

01;10

## Минимизация радиального эмиттанса пучка источника синхротронного излучения

© В.П. Белов, В.Л. Васильев, Е.К. Кошурников, Ю.П. Севергин

Научно-производственное предприятие „Нева-Магнит“,  
190005 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: root@magnet.spb.su

(Поступило в Редакцию 24 января 2008 г.)

Изучается возможность минимизации радиального эмиттанса пучка накопителя — источника синхротронного излучения. Показано, что он меньше, если в магнитной кольцевой структуре накопителя используются неоднородные поля.

PACS: 41.60.Ar

### Введение

Синхротронное излучение (СИ) находит все более широкое применение во многих областях науки, техники, медицины и биологии [1]. Потребность в источниках СИ весьма велика — в настоящее время функционируют или находятся в стадии изготовления порядка 70 подобных установок и проектируются новые. Основными характеристиками СИ являются спектральный поток и спектральная яркость излучения, и новые установки создаются с целью их повышения. Спектральный поток

$$F(\lambda) = \frac{dN_{ph}}{dt \cdot d\phi} [\text{photons/s} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}] \quad (1)$$

определяется количеством фотонов  $dN_{ph}$ , испускаемых в  $1 \text{ m} \cdot \text{rad}$  горизонтального угла, в единицу времени в полосе длин волн  $\Delta\lambda$  около заданной длины волны  $\lambda$ . Общепринятой полосой длин волн  $\Delta\lambda$  для сравнения яркостей источников является  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 10^{-3}$ .

Спектральная яркость источника

$$L(\lambda) = \frac{F(\lambda)}{(\Delta x \cdot \Delta z) \sqrt{\Delta\psi_\lambda^2 + \Delta\theta_z^2}} [\text{photons/mm}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^2] \quad (2)$$

определяет плотность потока фотонов в фазовом пространстве, зависящую от числа фотонов, излучаемых в единицу времени на длине волны  $\lambda$  в полосе длин волн  $\Delta\lambda$  с единицы площади источника  $\Delta x \cdot \Delta z$  в единицу телесного угла. Здесь  $\Delta\theta_z$  — вертикальный угловой разброс электронного пучка,  $\Delta\psi_\lambda$  — характерный вертикальный угол излучения. Чтобы приблизиться к высокой яркости, присущей излучению отдельной частицы, необходимо, чтобы электронный пучок имел большой ток и малый естественный радиальный эмиттанс  $\varepsilon_x$ , определяемый особенностями магнитной структуры накопителя электронов — источника СИ, поскольку  $\Delta x \approx 2\sqrt{\beta_x \varepsilon_x}$ , где  $\beta_x$  — значение радиальной бета-функции. Характерные для современных источников СИ величины естественного эмиттанса находятся в

диапазоне от единиц до десятков  $\text{nm} \cdot \text{rad}$ . Однако уже сейчас требуется снижение ее минимальной величины на один-два порядка.

Часто в накопителях рассматриваются магниты с однородным полем. Известно, что чем меньше угол отклонения пучка в магните  $\varphi_m$ , тем меньше естественный эмиттанс  $\varepsilon_x$ . При малых углах  $\varphi_m$  тригонометрические функции, описывающие движение частиц в магните с однородным полем, можно разлагать в ряды и ограничиваться их первыми двумя членами. Полученные в этом приближении формулы налагают условия на выбор значений параметров Твисса и дисперсионных функций на входе в дипольные магниты. Однако при использовании в накопителе магнитов с сильно неоднородным полем нельзя пользоваться такими разложениями.

В настоящей работе рассматривается общий случай использования в накопителях магнитов с сильно неоднородными полями и произвольными углами поворота пучка в них, когда разлагать тригонометрические функции в ряды нельзя.

### 1. Радиальный эмиттанс пучка источника СИ

Радиальный эмиттанс электронного пучка в синхротроне (бустере, или накопителе), определяемый квантовыми флуктуациями излучения, без учета действия вставных устройств (вигглеров и ондуляторов), в случае, когда все магниты в кольце синхротрона одинаковы, имеет вид [2]

$$\varepsilon_x = \frac{C_q \gamma^2}{J_x} \frac{\oint H(s) \left| \frac{B(s)}{(B\rho)} \right| ds}{\oint \left( \frac{B(s)}{(B\rho)} \right) ds} = \frac{C_q \gamma^2}{J_x} \frac{1}{2\pi\rho} \left( \sum_i \int_0^{\varphi_m} \{H(\varphi)\}_i d\varphi \right). \quad (3)$$

Здесь интегрирование ведется по всем поворотным магнитам кольцевого электромагнита,

$$C_q = \frac{55}{32\sqrt{3}} \Lambda \approx 3.84 \cdot 10^{-13} \text{ (m} \cdot \text{rad)},$$

$\Lambda = \frac{\hbar}{m_0 c}$  — комптоновская длина волны электрона,  $\hbar$  — постоянная Планка,  $m_0$  — масса покоя электрона,  $\gamma$  — релятивистский фактор,  $\rho$  — радиус средней орбиты,  $B$  — индукция магнитного поля на ней,  $\varphi_m$  — полный угол поворота электрона в магните,  $(B\rho)$  — его магнитная жесткость,

$$J_x = 1 - \frac{1}{2\pi\rho} \oint \eta(1 - 2n)d\varphi, \quad (4)$$

— относительный декремент затухания радиальных бетатронных колебаний, если все магниты одинаковы,  $n = -\frac{\rho}{B} \frac{\partial B}{\partial x}$  — индекс неоднородности магнитного поля в них,

$$H = \gamma\eta^2 + 2\alpha\eta\eta' + \beta\eta'^2, \quad (5)$$

— аналог инварианта Куранта–Снайдера для дисперсионных функций  $\eta, \eta', \alpha = -\frac{1}{2}\beta', \beta, \gamma = \frac{1+\alpha^2}{\beta}$  — параметры Твисса радиального бетатронного движения.

Будем считать, что индекс неоднородности магнитного поля  $n$  может быть разным в различных магнитах. Разделим все магниты в пределах данной магнитной структуры по величине индекса  $n$  на две группы и отнесем к группе 1 магниты с  $n < 1$ , а к группе 2 — магниты с  $n > 1$ . Магниты, принадлежащие разным группам, могут отличаться значением параметров  $\rho, \varphi_m, \alpha, \beta, \eta, \eta'$ .

Кольцевой электромагнит накопителя состоит из  $N$  переходов, обладающих зеркальной симметрией относительно их центров. Каждая половина периода содержит одинаковые ахроматы или магнитные элементы, сглаживающие и уменьшающие дисперсионные функции. Число магнитов в периодах может быть четным в каждой из двух групп или нечетным в одной из них. Один магнит, относящийся к периоду с нечетным числом магнитов, находится в центре этого периода. Условно разделим этот магнит на две одинаковые части с уменьшенными в два раза углами поворота. Тогда число магнитов на периоде накопителя в группах 1 и 2 всегда будет четным и равным  $2m_1$  или  $2m_2$ , где  $m_1$  и  $m_2$  есть число магнитов группы 1 или 2 на половине периода структуры накопителя. Полное число магнитов обеих групп в кольце равно  $2N(m_1 + m_2)$ . С учетом этого формулы (3) и (4) могут быть записаны так:

$$\varepsilon_x = \frac{C_q \gamma^2}{J_x} \frac{\sum_{i=1}^{m_1} \int_0^{\varphi_{mi}} \frac{1}{\rho_{1i}^2} H_i d\varphi + \sum_{i=1}^{m_2} \int_0^{\varphi_{mi}} \frac{1}{\rho_{2i}^2} H_i d\varphi}{\sum_{i=1}^{m_1} \frac{1}{\rho_{1i}} \varphi_{mi} + \sum_{i=1}^{m_2} \frac{1}{\rho_{2i}} \varphi_{mi}}, \quad (6)$$

$$J_x = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{m_1} \int_0^{\varphi_{mi}} \frac{1-2n_{1i}}{\rho_{1i}^2} \eta_i d\varphi + \sum_{i=1}^{m_2} \int_0^{\varphi_{mi}} \frac{1-2n_{2i}}{\rho_{2i}^2} \eta_i d\varphi}{\sum_{i=1}^{m_1} \frac{1}{\rho_{1i}} \varphi_{mi} + \sum_{i=1}^{m_2} \frac{1}{\rho_{2i}} \varphi_{mi}}. \quad (7)$$

