и соответственно 15 скалярных коэффициентов. Затем с учетом условия несжимаемости  $M_{ijiq} = 0$ , симметрии и „калибровки“  $M_{ijpp} = b_{ij} + \delta_{ij}/3$  число коэффициентов было уменьшено до девяти. В итоге для  $\Phi_{ij}^{(r)}$  получено следующее общее представление:

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}^{(r)}/K = & 2(2q_1\{\hat{b}\hat{S}\} + 4q_9\{\hat{b}^2\hat{S}\})G_{ij}^{(1)} + q_2G_{ij}^{(2)} \\ & + 2q_3G_{ij}^{(3)} + 2q_4G_{ij}^{(4)} + 4(2q_5\{\hat{b}\hat{S}\} + 4q_{10}\{\hat{b}^2\hat{S}\})G_{ij}^{(5)} \\ & + 4q_6G_{ij}^{(6)} + 4q_7G_{ij}^{(7)} + 8q_8G_{ij}^{(8)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $G_{ij}^{(n)}$ ,  $n = 1 \dots 8$  — независимые (бесшпуровые) элементы тензорного базиса:

$$\begin{aligned} G_{ij}^{(1)} = & b_{ij}, \quad G_{ij}^{(2)} = S_{ij}, \quad G_{ij}^{(3)} = b_{ik}S_{kj} + S_{ik}b_{kj} - \frac{2}{3}\{\hat{b}\hat{S}\}\delta_{ij}, \\ G_{ij}^{(4)} = & b_{ik}W_{kj} - W_{ik}b_{kj}, \quad G_{ij}^{(5)} = b_{ik}b_{kj} + \frac{8}{3}\Pi_b\delta_{ij}, \\ G_{ij}^{(6)} = & b_{ik}S_{kl}b_{lj} - \frac{4}{3}\{\hat{b}^2\hat{S}\}\delta_{ij}, \quad G_{ij}^{(7)} = b_{ik}b_{kl}W_{lj} - W_{ik}b_{kl}b_{lj}, \\ G_{ij}^{(8)} = & b_{ik}b_{kl}W_{lm}b_{mj} - b_{ik}W_{kl}b_{lm}b_{mj}. \end{aligned} \quad (8)$$

Что касается коэффициентов  $\{q_i\}$  в представлении (7), то независимы лишь шесть из них, для остальных в [10,11] выведены соотношения:

$$\begin{aligned} q_2 = & \frac{4}{5} + \frac{4}{5}(4q_1 - 3q_7)\Pi_b - \frac{48}{5}q_9\Pi_b, \\ q_3 = & \frac{12}{7} + \frac{9}{7}q_4 + \frac{8}{7}(3q_8 + 2q_9)\Pi_b, \\ q_5 = & q_9, \quad q_6 = 6q_1 - 9q_7 + 8q_{10}\Pi_b. \end{aligned} \quad (9)$$

Упомянутые коэффициенты в общем случае могут зависеть от инвариантов  $\Pi_b \equiv -\{b^2\}/2$  и  $\Pi_b \equiv \{b^3\}/3$  тензора анизотропии и числа Рейнольдса (хотя следует отметить что не исключена и их зависимость от инвариантов, характеризующих среднюю деформацию, например,  $\{\hat{S}^2\}$ ). Обычно эту зависимость учитывают на основе разложения независимых параметров  $\{q_i\}$  в ряд по параметрам анизотропии. Чтобы при этом модель для  $\Phi_{ij}$  включала все тензорно независимые слагаемые в исходном представлении для  $M_{ijpq}$ , она должна быть пятого порядка по параметру анизотропии  $\|\mathbf{b}_{ij}\|$ . При этом для шести независимых параметров  $\{q_i\}$  достаточно ограничиться разложением:

$$\begin{aligned} q_4 = & \eta_1 - 8\eta_4\Pi_b + 24\eta_7\Pi_b + 64\eta_{11}\Pi_b^2, \\ q_1 = & \eta_2 - 8\eta_8\Pi_b + 24\eta_{12}\Pi_b, \quad q_7 = \eta_3 - 8\eta_9\Pi_b + 24\eta_{13}\Pi_b, \\ q_8 = & \eta_5 - 8\eta_{14}\Pi_b, \quad q_9 = \eta_6 - 8\eta_{15}\Pi_b, \quad q_{10} = \eta_{10}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $\{\eta_i\}$  — коэффициенты, которые в общем случае могут зависеть от инвариантов матриц  $S_{ij}$  и  $W_{ij}$ , но не от параметров анизотропии. Число этих коэффициентов удается существенно сократить, если использовать условие „сильной реализуемости“:  $M_{\lambda jiq} = 0$  когда  $u_\lambda = 0$ , что эквивалентно требованию зануления соответствующих компонент тензора  $\Phi_{ij}^{(r)}$  в предельном случае двумерной турбулентности, когда  $-\Pi_b = 1/9 + 3\Pi_b$ . В результате из 15 коэффициентов в самой общей модели пятого порядка, автоматически удовлетворяющей условию реализуемости, независимыми остаются лишь 7, в качестве которых удобно выбрать  $\eta_1 - \eta_6$  и  $\eta_{10}$ .

