

Конфигурации аксиально-симметричных квазибессильных магнитных систем. II

© Г.А. Шнеерсон, И.А. Вечеров, Д.А. Дегтев, О.С. Колтунов, С.И. Кривошеев, С.Л. Шишигин

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: integr@delfa.net

(Поступало в Редакцию 19 ноября 2007 г.)

В рамках модели слоев нулевой толщины рассмотрены три способа создания равновесных конфигураций, являющихся прототипами квазибессильных обмоток: формирование фигуры равновесия путем итераций, использование диамагнитных экранов и токоотвод полоидального тока из торцевой части магнита в его внешнюю зону. Сочетание этих методов позволило построить конфигурации тонкостенных квазибессильных магнитов, найти предельные размеры торцевых частей обмоток, на которых выполнены условия равенства магнитных давлений полоидального и тороидального полей по обе стороны слоя с током. Рассмотрены возможности построения внешней зоны тонкостенного магнита с цилиндрическими бандажами. Показано, что в магнитных системах с аспектным отношением два и менее можно избежать появления аксиальных сил во всем объеме магнита. Рассмотрена двухмодульная конфигурация и показана возможность дополнительного снижения напряжений в этой системе по сравнению с одиночным уравновешенным модулем. Построена равновесная конфигурация трехслойного магнита со слоями нулевой толщины. Показано, что переход от нее к реальным слоям конечной толщины не вносит существенных изменений в результаты расчета напряжений в наиболее нагруженных частях магнита.

PACS: 85.70.Ay, 07.55.-w

Введение

Квазибессильные магнитные системы с обмоткой малой толщины являются хорошим начальным приближением при построении магнитных систем, у которых толщина обмотки много меньше других характерных размеров [1–3]. Конфигурация равновесного слоя, толщину которого в первом приближении можно считать равной нулю, должна быть выбрана так, чтобы в точках M и N по обе его стороны (рис. 1) было выполнено условие равенства магнитных давлений [4]

$$B_p^2(M)/(2\mu_0) = B_\varphi^2(N)/(2\mu_0), \quad (1)$$

где $B_p(M)$ — касательная к границе компонента индукции полоидального поля в точке M , $B_\varphi(N)$ — индукция азимутального поля в точке N , μ_0 — магнитная постоянная. Выбрав равновесную однослойную систему в рамках этой модели, можно далее рассчитать близкую к ней систему дискретных уравновешенных слоев с полоидальным и азимутальным токами. Возможные конфигурации магнита с тонкой уравновешенной (квазибессильной) обмоткой представлены на рис. 1. Наиболее привлекательной является система без внешних экранов и токоотвода. Здесь будут рассмотрены такие конфигурации, однако возможности их построения достаточно ограничены. Поэтому в общем случае приходится использовать дополнительные экраны и (или) отводить избыточный ток с торцевого участка.

Элементы внешней зоны магнитной системы, где отсутствует азимутальный ток, не уравновешены, однако механические напряжения в них не должны быть больше

остаточных напряжений в многослойной квазибессильной обмотке. Таким образом, возникает комплексная задача такого выбора конфигурации и токораспределения, чтобы прочность была обеспечена во всех частях магнита. При этом очевидным преимуществом обладают равнонагруженные магнитные системы.

1. Коаксиальная магнитная система со свободной границей

На рис. 1, *a* представлена магнитная система, у которой квазибессильная обмотка малой толщины $R_1 - R_0 \ll R_0$ расположена на участке до точки b с координатой $r(b) = R_2$, а далее полоидальный ток замыкается по стенке цилиндра большой толщины, воспринимающего нагрузку.

На указанном участке функция потока полоидального поля Ψ_B постоянная, а индукция должна подчиняться условию $|B| = \mu_0 i / r$, где i — полоидальный ток. При этих условиях равенство магнитных давлений по обе стороны обмотки достигается только за счет выбора ее конфигурации. В аналогичной плоской задаче модуль индукции принимает постоянное значение на торце. При этом условии форма границы в плоской задаче может быть рассчитана аналитически методом конформных отображений. В плоской задаче R_1 — половина расстояния между параллельными проводниками с противоположными токами. Максимальный размер торцевого участка с постоянным модулем индукции в плоской задаче соответствуют условию $R_2 = 2R_1$ [5,6].