Поскольку период накопителя зеркально симметричен относительно его центра, суммирование ведется по магнитам каждой группы на половине периода накопителя. Число магнитов на ней соответственно равно  $m_1$  или  $m_2$ , а полное число в кольце накопителя —  $2Nm_1$  или  $2Nm_2$ . Одинаковый множитель  $2N$  в числителе и знаменателе сокращен. В каждой группе магнитов (1, 2) значения бетатронных и дисперсионных функций на входе  $i$ -го магнита будем считать разными.

В свободных промежутках накопителя (источника СИ) размещаются так называемые вставные устройства (вигглер-магниты и ондуляторы). Для них требуются большие (до нескольких метров) промежутки с нулевой или малой дисперсией. Эти вставные устройства дополнительно изменяют величину эмиттанса  $\varepsilon_x$ , но в данной работе не будем учитывать их влияние, рассматривая натуральный эмиттанс, определяемый только особенностями магнитной структуры накопителя.

Интегрирование в (6), (7) ведется по углу отклонения орбиты в  $i$ -м магните от точки входа в него за углом его входного склоа (если он имеется) до его выходного угла склоа.

Начальные значения параметров Твисса  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  и дисперсионных функций  $\eta_0, \eta'_0$  будут относиться к этим же точкам. Поэтому торцевая фокусировка не включена в матрицы, описывающие радиальное движение частиц в магнитах.

Одинаковый член в знаменателе выражений (6), (7) обозначим как

$$I_0 = \sum_{i=1}^{m_1} \frac{1}{\rho_{1i}} \varphi_{mi} + \sum_{i=1}^{m_2} \frac{1}{\rho_{2i}} \varphi_{mi}. \quad (8)$$

Матрица, описывающая радиальное движение частоты в магните с неоднородным полем при значениях индекса неоднородности магнитного поля  $n < 1$ , имеет вид

$$M_x = \begin{pmatrix} \cos \theta & \rho \frac{\sin \theta}{\sqrt{1-n}} & \rho \frac{1-\cos \theta}{1-n} \\ -\frac{\sqrt{1-n}}{\rho} \sin \theta & \cos \theta & \frac{\sin \theta}{\sqrt{1-n}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

где  $\theta = \sqrt{1-n}\varphi$ . Поэтому текущие значения параметров Твисса  $\alpha, \beta, \gamma$  на азимуте  $\varphi$  дипольного магнита, согласно [3], будут равны

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & -\rho \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{1-n}} & \rho^2 \frac{\sin^2 \theta}{1-n} \\ \frac{\sqrt{1-n}}{2\rho} \sin 2\theta & \cos 2\theta & -\rho \frac{\sin 2\theta}{2\sqrt{1-n}} \\ \frac{1-n}{\rho^2} \sin^2 \theta & \frac{\sqrt{1-n}}{\rho} \sin 2\theta & \cos^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \alpha_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

а дисперсионные функции

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_0 \cos \theta + \rho \eta'_0 \frac{\sin \theta}{\sqrt{1-n}} + \rho \frac{1-\cos \theta}{1-n}, \\ \eta' &= -\eta_0 \frac{\sqrt{1-n}}{\rho} \sin \theta + \eta'_0 \cos \theta + \frac{\sin \theta}{\sqrt{1-n}}. \end{aligned} \quad (11)$$

При значениях индекса неоднородности магнитного поля  $n > 1$  имеем соответственно

$$M_x = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \theta & \rho \frac{\operatorname{sh} \theta}{\sqrt{n-1}} & \rho \frac{\operatorname{ch} \theta - 1}{n-1} \\ \frac{\sqrt{n-1}}{\rho} \operatorname{sh} \theta & \operatorname{ch} \theta & \frac{\operatorname{sh} \theta}{\sqrt{n-1}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}^2 \theta & -\rho \frac{\operatorname{sh} 2\theta}{\sqrt{n-1}} & \rho^2 \frac{\operatorname{sh}^2 \theta}{n-1} \\ -\frac{\sqrt{n-1}}{2\rho} \operatorname{sh} 2\theta & \operatorname{ch} 2\theta & -\rho \frac{\operatorname{sh} 2\theta}{2\sqrt{n-1}} \\ \frac{n-1}{\rho^2} \operatorname{sh}^2 \theta & -\frac{\sqrt{n-1}}{\rho} \operatorname{sh} 2\theta & \operatorname{ch}^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \alpha_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$\eta = \eta_0 \operatorname{ch} \theta + \rho \eta'_0 \frac{\operatorname{sh} \theta}{\sqrt{n-1}} + \rho \frac{\operatorname{ch} \theta - 1}{n-1},$$

$$\eta' = \eta_0 \frac{\sqrt{n-1}}{\rho} \operatorname{sh} \theta + \eta'_0 \operatorname{ch} \theta + \frac{\operatorname{sh} \theta}{\sqrt{n-1}}, \quad (13)$$

где  $\theta = \sqrt{n-1}\varphi$ .

Подставив выражения (10)–(13) в (6), (7), приведя подобные члены и выполнив интегрирование, получим выражение для эмиттанта:

$$\varepsilon_x = \frac{C_q \gamma^2}{J_x I_0} f_x, \quad (14)$$

где

$$f_x = E_{1x} + E_{2x},$$

$$E_{1x} = \sum_{i=1}^{m_1} \frac{1}{\rho_{1i}^2} [\beta_0 \alpha_1 - \alpha_0 \beta_1 + \gamma_0 c_1 + (\gamma_0 \eta_0^2 + 2\alpha_0 \eta_0 \eta'_0 + \beta_0 \eta_0'^2) \varphi_1 + (\alpha_0 \eta_0 + \beta_0 \eta_0') d_1 - (\gamma_0 \eta_0 + \alpha_0 \eta_0') e_1]_i,$$

$$E_{2x} = \sum_{i=1}^{m_2} \frac{1}{\rho_{2i}^2} [\beta_0 \alpha_2 - \alpha_0 \beta_2 + \gamma_0 c_2 + (\gamma_0 \eta_0^2 + 2\alpha_0 \eta_0 \eta'_0 + \beta_0 \eta_0'^2) \varphi_2 + (\alpha_0 \eta_0 + \beta_0 \eta_0') d_2 - (\gamma_0 \eta_0 + \alpha_0 \eta_0') e_2]_i,$$

$$J_x = 1 - \frac{1}{I_0} (J_{1x} + J_{2x}), \quad (15)$$

$$J_{1x} = \sum_{i=1}^{m_1} \frac{1 - 2n_{1i}}{\rho_{1i}^2} \left( \frac{\sin(\varphi_1 \sqrt{1-n_1})}{\sqrt{1-n_1}} \eta_{0i} + \rho_1 \frac{1 - \cos(\varphi_1 \sqrt{1-n_1})}{1-n_1} \eta'_{0i} + \rho_1 \frac{\varphi_1 \sqrt{1-n_1} - \sin(\varphi_1 \sqrt{1-n_1})}{(1-n_1)^{\frac{3}{2}}} \right)_i,$$

$$J_{2x} = \sum_{i=1}^{m_2} \frac{1 - 2n_{2i}}{\rho_{2i}^2} \left( \frac{\operatorname{sh}(\varphi_2 \sqrt{|n_2| - 1})}{\sqrt{|n_2| - 1}} \eta_{0i} + \rho_2 \frac{\operatorname{ch}(\varphi_2 \sqrt{|n_2| - 1}) - 1}{|n_2| - 1} \eta'_{0i} + \rho_2 \frac{\operatorname{sh}(\varphi_2 \sqrt{|n_2| - 1}) - \varphi_2 \sqrt{|n_2| - 1}}{(|n_2| - 1)^{\frac{3}{2}}} \right)_i.$$