В соответствующей модели четвертого порядка число констант сокращается до четырех:

$$\begin{aligned} \eta_1 = & -28\gamma_1/3 - \frac{4}{3}, \quad \eta_2 = -8\gamma_2 + 30\gamma_3, \quad \eta_3 = -16\gamma_2 + 28\gamma_3, \\ \eta_4 = & -9/40 + 21\gamma_1/2 - 228\gamma_2/5 - 17\gamma_3 + 2\gamma_4/9, \\ \eta_5 = & -3/2 - 132\gamma_2 + 2\gamma_4/3, \\ \eta_6 = & 3/2 + 60(\gamma_2 + \gamma_3), \quad \eta_{10} = \gamma_4. \end{aligned} \quad (11)$$

Если ограничиться моделью третьего порядка, из четырех коэффициентов  $\{\gamma_i\}$  независимым остается лишь один [12]:

$$\gamma_2 = -3/88 - 5\gamma_1/11, \quad \gamma_3 = 3/88 + 21\gamma_1/22, \quad \gamma_4 = 0. \quad (12)$$

Следует отметить, что в работе [11] в соотношениях (12) для  $\{\gamma_i\}$  допущена опечатка; она исправлена в [12].

Иерархию замыкает квадратичная модель, для которой условие сильной реализуемости оказывается достаточным для определения всех констант:  $\gamma_1 = -1/20$ . В рамках линейной модели удовлетворить указанному условию не удается.

В целом модели рассматриваемого типа существенно расширили класс течений, поддающихся расчету, причем без введения, например, искусственных функций, обеспечивающих затухание вблизи стенки. В то же время в рамках этих моделей возникли и некоторые принципиальные трудности. Например, как было отмечено уже в работе [11], при расчете двумерных искажений однородной турбулентности поведение инвариантов  $\Pi_b$  и  $\Pi_{\hat{b}}$  оказывается одинаковым для всех типов искажения, что не соответствует экспериментальным данным. Более того, некоторые известные эффекты, например затухающие осцилляции компонент тензора анизотропии в случае чистого вращения, в принципе не могут быть описаны в рамках этих моделей, так как при  $S_{ij} = 0$  оба инварианта  $\Pi_b$  и  $\Pi_{\hat{b}}$  остаются постоянными.

Подобные эффекты могут быть объяснены, если включить в модели слагаемые, нелинейные по  $U_{ij}$ . В этой связи следует упомянуть еще об одном подходе к моделированию турбулентности, который несмотря на то что получил развитие лишь в последнее десятилетие можно рассматривать как некоторую промежуточную между моделями первого и второго поколения стратегию замыкания: алгебраические модели для тензора Рейнольдса (ARSM, algebraic Reynolds stress models). Этот подход основан на допущении о „слабом равновесии“ (weak-equilibrium assumption), когда тензор анизотропии медленно изменяется в пространстве и времени, и соответственно конвекционным и диффузионным слагаемым в уравнениях переноса (3) для этого тензора можно пренебречь. Как следствие, это дифференциальное уравнение сводится к алгебраическому:

$$2\left(b_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\right)\left(\frac{P}{\varepsilon} - 1\right) = \frac{1}{\varepsilon}(P_{ij} - \varepsilon_{ij} + \Phi_{ij}). \quad (13)$$

При этом для слагаемого  $\Phi_{ij}$ , как и в рамках подхода DRSM, используются те или иные модельные выражения, так что уравнение (13) сводится к соотношению, неявным образом определяющему  $b_{ij}$ . Далее, чтобы получить явное (EARSM, explicit algebraic Reynolds stress models) выражение для тензора  $b_{ij}$ , его представляют в виде разложения по тензорному базису:

$$\hat{b} = \sum_i \beta_i \hat{T}_i, \quad (14)$$

где базисные матрицы  $\{\hat{T}_i\}$  (в общем случае их минимальное число равно пяти) составлены из степенных комбинаций матриц  $\hat{S}$  и  $\hat{W}$ , а коэффициенты  $\{\beta_i\}$  зависят от всевозможных сверток  $\{\hat{S}^n \hat{W}^m\}$ ; их можно найти, подставив представление (14) в соотношение (13). Окон-

чательное выражение для тензора  $\hat{b}$  оказывается достаточно громоздким, однако его можно рассматривать как естественное обобщение соотношения (1).