В литературе отсутствуют примеры аналитических решений для свободной границы аксиально-симметричной

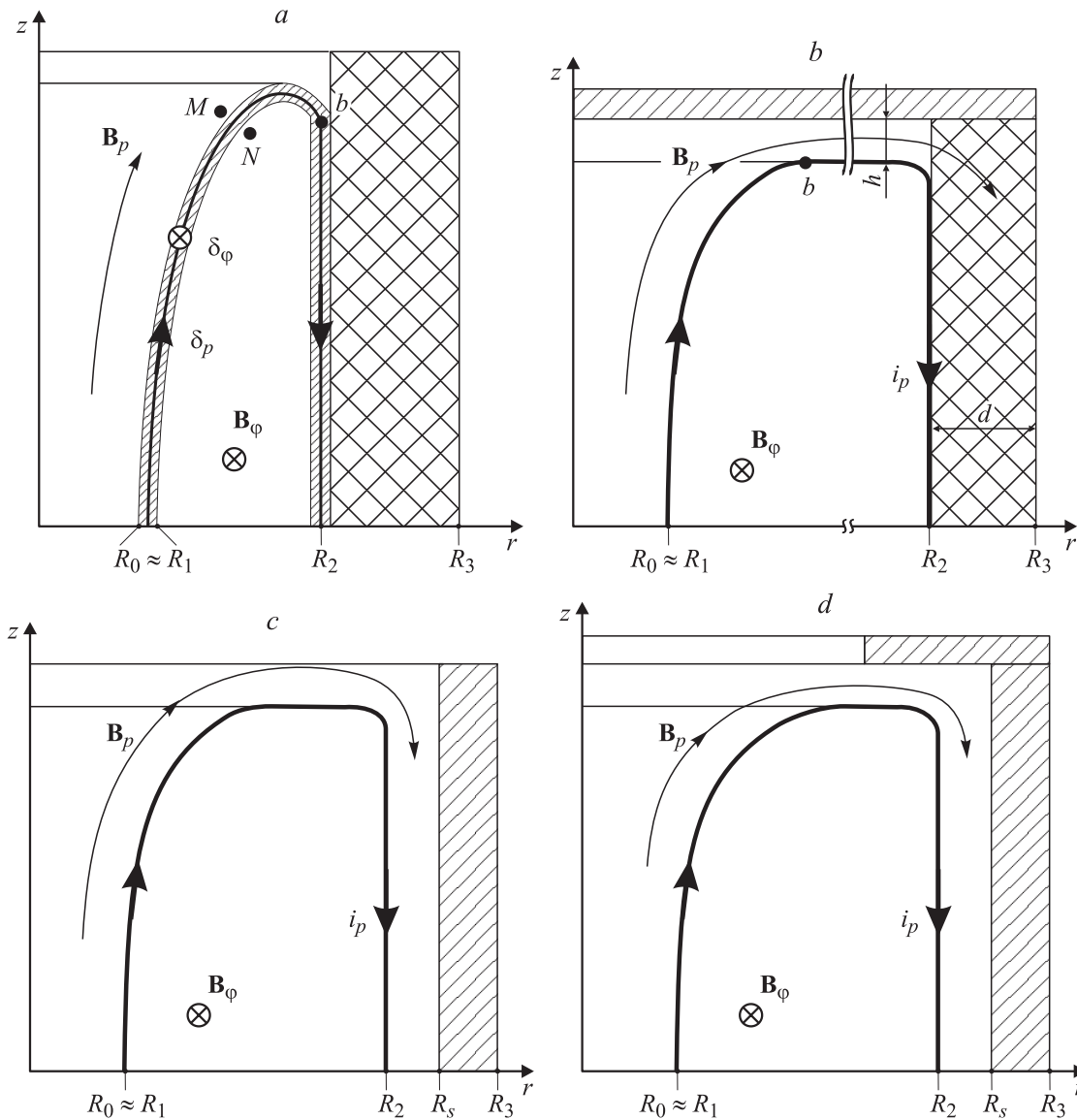


Рис. 1. Тонкостенные квазибессильные конфигурации: *a* — коаксиальная магнитная система со свободной границей и внешним бандажом (δ_p и δ_ϕ — полоидальная и азимутальная компоненты тока); *b* — система с плоским диамагнитным экраном; *c* — система с цилиндрическим экраном, воспринимающим нагрузку; *d* — система с цилиндрическим и торцевым экранами (последний перекрывает часть поверхности торца).