Индексы  $i$  у скобок в (15) обозначают, что их содержимое соответствует  $i$ -му магниту своей группы. Эти формулы удобны для расчетов тем, что в них используются только начальные значения бетатронных и дисперсионных функций на входе в магнит за углом скоса его торца и не требуется интегрирования по длине магнита. Отрицательные значения  $J_x$  отвечают расклатке радиальных бетатронных колебаний.

Отметим, что в выражении для  $I_0$  (8) также учитываются магниты групп 1 и 2.

Для магнитов группы 1:

$$a_1 = \frac{2\varphi_1 \sqrt{1-n_1} - \sin(2\varphi_1 \sqrt{1-n_1})}{4(1-n_1)^{\frac{3}{2}}},$$

$$b_1 = \rho_1 \frac{(1 - \cos \sqrt{1-n_1} \varphi_1)^2}{(1-n_1)^2},$$

$$c_1 = \frac{\rho_1^2}{(1-n_1)^{\frac{5}{2}}} \left( \frac{3}{2} \varphi_1 \sqrt{1-n_1} - 2 \sin(\varphi_1 \sqrt{1-n_1}) + \frac{1}{4} \sin(2\varphi_1 \sqrt{1-n_1}) \right), \quad (16)$$

$$d_1 = 2 \frac{1 - \cos(\varphi_1 \sqrt{1-n_1})}{1-n_1},$$

$$e_1 = 2\rho_1 \frac{\varphi_1 \sqrt{1-n_1} - \sin(\varphi_1 \sqrt{1-n_1})}{(1-n_1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Для магнитов группы 2:

$$a_2 = \frac{-2\varphi_2 \sqrt{n_2 - 1} + \operatorname{sh}(2\varphi_2 \sqrt{n_2 - 1})}{4(n_2 - 1)^{\frac{3}{2}}},$$

$$b_2 = \rho_2 \frac{(\operatorname{ch} \varphi_2 \sqrt{n_2 - 1} - 1)^2}{(n_2 - 1)^2},$$

$$c_2 = \frac{\rho_2^2}{(n_2 - 1)^{\frac{5}{2}}} \left( \frac{3}{2} \varphi_2 \sqrt{n_2 - 1} - 2 \operatorname{sh}(\varphi_2 \sqrt{n_2 - 1}) + \frac{1}{4} \operatorname{sh}(2\varphi_2 \sqrt{n_2 - 1}) \right), \quad (17)$$

$$d_2 = 2 \frac{\operatorname{ch}(\varphi_2 \sqrt{n_2 - 1}) - 1}{n_2 - 1},$$

$$e_2 = -2\rho_2 \frac{\varphi_2 \sqrt{n_2 - 1} - \operatorname{sh}(\varphi_2 \sqrt{n_2 - 1})}{(n_2 - 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Согласно (14), эмиттанс  $\varepsilon_x$  будет минимален, если  $f_x$  мало, а  $J_x \neq 0$  велико. Эмиттанс можно минимизировать, подбирая значения  $\alpha_{0i}, \beta_{0i}, \eta_{0i}, \eta'_{0i}, n_{1i}, n_{2i}$ .

## 2. Минимизация радиального эмиттанта

Число переменных, по которым можно минимизировать эмиттанс  $\varepsilon_x$ , равно  $6(m_1 + m_2)$ . В общем случае оно велико, и при больших значениях  $m_1$  и  $m_2$  это можно проделать только численно.

### 2.1. Численная минимизация эмиттанта

Рассмотрим минимизацию эмиттанта для одного магнита группы 1 или 2. Достаточно показать ее на примере магнитов группы 1, так как для магнитов группы 2 выражение для эмиттанта будет таким же, но с заменой индекса 1 на индекс 2. Заметим, что переменные  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  входят только в числитель формулы (17) для эмиттанта, что несколько упрощает поиск его минимума путем исключения сначала этих переменных из полученного выражения для  $\varepsilon_x$ . Для этого запишем условия минимума эмиттанта по этим переменным, приравняв нулю производные

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \alpha_0} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \beta_0} = 0.$$

Полученную систему двух уравнений

$$\begin{aligned} -b_1 + \frac{2\alpha_0}{\beta_0} c_1 + \left( \frac{2\alpha_0}{\beta_0} \eta_0^2 + 2\eta_0 \eta_0' \right) \varphi_1 + \eta_0 d_1 \\ - \left( \frac{2\alpha_0}{\beta_0} \eta_0 + \eta_0' \right) e_1 = 0, \\ a_1 - \frac{1 + \alpha_0^2}{\beta_0^2} c_1 + \left( -\frac{1 + \alpha_0^2}{\beta_0^2} \eta_0^2 + \eta_0'^2 \right) \varphi_1 + \eta_0' d_1 \\ + \frac{1 + \alpha_0^2}{\beta_0^2} \eta_0 e_1 = 0 \end{aligned}$$

приведем к виду

$$\begin{aligned} \beta_0 = 2\alpha_0 \frac{c_1 + \eta_0^2 \varphi_1 - \eta_0 e_1}{b_1 - 2\eta_0 \eta_0' \varphi_1 - \eta_0 d_1 + \eta_0' e_1}, \\ \beta_0^2 = (1 + \alpha_0^2) \frac{c_1 + \eta_0^2 \varphi_1 - \eta_0 e_1}{\alpha_1 + \eta_0'^2 \varphi_1 + \eta_0' d_1} \end{aligned}$$

и затем выразим  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$  и  $\gamma_0$  через  $\eta_0$  и  $\eta_0'$ :

$$\begin{aligned} \alpha_0 = \pm \frac{b_1 - 2\eta_0 \eta_0' \varphi_1 - \eta_0 d_1 + \eta_0' e_1}{\sqrt{4(a_1 + \eta_0'^2 \varphi_1 + \eta_0' d_1)(c_1 + \eta_0^2 \varphi_1 - \eta_0 e_1) - (b_1 - 2\eta_0 \eta_0' \varphi_1 - \eta_0 d_1 + \eta_0' e_1)^2}}, \\ \beta_0 = \frac{2(c_1 + \eta_0^2 \varphi_1 - \eta_0 e_1)}{\sqrt{4(a_1 + \eta_0'^2 \varphi_1 + \eta_0' d_1)(c_1 + \eta_0^2 \varphi_1 - \eta_0 e_1) - (b_1 - 2\eta_0 \eta_0' \varphi_1 - \eta_0 d_1 + \eta_0' e_1)^2}}, \\ \gamma_0 = \frac{2(a_1 + \eta_0'^2 \varphi_1 - \eta_0' d_1)}{\sqrt{4(a_1 + \eta_0'^2 \varphi_1 + \eta_0' d_1)(c_1 + \eta_0^2 \varphi_1 - \eta_0 e_1) - (b_1 - 2\eta_0 \eta_0' \varphi_1 - \eta_0 d_1 + \eta_0' e_1)^2}}. \quad (18) \end{aligned}$$