В рамках подхода EARSM представляется естественным использование модельных выражений для  $\Phi_{ij}^{(r)}$ , которые зависят от  $\hat{S}$  и  $\hat{W}$  нелинейно. В частности, в [13] для  $\Phi_{ij}^{(r)}$  было предложено следующее обобщение классического представления (4) (девиаторной частью тензора  $\varepsilon_{ij}$  пренебрегаем):

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}^{(r)}/\varepsilon = & C_2 S_{ij} + C_3 \left( b_{ik} S_{kj} + S_{ik} b_{kj} - \frac{2}{3} \{ \hat{b} \hat{S} \} \delta_{ij} \right) \\ & - C_4 (b_{ik} W_{kj} - W_{ik} b_{kj}) \\ & + 2C_W \left( b_{ik} S_{kj}^2 + S_{ik}^2 b_{kj} - \frac{2}{3} \{ \hat{b} \hat{S}^2 \} \delta_{ij} \right) / \sqrt{\Pi_S} \\ & + 2C_W \left( b_{ik} W_{kj}^2 + W_{ik}^2 b_{kj} - \frac{2}{3} \{ \hat{b} \hat{W}^2 \} \delta_{ij} \right) / \sqrt{-\Pi_W}. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь  $\Pi_S \equiv \{ \hat{S}^2 \}$ ,  $\Pi_W \equiv \{ \hat{W}^2 \}$ .

## Проверка адекватности

Представленная в предыдущем разделе иерархия нелинейных моделей, как отмечалось, автоматически удовлетворяет критерию сильной реализуемости, что обеспечивает, например, выполнение условий (5) положительной определенности тензора Рейнольдса. Однако, как было показано в [14–16], непосредственно из спектрального представления тензора  $\Phi_{ij}^{(r)}$  можно вывести даже более общие неравенства, которым должны удовлетворять компоненты этого тензора. Вывод основывается на очень простом факте положительной определенности спектральной матрицы двухточечных корреляций пульсационной скорости (физически это означает, что амплитуды колебаний всех масштабов положительны):

$$F_{ij} \xi_i \bar{\xi}_j \geq 0. \quad (16)$$

Отметим, что условие положительной определенности тензора Рейнольдса действительно можно рассматривать как частное следствие неравенства (16): для этого достаточно проинтегрировать это неравенство по всем возможным значениям волнового вектора  $\mathbf{k}$  при условии, что  $\xi$  не зависит от  $\mathbf{k}$ .

Однако непосредственно из (16) можно получить и другие следствия, в частности, если в качестве  $\xi_i$  выбрать  $U_i \theta_i$ , то после интегрирования по  $\mathbf{k}$  простые преобразования приводят к неравенству [16,17]:

$$-R^2 \leq \frac{\{U\Phi^{(r)}\}}{2K\{S^2\}} \leq (2 + 2|R| + R^2), \quad (17)$$

которое можно рассматривать как новый критерий адекватности моделей. Причем этот критерий представляется весьма удобным в практическом использовании: с его помощью проверку моделей можно осуществлять еще до проведения громоздкой процедуры численного решения системы дифференциальных уравнений.

В данной работе это будет сделано на примере анализа адекватности иерархии нелинейных по параметру анизотропии моделей (7) и модели (15), нелинейной по средней деформации. Ранее [15–17] такой анализ был осуществлен для линейных и квадратичных моделей.

Хотя критерий (17) представляет собой всего лишь алгебраическое неравенство, в общем случае оно весьма громоздко, поэтому для наглядности и компактного представления результатов дальнейшее рассмотрение будет проведено не в самом общем виде. Во-первых, следуя результатам работы [16], в двойном неравенстве (17) ограничимся рассмотрением лишь левого — более сильного. Во-вторых, всюду в дальнейшем будут рассмотрены лишь двумерные искажения, когда матрица средних скоростей деформации имеет вид:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = ((D + \omega)\delta_{i1}\delta_{j2} + (D - \omega)\delta_{i2}\delta_{j1}). \quad (18)$$

Здесь  $D$  и  $\omega$  — параметры, характеризующие плоскую деформацию и вращение.