системы.¹ Численные методы позволяют найти форму торца путем специальным образом организованного процесса итераций и другими методами [7]. При $R_2/R_1 \gg 1$ равновесная фигура не может быть построена, поскольку асимптотическая зависимость для индукции полоидального поля имеет вид $B_p = \text{const}r^{-2}$, тогда как $B_\phi = \text{const}r^{-1}$. Серия расчетов, выполненных методом итераций, показала, что вычислительный процесс сходится, если аспектное отношение $A = R_2/R_1 \leq 1.64$ (рис. 1, *a*), а при условии $A > 1.64$ построить равновесную конфигурацию не удастся. Метод расчета описан

¹ Равновесный слой для аксиально-симметричной системы аналитически рассчитан в работе [4], однако соответствующее поле может быть сформировано только в присутствии внешних диамагнитных тел.

в работе [8]. Там же приведено уравнение регрессии, позволяющее найти координаты точек профиля тонкой равновесной обмотки.

Можно предположить, что значение аспектного отношения $A \approx 1.64$ ограничивает область существования равновесных конфигураций в рассматриваемой коаксиальной системе. Магнитное давление на внешний бандаж в этом случае определяется по формуле

$$P_M(R_2) = \frac{B_\phi^2(R_1)}{2\mu_0} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \approx \frac{B_0^2}{2\mu_0} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2, \quad (2)$$

где B_0 — индукция на оси в области однородного поля. При наибольшем возможном значении $R_2/R_1 \approx 1.64$ это давление составляет $0.37B_0^2/(2\mu_0)$.

В бандаже большой толщины ($R_3 \gg R_2$) механические напряжения принимают значения $\sigma_\varphi(R_2) \approx -\sigma_r(R_2) = P_M(R_2)$, при этом эквивалентное напряжение (по фон Мизесу) составляет $\sigma_m = (\sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2 - \sigma_r\sigma_\varphi)^{1/2} = P_M\sqrt{3}$. Допустимое магнитное давление на бандаж ограничено значением $P_M(R_2) < \sigma_2/\sqrt{3}$, где σ_2 — предел прочности для материала бандажа. В общем случае он отличается от аналогичного предела для материала обмотки σ_1 . Соответствующие магнитные пределы прочности имеют значения $B_{M1} = \sqrt{2\mu_0\sigma_1}$ и $B_{M2} = \sqrt{2\mu_0\sigma_2}$.

Получение поля с индукцией $B_0 \gg B_{M1}$ требует использования многослойной квазибессилового обмотки. Прочность тонкой квазибессилового обмотки, состоящей из N слоев, может быть обеспечена при условии $B_0 \leq \lambda NB_{M1}$ [1–3], где B_0 — индукция на оси магнита. Здесь λ — численный множитель. В однослойной системе $\lambda = \sqrt{2}G$, где $G \approx (1/3 - \mu/3 + (\mu/3 + 2/3)^2)^{-1/4}$. В этой формуле μ — коэффициент Пуассона. Число $G \approx 1.05$, если $\mu = 0.33$. В однослойной системе $B_0 = 1.48B_{M1}$. В многослойной системе при распределении токов по слоям по закону, близкому к синусоидальному, имеем $\lambda = (4/\pi)G \approx 1.33$. В магнитных системах с большим числом слоев можно использовать материалы с относительно низким прочностным пределом. Например, в трехслойном магните для получения поля с индукцией 100 Т прочностной предел соответствует значению $B_{M1} = 25$ Т ($\sigma_1 = 25$ МПа), а в шестислойной обмотке имеем $B_{M1} = 12.5$ Т ($\sigma_1 = 62.5$ МПа).

Для обеспечения прочности бандажа большой толщины в системе с аспектным отношением $A = R_2/R_1 = 1.64$ должно быть выполнено условие, вытекающее из формулы (2)

$$B_0 \leq B_{M2}(R_2/R_1)^{3^{-1/4}} = 1.25B_{M2}. \quad (3)$$

Монолитные бандажи обладают существенно более высокой прочностью, чем многослойная квазибессилового обмотка. Поэтому естественно принять значение B_{M2} выше, чем B_{M1} . В соответствии с формулой (3) при использовании материала с прочностным пределом $\sigma_2 = 400$ МПа (в этом случае $B_{M2} = 32$ Т) имеем $B_0 = 40$ Т. Для получения поля с индукцией 100 Т в рассмотренной простейшей конфигурации со свободной границей необходимо использовать для бандажа материал с экстремально высоким прочностным порогом $\sigma_2 = 2.56$ ГПа ($B_{M2} = 89$ Т). Для снижения давления на бандаж следует перейти к другим конфигурациям, в которых можно увеличить аспектное отношение или создать систему равнонагруженных слоев, воспринимающих нагрузку во внешней зоне магнита.