Подставив полученные выражения в формулу для эмиттанта (14), получим

$$\varepsilon_x = \frac{C_q \gamma^2}{\rho \varphi_1 J_x} \sqrt{4(a_1 + \eta_0'^2 \varphi_1 + \eta_0' d_1)(c_1 + \eta_0^2 \varphi_1 - \eta_0 e_1) - (b_1 - 2\eta_0 \eta_0' \varphi_1 - \eta_0 d_1 + \eta_0' e_1)^2}. \quad (19)$$

В формулах (18)  $\beta_0$  всегда положительно, а значение  $\alpha_0$  может быть как положительным (сходящийся пучок), так и отрицательным (расходящийся). Поэтому надо выбирать те знаки в определении  $\alpha_0$ , при которых  $\beta_0 > 0$ , а эмиттанс минимален. Как правило, он минимален при  $\alpha_0 > 0$ . Далее можно минимизировать  $\varepsilon_x$  только по двум переменным  $\eta_0$  и  $\eta_0'$ . Вблизи минимума функция  $\varepsilon_x$  достаточно гладкая и он может быть легко найден численными методами с помощью стандартных оптимизационных процедур. Такой подход удобен тем, что позволяет проводить оптимизацию эмиттанта одновременно относительно только двух, а не четырех переменных.

### Пример

Построим графическую зависимость  $\varepsilon_x$  (19) от двух переменных  $\eta_0$  и  $\eta_0'$  для типичной структуры накопителя с распределенной дисперсией и  $N = 12$ ,  $\varphi_2 = 15^\circ$ ,  $\rho_2 = 5.8$  м,  $n_2 = 36.5$ , рассчитанного на энергию электронов 2.5 GeV. Она представляет собой двумерную поверхность, пологую вдоль некоторой кривой  $\eta_0 = F(\eta_0')$ , проходящей через минимум  $\varepsilon_{x \min} = 2.77$  nm · rad.

На рис. 1 показаны линии одинакового эмиттанта  $\varepsilon_x$  на плоскости  $\eta_0$ ,  $\eta_0'$ , похожие на сильно вытянутые эллипсы, ориентированные большим диаметром вдоль этой кривой. Значение  $\varepsilon_{x \min}$  зависит от индекса неоднородности магнитного поля  $n_2$ . Это проиллюстрировано на рис. 2, где представлены зависимости минимальных значений эмиттанта  $\varepsilon_{x \min}$  от  $n_2$  для различных величин угла поворота магнита:  $\varphi_m = 6^\circ, 7^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$ . Согласно расчетам, эмиттанс  $\varepsilon_{x \min}$  не зависит от радиуса  $\rho$  траектории равновесной частицы в магните. Следует подчеркнуть, что минимальное значение эмиттанта слабо меняется в окрестности кривой  $\eta_0 = F(\eta_0')$ , что допускает некоторую свободу в выборе оптических систем, формирующих пучок на входе магнита.

Оптимальные значения параметров пучка на входе магнита представлены в таблице. Минимальные значения эмиттанта достигаются при малых углах поворота частиц в магнитах и больших значениях индекса неоднородности магнитного поля  $n_2$ . При больших углах поворота частиц в магните и больших значениях индекса неоднородности  $n_2$  эмиттанс тоже мал, однако при этом требуется очень сильная (и, по-видимому, недостижимая) фокусировка пучка на входе магнита.

Оптимальные значения параметров пучка на входе в магнит, необходимые для получения минимального эмиттанта

n		Ахроматичный режим					Неахроматичный режим				
		$\varphi = 6^\circ$	$\varphi = 7.5^\circ$	$\varphi = 10^\circ$	$\varphi = 15^\circ$	$\varphi = 22.5^\circ$	$\varphi = 6^\circ$	$\varphi = 7.5^\circ$	$\varphi = 10^\circ$	$\varphi = 15^\circ$	$\varphi = 22.5^\circ$
0	$\eta \cdot 10^2, \text{m}$	0	0	0	0	0	1.1	1.64	3	6.44	66
	$\eta'$	0	0	0	0	0	-0.0535	-0.0625	-0.0875	-0.1275	-0.198
	$\beta \cdot 10^2, \text{m}$	94	117.5	156.5	234	349.2	125.4	151.4	208.2	311.4	1998
	$\alpha$	3.87	3.87	3.86	3.84	3.8	3.87	3.74	3.85	3.82	3.76
	$\varepsilon_x, \text{nm} \cdot \text{rad}$	0.68	1.33	3.17	10.7	36.6	0.227	0.459	1.05	3.56	17.4
10	$\eta \cdot 10^2, \text{m}$	0	0	0	0	0	1.05	1.75	3.15	6.8	16.5
	$\eta'$	0	0	0	0	0	-0.0535	-0.069	-0.0924	-0.137	-0.222
	$\beta \cdot 10^2, \text{m}$	94.7	118.8	159.7	245	387	126.2	159.4	215.3	333.5	537.7
	$\alpha$	3.91	3.94	4	4	4.53	3.93	3.99	4.086	4.35	4.97
	$\varepsilon_x, \text{nm} \cdot \text{rad}$	0.662	1.27	2.91	8.98	25.4	0.225	0.4347	1.014	3.28	10.08
30	$\eta \cdot 10^2, \text{m}$	0	0	0	0	0	1.08	1.175	3.1	7.4	18
	$\eta'$	0	0	0	0	0	-0.0537	-0.0691	-0.0936	-0.153	-0.2523
	$\beta \cdot 10^2, \text{m}$	96.1	121.6	166.3	268	475	129.5	164.7	227.9	378	618.4
	$\alpha$					6.3	4.11	4.25	4.55	5.48	6.38
	$\varepsilon_x, \text{nm} \cdot \text{rad}$	0.624	1.16	2.52	6.77	15.6	0.218	0.417	0.944	2.82	8.61
50	$\eta \cdot 10^2, \text{m}$	0	0	0	0	0	1.14	1.75	3.25	8.6	24.5
	$\eta'$	0	0	0	0	0	-0.0559	-0.0705	-0.0993	-0.181	-0.387
	$\beta \cdot 10^2, \text{m}$	97.5	124.4	173.2	294	582	132.3	170.4	241.6	431.1	937
	$\alpha$	4.11	4.23	4.58	5.61	8.6	4.28	4.52	5.06	6.85	12.45
	$\varepsilon_x, \text{nm} \cdot \text{rad}$	0.591	1.07	2.21	5.42	11.3	0.213	0.4008	0.882	2.46	5.93
100	$\eta \cdot 10^2, \text{m}$	0	0	0	0	0	1.2	1.75	3.65	11	39
	$\eta'$	0	0	0	0	0	-0.0595	-0.0725	-0.115	-0.252	-0.739
	$\beta \cdot 10^2, \text{m}$	101.2	131.7	191.7	369	959	139.9	183.8	277.8	582	1763
	$\alpha$	4.38	4.69	5.4	8	17.7	4.73	5.22	6.48	11.2	30.96
	$\varepsilon_x, \text{nm} \cdot \text{rad}$	0.521	0.898	1.7	3.61	6.54	0.22	0.365	0.756	1.86	3.85
200	$\eta \cdot 10^2, \text{m}$	0	0	0	0	0	1.25	2.05	4.4	15.4	95
	$\eta'$	0	0	0	0	0	-0.0647	-0.08765	-0.1499	-0.423	-2.36
	$\beta \cdot 10^2, \text{m}$	108.8	147.6	234.7	576.7	2444	155.6	216.2	361.1	1018	5419
	$\alpha$	4.94	5.64	7.43	15.31	60.3	5.72	6.9	10.04	25.53	132
	$\varepsilon_x, \text{nm} \cdot \text{rad}$	0.421	0.6756	1.15	2.13	3.47	0.178	0.3076	0.584	1.236	2.2
300	$\eta \cdot 10^2, \text{m}$	0	0	0	0	0	1.4	2.25	5.4	23.6	220
	$\eta'$	0	0	0	0	0	-0.073	-1.1008	-0.1982	-0.744	-6.602
	$\beta \cdot 10^2, \text{m}$	117.1	165.4	286.8	886.85	5730	171.3	251.9	461.9	1735	15059
	$\alpha$	5.56	6.75	10.05	27.52	171.5	6.76	8.903	14.75	52.26	449.1
	$\varepsilon_x, \text{nm} \cdot \text{rad}$	0.352	0.54	0.8696	1.501	2.31	0.159	0.265	0.473	0.916	1.51
400	$\eta \cdot 10^2, \text{m}$	0	0	0	0	0	1.5	2.65	6.6	35.6	475
	$\eta'$	0	0	0	0	0	-0.0808	-0.122	-0.261	-1.263	-16.4
	$\beta \cdot 10^2, \text{m}$	125.9	185.3	349.5	1340	12500	189.9	290.6	599	2899.6	37340
	$\alpha$	6.25	8.04	13.4	47.1	431.2	8.024	11.19	21.4	100.2	1286
	$\varepsilon_x, \text{nm} \cdot \text{rad}$	0.303	0.4497	0.696	1.149	1.71	0.145	0.2326	0.3961	0.7227	1.137
500	$\eta \cdot 10^2, \text{m}$	0	0	0	0	0	1.5	2.9	7.5	53	950
	$\eta'$	0	0	0	0	0	-0.0846	-0.1409	-0.319	-2.07	-36.62
	$\beta \cdot 10^2, \text{m}$	135.4	207.4	424.7	1992	257490	209	341.5	757.5	4591	84140
	$\alpha$	7	9.52	17.6	77.6	992	9.4	14.2	29.9	177.1	3241
	$\varepsilon_x, \text{nm} \cdot \text{rad}$	0.26	0.385	0.578	0.925	1.34	0.132	0.207	0.34	0.594	0.902
1000	$\eta \cdot 10^2, \text{m}$	0	0	0	0	0	2.1	5	19.2	312	19000
	$\eta'$	0	0	0	0	0	-0.136	-0.293	-1.069	-17.03	-0.00104
	$\beta \cdot 10^2, \text{m}$	194	359	1070	11612	53403	332	677.4	2369	36112	$2.4 \times 10^6$
	$\alpha$	12	20.8	59.2	633	29102	19.01	37.5	129.4	1970	1.3
	$\varepsilon_x, \text{nm} \cdot \text{rad}$	0.163	0.22	0.307	0.451	0.614	0.0915	0.1316	0.195	0.302	0.423