Тензор анизотропии в этом случае имеет лишь три независимых компонента, т.е. определяется лишь тремя параметрами, в качестве которых можно, например, выбрать следующие свертки:

$$B_1 = \frac{\{\hat{b}\hat{S}\}}{\{\hat{S}^2\}^{1/2}}, \quad B_2 = \frac{\{\hat{b}\hat{W}\hat{S}\}}{\{\hat{S}^2\}}, \quad B_3 = \frac{\{\hat{b}\hat{S}^2\}}{\{\hat{S}^2\}}. \quad (19)$$

При этом для самого тензора  $\hat{b}$  можно записать следующее точное соотношение [18], представляющее собой его разложение по простому базису, включающему лишь три тензорных элемента (в общем, трехмерном, случае представление (19) приходится заменить на несколько более сложное, с пятью базисными тензорами):

$$\hat{b} = B_1\hat{S}/\{\hat{S}^2\}^{1/2} - B_2(\hat{S}\hat{W} - \hat{W}\hat{S})/(R^2\{\hat{S}^2\}) + 6B_3(\hat{S}^2/\{\hat{S}^2\} - \hat{I}/3). \quad (20)$$

Здесь  $R^2 \equiv -\{\hat{W}^2\}/\{\hat{S}^2\}$ ,  $\hat{I}$  — единичная матрица.

Следует отметить, что соотношение (20) — тождество, в отличие от представления (13), предполагаемого в рамках ARSM.

Более того, для этого типа течений аналогичное (20) представление можно получить и для тензора  $\hat{b}^2$  [18]:

$$\hat{b}^2 - \frac{1}{3}\{\hat{b}^2\}\hat{I} = 2B_1B_3\hat{S}/\{\hat{S}^2\}^{1/2} - 2B_2B_3(\hat{S}\hat{W} - \hat{W}\hat{S})/R^2/\{\hat{S}^2\} + (B_1^2 + 2B_2^2/R^2 - 6B_3^2)(\hat{S}^2/\{\hat{S}^2\} - \hat{I}/3). \quad (21)$$

При рассмотрении иерархии (7) нелинейных по  $\hat{b}$  моделей для простоты ограничимся лишь моделями четвертого по  $\hat{b}$  порядка включительно. Подставив в основное неравенство (17) выражение (7) для  $\Phi_{ij}^{(r)}$ ,

с использованием представлений (20) и (21) после несложных, хотя и громоздких, выкладок имеем:

$$\begin{aligned} & 1/5 + R^2/2 + \eta_1 B_2 + \frac{3}{7}(4 + 3\eta_1)B_3 + 4\eta_3 B_2 B_3 \\ & + \frac{18}{5}(\eta_2 - 2\eta_3)B_3^2 + \frac{3}{5}(6\eta_2 - 7\eta_3)B_1^2 \\ & - \frac{2}{5}(17\eta_2 - 24\eta_3)B_2^2/R^2 + \frac{4}{7}B_3 B_1^2(39\eta_6/5 + 9\eta_4 - 3\eta_5) \\ & - \frac{8}{7}B_3 B_2^2(31\eta_6/5 - 9\eta_4 + 3\eta_5)/R^2 + \frac{24}{7}B_3^3(-3\eta_6/5 \\ & + 9\eta_4 - 3\eta_5) + 2(2\eta_4 - \eta_5)B_2(B_1^2 + 2B_2^2/R^2 + 6B_3^2) \\ & - 8\eta_8 B_1^2 \Pi_b + \frac{8}{5}(3\eta_9 - 4\eta_8)\Pi_b^2 + \frac{24}{7}(9\eta_7 - 2\eta_{10})B_3 \Pi_b \\ & + 24\eta_7 B_2 \Pi_b + 16\eta_{10} B_1^2 B_3^2 + 8(-6\eta_8 + 9\eta_9 + \eta_{10}) \\ & \times \Pi_b(B_1^2/2 - B_2^2/R^2 + B_3^2) - 32\eta_9 \Pi_b B_2 B_3 \geq 0. \quad (22) \end{aligned}$$

Инварианты  $\Pi_b$  и  $\Pi_b$ , присутствующие в (22), как показано в [19], могут быть выражены через набор параметров  $\{B_i\}$ :

$$\begin{aligned} -2\Pi_b &= B_1^2 + 2B_2^2/R^2 + 6B_3^2, \\ \Pi_b &= B_3(B_1^2 + 2B_2^2/R^2 - 2B_3^2). \quad (23) \end{aligned}$$

Первые восемь слагаемых неравенства (22) представляют линейные и квадратичные по параметрам анизотропии вклады, последующие четыре и семь — кубические и четвертого порядка соответственно.

Если для „констант“ модели использовать выражения (12), слагаемые четвертого порядка зануляются, то же происходит со слагаемыми третьего порядка при использовании дополнительного условия  $\gamma_1 = -1/20$ . В последнем случае неравенство (22) приобретает достаточно компактный вид:

$$\begin{aligned} & 2/5 + R^2 + 6(4 + 3\eta_1)B_3/7 + 2\eta_1 B_2 + 8\eta_3 R B_3 B_2/R \\ & + 6(6\eta_2 - 7\eta_3)B_1^2/5 - 4(17\eta_2 - 24\eta_3)B_2^2/5/R^2 \\ & + 36(\eta_2 - 2\eta_3)B_3^2/5 \geq 0. \quad (24) \end{aligned}$$

Ранее это соотношение было получено в [15].

Переходя к анализу неравенства (22), прежде всего следует отметить, что оно включает лишь модельные константы в набор скаляров  $\{B_i\}$ . Что касается матриц средней деформации и вращения, то они представлены в (22) единственным параметром —  $R$ .

Любая модель, претендующая на некоторую степень общности, должна быть согласована с (22) в том смысле, что можно потребовать выполнения неравенства (22) при любых значениях  $R$  и любых физических допустимых значениях набора  $\{B_i\}$ . В конечном счете это требование приводит к простым ограничениям на константы модели или к идентификации той части („области адекватности“) физического домена, где заданный

набор модельных констант обеспечивает выполнение условия (22).

Обычно для представления анизотропных состояний используют плоскость  $(-II_b)-(III_b)$ , на которой физические допустимые состояния ограничены областью внутри так называемого треугольника Ламли. В качестве альтернативы можно, однако, использовать, следуя работам [15,16], плоскость  $B_3-B_2/R$ .

Физически возможные значения соответствующих параметров здесь также ограничены треугольником, представленным на рис. 1. Границам этого треугольника соответствует двумерная турбулентность, вершинам  $A, B, C$  — одномерная (с пульсациями лишь вдоль осей 3, 2, 1 соответственно), отрезкам  $BE, CF, AD$  — осесимметричная турбулентность (случаи  $u_1^2 = u_3^2$ ,  $u_2^2 = u_3^2$  и  $u_1^2 = u_2^2$ ). Точке  $O$  соответствует изотропная турбулентность. Значения параметра  $B_1^2$  при этом, как непосредственно следует из его определения, при заданных параметрах  $B_3$  и  $B_2/R$  ограничены величиной  $2((B_3 + 1/3)^2 - B_2^2/R^2)$ . Семейство соответствующих гипербол также представлено на рис. 1. Область возможных значений параметров  $B_3$  и  $B_2/R$  при заданном  $B_1$  ограничена соответствующей гиперболой и отрезком  $BC$ .

Теперь можно обратиться к непосредственному анализу ограничения (22), применив его последовательно к моделям второго–четвертого порядков. В случае квадратичной модели со значением параметра  $\gamma_1 = -1/20$ , гарантирующим „сильную реализуемость“, во всей физической области выполняется и неравенство (22). Однако следует отметить, что даже при небольших отклонениях параметра  $\gamma_1$  от рекомендуемого значения  $-1/20$  в некоторой области физического домена происходит нарушение условия (22).

В качестве иллюстрации на рис. 2 представлены семейства (по параметрам  $R$  и  $B_1$ ) линий, соответствующих ограничению (22) при значениях (а)  $\gamma_1 = -0.3$  и (б)  $\gamma_1 = -0.09$ . „Запретными“ при этом оказываются, в частности, области течения, в которых преобладают пульсации вдоль оси 3 (а) или осей 1, 2 (б).

Представленные здесь результаты по квадратичной модели несколько отличаются от выведенных ранее

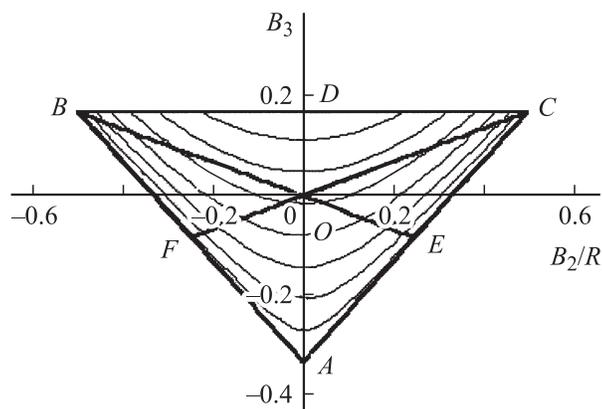


Рис. 1. Допустимые значения параметров  $B_3$  и  $B_2/R$ .