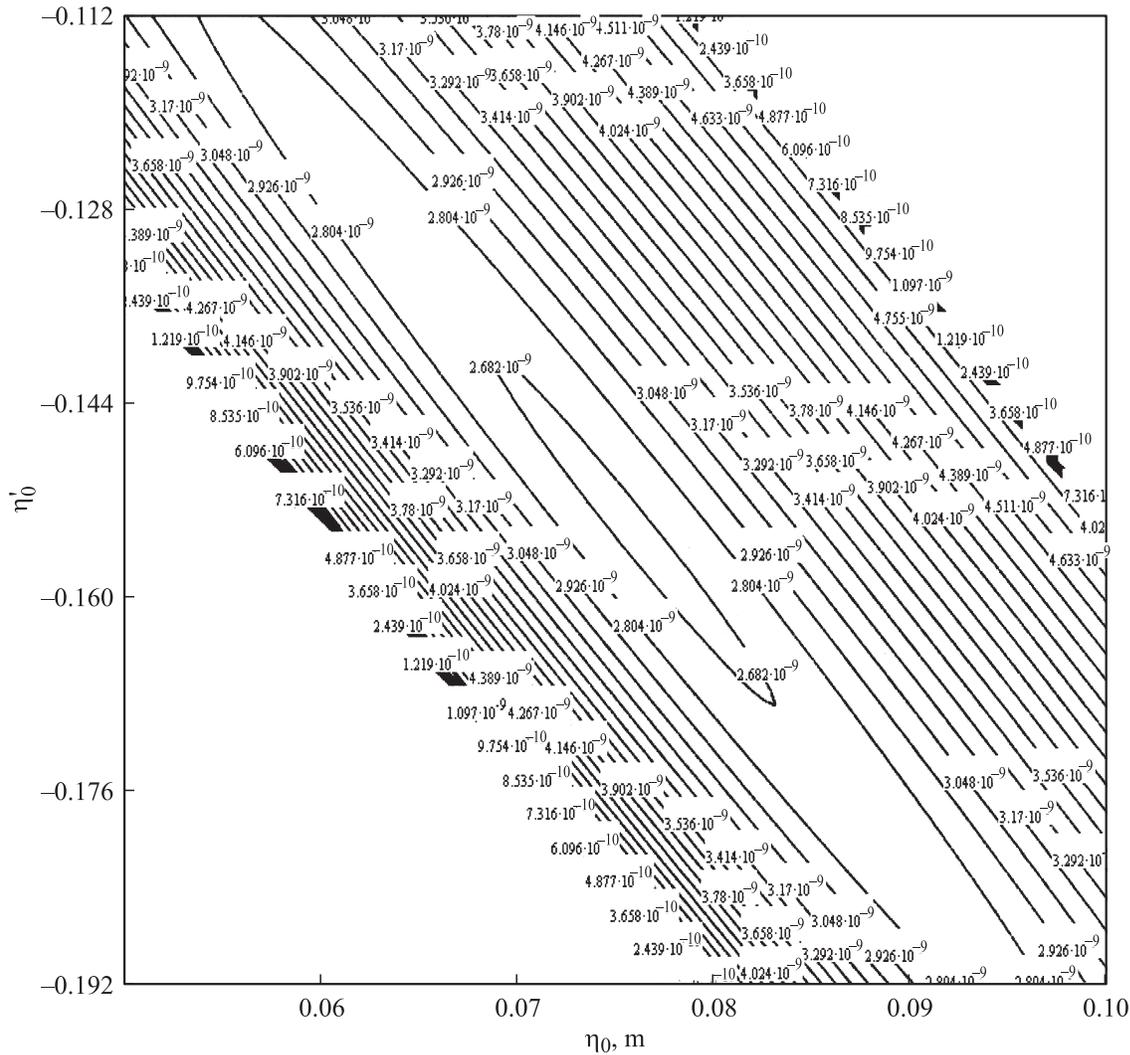


Рис. 1. Линии одинакового эмиттанса на плоскости  $\eta_0, \eta'_0$  для структуры накопителя с  $\varphi_2 = 15^\circ$ ,  $N = 12$ ,  $\rho_2 = 5.8$  м и  $n_2 = 36.5$  при энергии электронов 2.5 GeV.

## 2.2. Аналитическая минимизация эмиттанса

Минимизировать  $\varepsilon_x$  аналитически, в общем случае, сложно из-за большого числа переменных. Но есть варианты магнитных структур источников СИ, для которых аналитические выражения при минимальном эмиттансе могут быть получены. Эти варианты следующие:

1. Период накопителя включает два магнита группы 1 и, следовательно,  $m_1 = 1$ . Если они секторные с показателем индекса неоднородности  $n = 0.5$ , то, согласно (15),  $J_x = 1$  и условие минимума эмиттанса  $\varepsilon_x$  совпадает с условием минимума функции

$$f_x = \frac{1}{\rho_1^2} [\beta_0 a_1 - \alpha_0 b_1 + \gamma_0 c_1 + (\gamma_0 \eta_0^2 + 2\alpha_0 \eta_0 \eta'_0 + \beta_0 \eta_0'^2) \varphi_1 + (\alpha_0 \eta_0 + \beta_0 \eta_0') d_1 - (\gamma_0 \eta_0 + \alpha_0 \eta_0') e_1]. \quad (20)$$

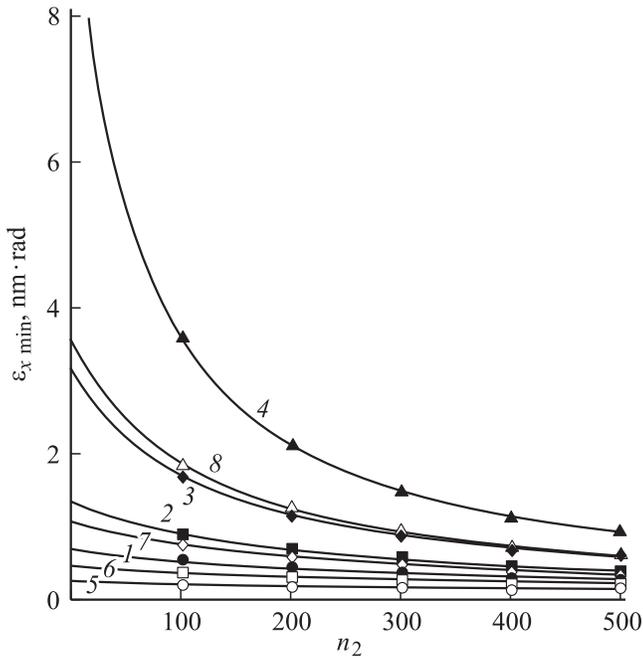
Функция минимальна, если параметры Твисса и дисперсионные функции на входе магнита за углом его скоса удовлетворяют системе четырех алгебраических уравнений

$$\frac{\partial f_x}{\partial \eta_0} = 0, \quad \frac{\partial f_x}{\partial \eta'_0} = 0, \quad \frac{\partial f_x}{\partial \alpha_0} = 0, \quad \frac{\partial f_x}{\partial \beta_0} = 0. \quad (21)$$

Два первых из них определяют оптимальные значения дисперсионных функций на входе поворотного магнита за углом его скоса (далее везде индекс 1 при коэффициентах  $a, b, c, d, e$  опущен). Их решения

$$\eta_0 = \frac{e}{2\varphi_1}, \quad \eta'_0 = -\frac{d}{2\varphi_1}. \quad (22)$$

Два вторых уравнения (21) определяют оптимальные значения параметров Твисса на входе (за углом скоса) в



**Рис. 2.** Зависимость минимального эмиттанта пучка от индекса неоднородности магнитного поля при различных углах поворота пучка в магните  $\varphi$  и энергии электронов 2.5 GeV, для магнитов группы 2. Ахроматичный режим: 1 —  $\varphi = 6$ , 2 — 7.5, 3 — 10, 4 — 15°; неахроматичный режим: 5 —  $\varphi = 6$ , 6 — 7.5, 7 — 10, 8 — 15°.

поворотный магнит

$$\alpha_0 = \pm \frac{(b - \frac{ed}{2\varphi_1})}{\sqrt{4(a - \frac{d^2}{4\varphi_1})(c - \frac{e^2}{4\varphi_1}) - (b - \frac{ed}{2\varphi_1})^2}},$$

$$\beta_0 = 2 \frac{(c - \frac{e^2}{4\varphi_1})}{\sqrt{4(a - \frac{d^2}{4\varphi_1})(c - \frac{e^2}{4\varphi_1}) - (b - \frac{ed}{2\varphi_1})^2}},$$

$$\gamma_0 = 2 \frac{(a - \frac{d^2}{4\varphi_1})}{\sqrt{4(a - \frac{d^2}{4\varphi_1})(c - \frac{e^2}{4\varphi_1}) - (b - \frac{ed}{2\varphi_1})^2}}, \quad (23)$$

совпадающие с выражениями, которые могут быть получены по формулам (18) при подстановке туда значений  $\eta_0, \eta'_0$  из соотношений (22).

Для дисперсионных функций и параметров Твисса, имеющих вид (22), (23), минимальное значение функции  $f_x$  будет

$$f_x = \frac{4(a - \frac{d^2}{4\varphi_m})(c - \frac{e^2}{4\varphi_m}) \mp (b - \frac{ed}{2\varphi_m})^2}{\sqrt{4(a - \frac{d^2}{4\varphi_m})(c - \frac{e^2}{4\varphi_m}) - (b - \frac{ed}{2\varphi_m})^2}}. \quad (24)$$

Знаки „ $\mp$ “ в последнем выражении соответствуют знакам  $\alpha_0$  в (23). Радиальный эмиттанс минимален для верхнего знака  $\alpha_0$  в (21), соответствующего сходящемуся пучку. Для  $n = 0.5$  и  $\alpha_0, \beta_0, \eta_0, \eta'_0$  на входе магнита за

углом скоса его торца, рассчитанных по формулам (20), (21), он равен

$$\varepsilon_{x \min} = \frac{C_q \gamma^2}{\rho \varphi_1} \sqrt{4(a - \frac{d^2}{4\varphi_1})(c - \frac{e^2}{4\varphi_1}) - (b - \frac{ed}{2\varphi_1})^2}. \quad (25)$$

Эта же формула пригодна и в том случае, если  $n_1 \neq 0.5$ ,  $n_1 < 1$  и минимизируется только  $f_x$ , а  $J_x \neq 1$  вычисляется по формуле (15), где  $\eta_0, \eta'_0$  принимают значения (22).

2. Период накопителя содержит два магнита с  $n_1 < 1$ . В такой структуре  $m_1 = 1$ ,  $n_1$  может быть большим отрицательным, а выражение для эмиттанта имеет вид

$$\varepsilon_x = \frac{C_q \gamma^2}{J_x \rho_1 \varphi_1} [\beta_0 \alpha_1 - \alpha_0 b_1 + \gamma_0 c_1 + (\gamma_0 \eta_0^2 + 2\alpha_0 \eta_0 \eta'_0 + \beta_0 \eta_0'^2) \varphi_1 + (\alpha_0 \eta_0 + \beta_0 \eta_0') d_1 - (\gamma_0 \eta_0 + \alpha_0 \eta_0') e_1], \quad (26)$$

где

$$J_x = 1 - \frac{1 - 2n_1}{\rho_1 \varphi_1} \left[ \frac{\sin(\varphi_1 \sqrt{1 - n_1})}{\sqrt{1 - n_1}} \eta_0 + \rho_1 \frac{1 - \cos(\varphi_1 \sqrt{1 - n_1})}{1 - n_1} \eta'_0 + \rho_1 \frac{\varphi_1 \sqrt{1 - n_1} - \sin(\varphi_1 \sqrt{1 - n_1})}{(1 - n_1)^{\frac{3}{2}}} \right]. \quad (27)$$

Значения  $\alpha_1, \beta_1, c_1, d_1, e_1$  здесь вычисляются по формулам (15).