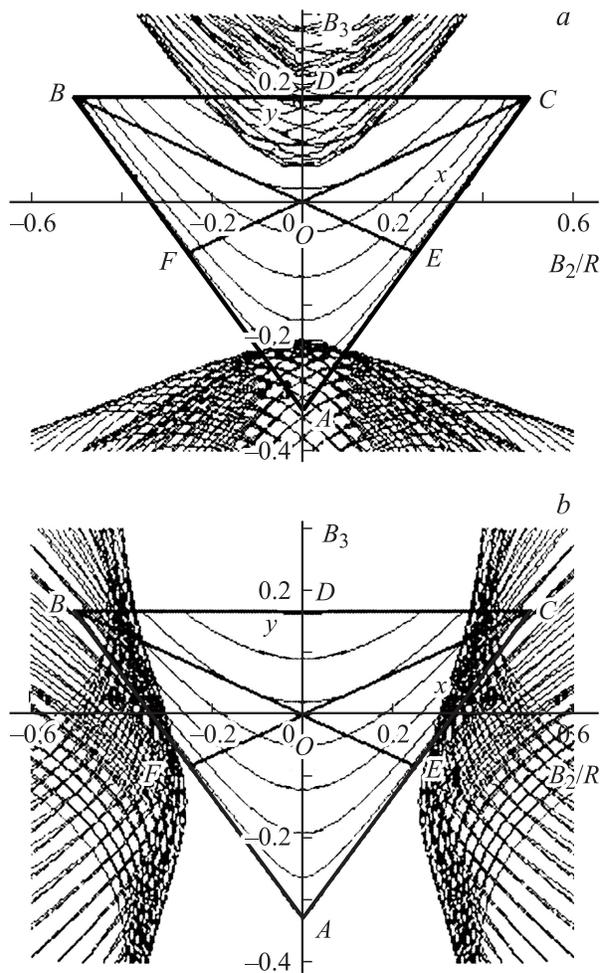


Рис. 2. Конфигурация „запрещенных“ зон для квадратичной модели при  $\gamma_1 = -0.03$  (а) и  $\gamma_1 = -0.09$  (б).

в [15]: в расчеты были внесены исправления, связанные с уже упоминавшейся опечаткой, обнаруженной в [11].

В случае кубической модели, когда в выражениях для  $\Phi_{ij}^{(r)}$  оставляют слагаемые до третьего порядка по параметру анизотропии включительно, параметр  $\gamma_1$  остается неопределенным: его значение не удастся определить из критерия реализуемости. В то же время ограничения на значения этого параметра достаточно просто выводятся из требования выполнения неравенства (22):  $-1/12 \leq \gamma_1 \leq 0$ . При этом даже небольшие отклонения от порогового значения  $-1/12$  приводят к нарушению условия (22) в области боковых сторон треугольника, соответствующих двумерной турбулентности с  $u_1^2 = 0$  или  $u_2^2 = 0$  (рис. 3).

Проверка моделей четвертого порядка выполнена на основе „условий калибровки“, предложенных в [11]:

$$\gamma_1 = -0.075, \quad \gamma_2 = -0.0115, \quad \gamma_3 = -0.05, \quad \gamma_4 = -2.1.$$

Здесь, как видно из рис. 4, нарушения условия (22) наблюдаются в достаточно узкой зоне физического домена. Однако именно с этой зоной, соответствующей,

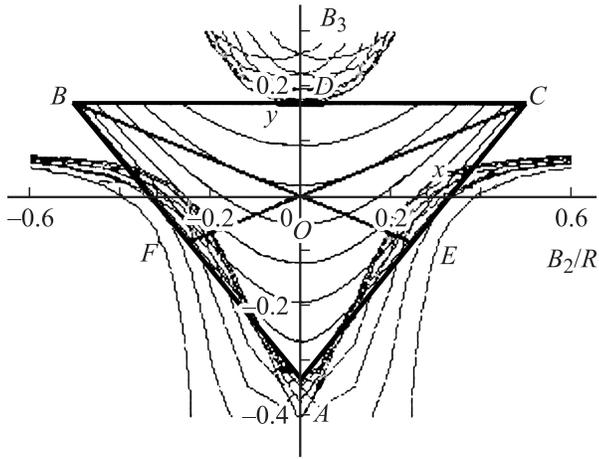


Рис. 3. Семейство линий, задающих ограничение (22) для кубической модели при  $\gamma_1 = -0.1$ .

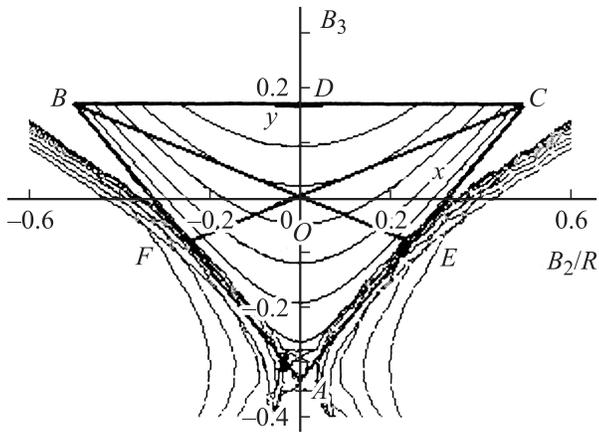


Рис. 4. Проблемные зоны физического домена для модели четвертого порядка.