Если эти магниты образуют ахромат, то  $\eta_0 = \eta'_0 = 0$  и

$$\varepsilon_x = \frac{C_q \gamma^2}{J_x \rho_1 \varphi_1} (\beta_0 \alpha_1 - \alpha_0 b_1 + \gamma_0 c_1),$$

а

$$J_x = 1 - \frac{1 - 2n_1}{2\rho_1 \varphi_1} e_1. \quad (28)$$

Эмиттанс будет минимален, если параметры Твисса на входе магнита удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d\varepsilon_x}{d\beta_0} = 0, \quad \frac{d\varepsilon_x}{d\alpha_0} = 0.$$

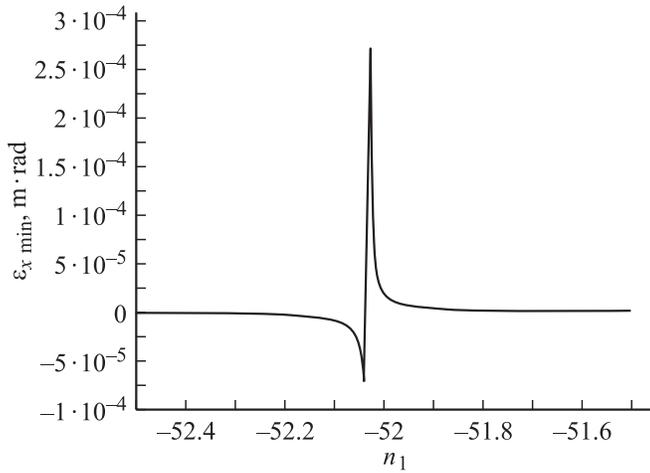
Если подставить их решения

$$\alpha_0 = \frac{b_1}{\sqrt{4a_1 c_1 - b_1^2}}, \quad \beta_0 = \frac{2c_1}{\sqrt{4a_1 c_1 - b_1^2}},$$

$$\gamma_0 = \frac{2a_1}{\sqrt{4a_1 c_1 - b_1^2}} \quad (29)$$

в формулу для эмиттанта из соотношений (28), то его оптимальное по параметрам Твисса значение будет таким:

$$\varepsilon_x = C_q \gamma^2 \frac{\sqrt{4a_1 c_1 - b_1^2}}{(n_1 - \frac{1}{2}) e_1 + \rho_1 \varphi_1}. \quad (30)$$



**Рис. 3.** Зависимость натурального эмиттанса пучка накопителя — источника СИ от показателя неоднородности магнитного поля в ахромате из магнитов группы 1.

Оно зависит от величины индекса неоднородности магнитного поля  $n_1$ . Минимальное по  $n_1$  значение эмиттанса  $\varepsilon_x$  (30) проще всего найти графически, построив зависимость  $\varepsilon_x(n_1)$ . Зависимость имеет характерные особенности, общие для всех магнитных структур накопителей. Продемонстрируем это на примере магнитной структуры с  $N = 12$ ,  $m_1 = 1$ ,  $\varphi_1 = 15^\circ$ ,  $\rho_1 = 9.00$  м и оптимальными значениями параметров Твисса, выбранными согласно (29).

Эта зависимость для ахромата, составленного из магнитов группы 1, изображена на рис. 3. При  $n_1 \approx -52$  знаменатель у  $\varepsilon_x$  стремится к нулю, а сам  $\varepsilon_x$  становится большим положительным, а затем, с увеличением  $|n_1|$ , — большим отрицательным. Это свидетельствует о том, что декремент затухания радиальных бетатронных колебаний  $J_x$  изменяет знак на отрицательный, и происходит раскачка радиальных колебаний. Минимальное значение эмиттанса достигается при значениях  $n_1$ , близких к нулю. Отметим, что при  $n_1 < 0.5$  значение  $J_x$  в (28) может быть  $< 1$ , что увеличивает  $\varepsilon_x$ . Поэтому для такой структуры суперпериода, возможно, предпочтительнее выбирать  $n > 1$ , т.е. делать кольцевой электромагнит накопителя из магнитов группы 2.

3. Период накопителя включает два магнита с  $n_2 > 1$ . В такой структуре  $m_2 = 1$ ,  $n_2$  может быть большим положительным, а эмиттанс

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = & \frac{C_q \gamma^2}{J_x \rho_2 \varphi_2} [\beta_0 \alpha_2 - \alpha_0 b_2 + \gamma_0 c_2 \\ & + (\gamma_0 \eta_0^2 + 2\alpha_0 \eta_0 \eta'_0 + \beta_0 \eta_0'^2) \varphi_2 \\ & + (\alpha_0 \eta_0 + \beta_0 \eta'_0) d_2 - (\gamma_0 \eta_0 + \alpha_0 \eta'_0) e_2], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} J_x = & 1 - \frac{1 - 2n_2}{\rho_2 \varphi_2} \left( \frac{\text{sh}(\varphi_2 \sqrt{n_2 - 1})}{\sqrt{n_2 - 1}} \eta_0 \right. \\ & + \rho_2 \frac{\text{ch}(\varphi_2 \sqrt{n_2 - 1}) - 1}{n_2 - 1} \eta'_0 \\ & \left. + \rho_2 \frac{\text{sh}(\varphi_2 \sqrt{n_2 - 1}) - \varphi_2 \sqrt{n_2 - 1}}{(n_2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь  $a_2, b_2, c_2, d_2, e_2$  задаются формулами (17). Значения дисперсионных и бетатронных функций берутся на входе магнита за углом входного скоса. Если эти магниты образуют ахромат, то  $\eta_0 = \eta'_0 = 0$  и

$$\varepsilon_x = \frac{C_q \gamma^2}{J_x \rho_2 \varphi_2} (\beta_0 \alpha_2 - \alpha_0 b_2 + \gamma_0 c_2), \quad J_x = 1 + \frac{2n_2 - 1}{2\rho_2 \varphi_2} e_2. \quad (32)$$

Эмиттанс будет минимален, если параметры Твисса на входе магнита удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d\varepsilon_x}{d\beta_0} = 0, \quad \frac{d\varepsilon_x}{d\alpha_0} = 0$$

с решениями

$$\begin{aligned} \alpha_0 = & \frac{b_2}{\sqrt{4a_2 c_2 - b_2^2}}, \quad \beta_0 = \frac{2c_2}{\sqrt{4a_2 c_2 - b_2^2}}, \\ \gamma_0 = & \frac{2a_2}{\sqrt{4a_2 c_2 - b_2^2}}. \end{aligned} \quad (33)$$

Для таких значений параметров Твисса получим

$$\varepsilon_x = C_q \gamma^2 \frac{\sqrt{4a_2 c_2 - b_2^2}}{(n_2 - \frac{1}{2}) e_2 + \rho_2 \varphi_2}. \quad (34)$$

Эмиттанс  $\varepsilon_x$  (34) зависит от индекса неоднородности магнитного поля  $n_2$ . С ростом  $n_2$  растет знаменатель в выражении для  $\varepsilon_x$  и, следовательно, сам  $\varepsilon_x$  уменьшается. Найдем минимальное значение эмиттанса  $\varepsilon_{x, \min}$  в зависимости от величины индекса  $n_2$ . Проще всего это сделать графически, построив зависимость  $\varepsilon_x(n_2)$ . Например, для структуры с  $N = 12$ ,  $m_2 = 1$ ,  $\varphi_2 = 15^\circ$ ,  $\rho_2 = 9$  м, с оптимальными значениями параметров Твисса (33) эта зависимость для ахромата, составленного из двух магнитов группы 2, изображена на рис. 2. Для  $n_2 = 450$  минимальный эмиттанс равен  $1 \text{ nm} \cdot \text{rad}$ . Согласно формулам (33), оптимальные значения бетатронных функций на входе магнита за углом его скоса должны быть равны:  $\alpha_0 = 60.73561$ ,  $\beta_0 = 25.41$  м,  $\gamma_0 = 145.1983 \text{ m}^{-1}$ . Однако эти значения велики, и такой выбор  $n_2$  неприемлем. Для сравнительно небольших значений  $n_2 \approx 55$  радиальный эмиттанс также мал ( $\varepsilon_x \approx 5 \text{ nm} \cdot \text{rad}$ ) и такие значения показателя неоднородности магнитного поля уже можно использовать.