например, пристеночной области течения в канале, как правило, связаны основные трудности при расчетах.

Не исключено, что за счет небольшого варьирования значений четырех модельных констант  $\{\gamma_i\}$  можно добиться выполнения условия (22) во всей физической области.

В целом, однако, анализ иерархии моделей (7) показывает, что их последовательное усложнение не приводит к монотонному улучшению ситуации с выполнением ограничения (22). В частности, некоторые зоны, „безопасные“ на предшествующем уровне иерархии, оказываются проблемными при „улучшении“ модели. Этот вывод, в частности, иллюстрируется рис. 5, где зоны нарушения основного условия (22), изображенные ранее на рис. 3 и 4, представлены в традиционном виде, с использованием треугольника Ламли. Для кубической модели, как видно из рис. 5, а, проблемной оказывается зона, которой, как известно [11], соответствуют значения параметров анизотропии, характерные для течения за ступенькой. В то же время в модели четвертого порядка,

несмотря на сужение „запретной“ зоны в целом, в разряд проблемных попадает часть физического домена, соответствующая, например, пристеночным областям течения в канале [20].

Аналогичным образом можно протестировать на предмет выполнения ограничения (17) и модели, нелинейные по средней скорости деформации. Для определенности ограничимся анализом предложенного в [13] выражения (15), представляющего собой простейшее обобщение линейной модели.

Производя свертку выражения (15) с  $\hat{S}$  с использованием соотношений  $\{\hat{b}\hat{S}^3\} = \{\hat{b}\hat{S}\}\{\hat{S}^2\}/2$  и  $\{\hat{W}^2\hat{b}\hat{S}\}/\sqrt{-\Pi_W/\{\hat{S}^2\}} = -RB_1S$  неравенство (17) в данном случае можно записать в виде:

$$C_2/2 + R^2 + C_3B_3 - C_4B_2 + C_W B_1(1 - R) \geq 0. \quad (25)$$

При использовании значений констант, предложенных в работе [13], неравенство (25) выполняется не во всей

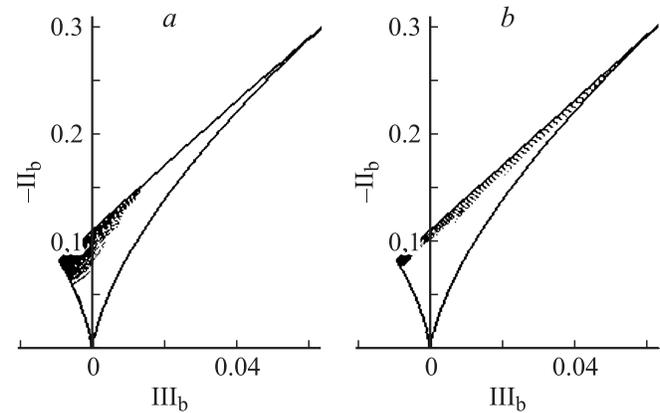


Рис. 5. Конфигурация „запретных“ зон для моделей (а) третьего с  $\gamma_1 = -0.1$  и (б) четвертого порядка с представлением физического домена (треугольник Ламли) на плоскости инвариантов  $\Pi$ ,  $-\Pi$ .

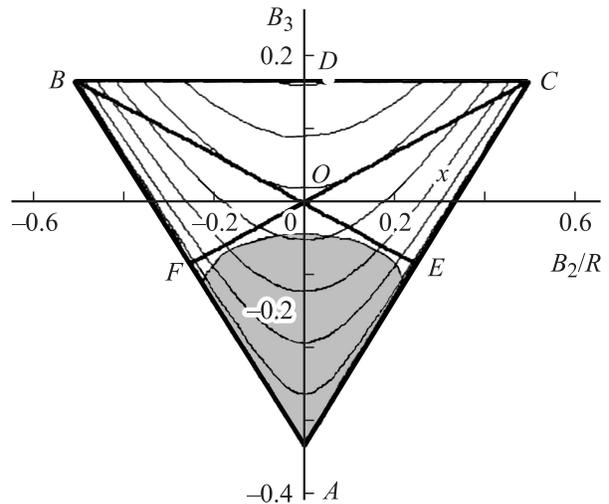


Рис. 6. Область нарушения критерия адекватности для нелинейной по средней скорости деформации модели.

области физического домена. Характер нарушения условия (25) иллюстрирует рис. 6, на котором представлена область физического домена, в которой неравенство (25) не выполняется.

С другой стороны, непосредственный анализ условия (25) позволяет получить простые ограничения на значения констант, гарантирующие выполнения неравенства во всем физическом домене, а именно при  $C_W \leq C_3/\sqrt{2}$  должно выполняться условие  $C_2 \geq 2C_3/3$ . В свою очередь, при  $C_W \geq C_3/\sqrt{2}$  константу  $C_2$  следует выбирать на основе ограничения  $C_2 \geq -C_3/3 + C_W\sqrt{2}$ . Следует отметить что ограничение  $C_2 \geq 2C_3/3$  было получено ранее в [16] при анализе линейных моделей (3).

## Заключение

Простое ограничение (17), как показано в работе, оказывается достаточно конструктивным при оценке адекватности моделей для корреляций „давление–скорости деформаций“. С одной стороны, на его основе для каждой „калиброванной“ модели легко заранее, до стадии решения громоздкой системы соответствующих дифференциальных уравнений, рассчитать те зоны физического домена, где модель не удовлетворяет условию (17). С практической точки зрения это позволяет определить класс течений, для которых соответствующие модели можно считать условно приемлемыми. При этом, конечно, следует иметь в виду, что полностью адекватной можно считать лишь модель, автоматически удовлетворяющую ограничению (17) во всей физической доступной области.

С другой стороны, на примерах кубичной по параметру анизотропии и квадратичной по средней скорости деформации моделей показано, что из условия (17) легко выводятся простые неравенства для модельных констант, которые также могут быть полезны в практических расчетах.

В целом, однако, как отмечалось выше, последовательное усложнение моделей не приводит к монотонному улучшению ситуации с выполнением ограничения (17). Это может свидетельствовать о том, что турбулентность является более нелокальной, чем предполагается в рамках моделей второго поколения, и набор полей, для которых составляются дифференциальные уравнения, должен быть в общем случае расширен или изменен.

## Список литературы

- [1] *Girimaji S.S., Jeong E., Poroseva S.V.* // Phys. of Fluids. 2003. Vol. 15. N 10. P. 3209–3222.
- [2] *Speziale C.G., Sarkar S., Gatski T.B.* // J. Fluid Mech. 1991. Vol. 227. P. 245–272.
- [3] *Launder B.E., Reece G., Rodi W.* // J. Fluid Mech. 1975. Vol. 68. P. 537–566.
- [4] *Gibson M.M., Launder B.E.* // J. Fluid Mech. 1978. Vol. 86. P. 491–511.
- [5] *Taulbee D.B.* // Phys. Fluids A. 1992. Vol. 4. P. 2555–2561.
- [6] *Ламли Дж.* // Методы расчета турбулентных течений. М.: Мир, 1984. С. 7–34.
- [7] *Pope S.B.* // Prog. Energy Combust. Sci. 1985. Vol. 11. P. 119.
- [8] *Knoell J. and Taulbee D.B.* // Phys. of Fluids. 2001. Vol. 13. N 8. P. 2386–2393.
- [9] *Moon Joo Lee.* // Phys. Fluids. 1989. A1. P. 1541–1557.
- [10] *Johansson A.V. and Hallback M.* // J. Fluid Mech. 1994. Vol. 269. P. 143–168.
- [11] *Sjogren T., Johansson A.V.* // Phys. of Fluids. 2000. Vol. 12. N 6. P. 1554–1572.
- [12] *Grundestam O.* Modelling and simulation of turbulence subject to system rotation. Doctoral Thesis in Fluid Mechanics. Stockholm, Sweden, 2006.
- [13] *Grundestam O., Wallin S., Johansson A.V.* // Int. J. of Heat and Fluid Flows. 26. 2005. Vol. 26. P. 732–745.
- [14] *Богданов С.Р., Соболев С.И.* // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 2. С. 42–46.
- [15] *Богданов С.Р.* // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33. Вып. 19. С. 16–23.
- [16] *Богданов С.Р., Jongen T.J.* // Прикладная механика и техническая физика. 2008 (принята к печати).
- [17] *Bogdanov S.R., Jongen T.J.* // Abstracts. Euromech Fluid Mechanics Conf. 6. Stockholm: Royal Institute of Technology. 2006. Vol. 2. P. 224.
- [18] *Jongen T.J., Gatski T.B.* // Theoret. Comput. Fluid Dynamics. 1998. Vol. 11. P. 31–47.
- [19] *Jongen T.J., Gatski T.B.* // J. Fluid Mech. 1999. Vol. 399. P. 117–150.
- [20] *Krogstad P.A., Torbergsen L.E.* // Flow, Turbulence and Combustion. 200. Vol. 64. P. 161–181.