После простых преобразований, согласно (17), из (34) найдем

$$\varepsilon_x = \frac{C_q \gamma^2}{(n_2 - 1)^{0.5}} \frac{\sqrt{a'_2 c'_2 - b'_2{}^2}}{(2n_2 - 1)e'_2 + \varphi_2(n_2 - 1)^{1.5}},$$

где

$$a'_2 = \text{sh}(2\varphi_2 \sqrt{n_2 - 1}) - 2\varphi_2 \sqrt{n_2 - 1},$$

$$b'_2 = (\text{ch}(\varphi_2 \sqrt{n_2 - 1}) - 1)^2,$$

$$c'_2 = \frac{3}{2} \varphi_2 \sqrt{n_2 - 1} - 2 \text{sh}(\varphi_2 \sqrt{n_2 - 1}) + \frac{1}{4} \text{sh}(2\varphi_2 \sqrt{n_2 - 1}),$$

$$e'_2 = \text{sh}(\varphi_2 \sqrt{n_2 - 1}) - \varphi_2 \sqrt{n_2 - 1}.$$

Следовательно, величина минимального эмиттанса  $\varepsilon_x$  для ахромата не зависит от радиуса магнита. Этот вывод остается верным и в неахроматическом режиме для одного магнита на полупериоде накопителя (см. предыдущий раздел).

Если магниты не образуют ахромата, то  $J_x$  также зависит от значения дисперсионных функций, и проводить аналитическую минимизацию  $\varepsilon_x$  сложно. Можно использовать приближенную минимизацию, заметив, что при больших  $n_2$  значение  $J_x > 1$  и, следовательно,  $\varepsilon_x$  имеет минимум при минимальном значении числителя. А числитель минимален, если дисперсионные функции и параметры Твисса на входе магнита будут выбраны согласно формулам (22), (23). Найдем

$$\varepsilon_x = \frac{C_q \gamma^2}{J_x \rho_2 \varphi_2} \sqrt{4 \left( a_2 - \frac{d_2^2}{4\varphi_m} \right) \left( c_2 - \frac{e_2^2}{4\varphi_m} \right) - \left( b_2 - \frac{e_2 d_2}{2\varphi_m} \right)^2},$$

где

$$J_x = 1 + \frac{2n_2 - 1}{\varphi_2^2 (n_2 - 1)^2} \left( 4 \text{sh}^2 \left( \frac{\varphi_2}{2} \sqrt{n_2 - 1} \right) - \varphi_2^2 (n_2 - 1) \right).$$

В этом случае эмиттанс  $\varepsilon_x$  будет меньше, чем для ахромата, поскольку  $J_x > 1$ . Точное значение минимального эмиттанса найдем при численной минимизации его по четырем параметрам:  $\alpha_0, \beta_0, \eta_0, \eta'_0$ . При оптимальном подборе дисперсионных функций минимизация действительно дает меньшее значение эмиттанса ( $\varepsilon_{x \min} = 2.77 \text{ nm} \cdot \text{rad}$ ).

4. Период накопителя включает 2 магнита с  $n < 1$  и два магнита с  $n > 1$ . Натуральный эмиттанс пучка рассчитывается по формуле

$$\varepsilon_x = \frac{C_q \gamma^2}{J_x I_0} \times \left( \begin{array}{l} \frac{1}{\rho_1^2} [\beta_0 \alpha_1 - \alpha_0 b_1 + \gamma_0 c_1 + (\gamma_0 \eta_0^2 + 2\alpha_0 \eta_0 \eta'_0 \\ + \beta_0 \eta_0'^2) \varphi_1 + (\alpha_0 \eta_0 + \beta_0 \eta_0') d_1 - (\gamma_0 \eta_0 + \alpha_0 \eta_0') e_1]_1 \\ + \frac{1}{\rho_2^2} [\beta_0 \alpha_2 - \alpha_0 b_2 + \gamma_0 c_2 + (\gamma_0 \eta_0^2 + 2\alpha_0 \eta_0 \eta'_0 \\ + \beta_0 \eta_0'^2) \varphi_2 + (\alpha_0 \eta_0 + \beta_0 \eta_0') d_2 - (\gamma_0 \eta_0 + \alpha_0 \eta_0') e_2]_2 \end{array} \right).$$

Индексы „1“, „2“ у внутренних скобок означают, что бетатронные и синхротронные функции вычислены на входе магнита 1 или 2 соответственно,

$$J_x = 1 - \frac{1}{I_0} \left\{ \frac{1 - 2n_1}{\rho_1^2} \left[ \frac{\sin(\varphi_1 \sqrt{1 - n_1})}{\sqrt{1 - n_1}} \eta_{01} \right. \right. \\ + \rho_1 \frac{1 - \cos(\varphi_1 \sqrt{1 - n_1})}{1 - n_1} \eta'_{01} \\ + \rho_1 \frac{\varphi_1 \sqrt{1 - n_1} - \sin(\varphi_1 \sqrt{1 - n_1})}{(1 - n_1)^{3/2}} \left. \right]_1 \\ + \frac{1 - 2n_2}{\rho_2^2} \left[ \frac{\text{sh}(\varphi_2 \sqrt{n_2 - 1})}{\sqrt{n_2 - 1}} \eta_{02} + \rho_2 \frac{\text{ch}(\varphi_2 \sqrt{n_2 - 1})}{n_2 - 1} \eta'_{02} \right. \\ \left. + \rho_2 \frac{-\varphi_2 \sqrt{n_2 - 1} + \text{sh}(\varphi_2 \sqrt{n_2 - 1})}{(n_2 - 1)^{3/2}} \right]_2 \left. \right\}.$$

Расчеты по этим формулам и численные расчеты по программе MAD-8 [4] для разных магнитных структур накопителя дают одинаковые результаты.

## Заключение

Получены формулы для расчета натурального радиального эмиттанса пучка накопителя — источника синхротронного излучения при произвольных значениях индекса неоднородности магнитного поля в его магнитах. Они позволяют оптимизировать структуру кольцевого электромагнита накопителя для получения минимального значения радиального эмиттанса пучка в нем. Оптимизация накладывает требования на формирование бетатронных и синхротронных функций ( $\alpha_0, \beta_0, \eta_0, \eta'_0$ ) на входе магнитов за углами их торцевых скосов и на выбор значения индекса неоднородности магнитного поля в них.

## Список литературы

- [1] Фетисов Г.В. Синхротронное излучение. Методы исследования структуры вещества. М.: Физматлит, 2007. 671 с.
- [2] Sands M. The Physics of electron storage ring. Report. SLAC, 1970. 121 p.
- [3] Штеффен К. Оптика пучков высоких энергий. М.: Мир, 1969. 222 с.
- [4] The MAD Program. Vers. 8.21. CERN <<http://hansg.web.cern.ch/hansg/mad/mad8/user/mad.htm>>.