2. Коаксиальная система с торцевым экраном и внешним бандажом

Диамагнитный экран позволяет получить равновесную конфигурацию при замыкании полоидального тока по поверхности цилиндра с радиусом $R_2 > 1.64R_1$. При

этом может быть снижена нагрузка на внешний бандаж и обеспечено равновесие торцевой части магнита. Путем вариаций формы границы экрана и торца соленоида можно добиться реализации условия (1). Примером является простейшая система с плоским экраном, показанная на рис. 1, *b* [1–4]. При $r \gg R_1$ поверхность соленоида есть плоскость, параллельная экрану и отстоящая от него на расстояние $h = R_0/2$, где $R_0 \approx R_1$ — внутренний радиус тонкостенного магнита. Метод итераций позволяет построить конфигурацию, в которой условие $Br = \text{const}$ выполнено не только вдали от оси, но и на переходном участке до точки *b*. Предельное значение $r(b)$ составляет приблизительно $1.54R_1$ (рис. 1, *b*).

В рассматриваемой системе максимум индукции на поверхности экрана составляет около $0.4B_0$, а полная сила, приходящаяся на экран, может быть рассчитана по приближенной формуле, справедливой при $R_2 \geq 2R_1$

$$F \approx \frac{B_0^2 \pi R_0^2}{\mu_0} \left(\ln \frac{R_2}{R_1} - 0.86 + \frac{1.6R_1}{R_2} \right). \quad (4)$$

В поле с индукцией 100 Т эта сила при $R_0 = 2 \cdot 10^{-2}$ м является величиной порядка 10^7 Н и слабо зависит от отношения R_2/R_1 . Поэтому для удержания экранов необходимо создать специальную конструкцию, способную воспринять большую осевую силу, например, систему шпилек. Напряжения в элементах конструкции могут быть снижены, если эффективная длительность импульса мала по сравнению с периодом упругих колебаний системы удержания экранов [9]. Период колебаний может быть увеличен путем установки дополнительных грузов с целью повышения массы экранов.

Рассмотренная конструкция с плоскими экранами, очевидно, не является единственно возможной. Другие формы торца и экрана могут дать меньшие значения осевой силы и должны быть специально изучены. Однако трудно ожидать, что оптимизация торцевого экрана позволит многократно уменьшить действующую на него силу.

В системе с торцевым экраном и внешним бандажом радиус R_2 необходимо выбрать таким, чтобы напряжения в бандаже не превышали допустимых значений. В случае бандажа большой толщины ($R_3 \gg R_2$, рис. 1, *b*) отношение R_2/R_1 может быть рассчитано по формуле (2), где $P_M = \sigma_2/\sqrt{3}$:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{B_\varphi(R_1)}{B_{M2}} 3^{1/4} = \frac{3^{1/4}}{\sqrt{\alpha}}. \quad (5)$$

В этой формуле $\alpha = B_{M2}^2/B_\varphi^2(R_1)$ — параметр, характеризующий предел прочности используемого материала в сравнении с магнитным давлением поля на внешней границе обмотки. В тонкой обмотке $B_0 \approx B_\varphi(R_1)$, поэтому параметр α можно представить в виде

$$\alpha = B_{M2}^2/B_0^2. \quad (6)$$

Как было отмечено выше, в многослойной обмотке $B_0 \approx \lambda NB_{M1}$, и в этом случае

$$\alpha = (B_{M2}/B_{M1})^2/(\lambda N)^2.$$

Расчеты по формулам (5) и (6) для поля с индукцией 100 Т показывают, что для материалов бандажей с магнитными пределами прочности $B_{M2} = 55$ Т ($\sigma_2 = 1.2$ ГПа) и $B_{M2} = 32$ Т ($\sigma_2 = 400$ МПа) имеем соответственно $R_2/R_1 = 2.39$ и 4.13. Далее эти два случая будут рассматриваться как характерные примеры. Первый из них соответствует материалу типа Zylon или другому сверхпрочному диэлектрику, а второй материал по своей прочности близок к хромистой бронзе. Предел прочности внешнего бандажа можно рассчитывать, воспользовавшись приведенным выше критерием фон Мизеса и выражениями для компонент тензора напряжений на внутренней границе бандажа, определяемых по известным формулам теории упругости [10]:

$$\sigma_\varphi = \frac{B_\varphi^2(R_2)}{2\mu_0} \frac{\theta_e^2 + 1}{\theta_e^2 - 1}, \quad \sigma_r = -\frac{B_\varphi^2(R_2)}{2\mu_0}, \quad (7)$$

где $\theta_e = R_3/R_2$. Исходя из этих соотношений можно связать аспектное отношение с параметром θ_e

$$A = \frac{R_2}{R_1} = \sqrt{\frac{\xi(\theta_e^2 + 1)}{\alpha(\theta_e^2 - 1)}}, \quad (8)$$

где

$$\xi = \left(1 + (\sigma_r(R_2)/\sigma_\varphi(R_2))^2 - \sigma_r(R_2)/\sigma_\varphi(R_2)\right)^{1/2} \\ = (1 + 3\theta_e^4)^{1/2}/(1 + \theta_e^2).$$

Это число принимает значение $\xi = \sqrt{3}$ при $\theta_e \gg 1$ и $\xi = 1$ при $\theta_e \approx 1$. В последнем случае, когда бандаж имеет малую толщину d , $\theta_e \approx 1 + d/R_2$, при этом

$$\frac{R_2}{R_1} = \sqrt{\frac{R_2}{d\alpha}} \gg 1. \quad (9)$$

Внешний радиус бандажа коаксиальной магнитной системы $R_3 = \theta_e R_2$ растет пропорционально $(\theta_e - 1)^{-1/2}$ при $\theta_e \rightarrow 1$ и пропорционально θ_e — при $\theta_e \gg 1$. Он принимает наименьшее значение, когда $\theta_e \approx 1.44$. В этом случае

$$\xi = 2.68; \quad R_2/R_1 = 2.76/\sqrt{\alpha}; \quad R_3/R_2 = 3.98/\sqrt{\alpha}. \quad (10)$$

3. Тонкостенный магнит с цилиндрическим экраном

В рассмотренных ранее конфигурациях *a* и *b* (рис. 1) радиальная сила на периферии магнитной системы воспринимается внешним опорным цилиндром (бандажом), на поверхности которого располагаются проводники с аксиальным током. В системе, рассмотренной на рис. 1, *c*, уравновешенная квазибессилловая обмотка не обрывается в точке *b*, а занимает всю граничную поверхность. В такой системе внешний участок обмотки может быть уравновешен с помощью замкнутого экрана с радиусом R_S . Магнитный поток полоидального поля не пересекает поверхность обмотки и проходит в зазоре между

цилиндрами с радиусами R_2 и R_S . Равновесие внешней части обмотки возможно, если выполнено условие $|B_\varphi(R_2)| = |B_p(R_2)|$. Учитывая, что $|B_\varphi(R_2)| = B_0 R_1/R_2$, а $|B_p(R_2)| = B_0 R_1^2/(R_S^2 - R_2^2)$, приходим к формуле

$$R_S = \sqrt{R_2^2 + R_1 R_2}. \quad (11)$$

Магнитное давление на цилиндрический экран и в этом случае определяется по формуле (2). Численные расчеты показывают, что равновесная конфигурация квазибессилловой обмотки с цилиндрическим экраном может быть построена полностью, включая торцевой участок, если $R_S \leq 2.1R_1$. Иначе говоря, система с цилиндрическим экраном может быть реализована без дополнительного торцевого экрана, пока отношение R_2/R_1 не превосходит указанного значения, при котором магнитное давление P_M на цилиндрический экран составляет $0.22B_0^2/(2\mu_0)$. При таком отношении радиусов в системе с толстым бандажом ($R_3 \gg R_S$) достижимое значение индукции в магните с тонкостенной обмоткой составляет $B_0 = (1/0.22)^{-1/2} 3^{-1/4} B_{M2} = 1.62B_{M2}$. В сильном поле снижение P_M до порогового значения $\sigma_2/\sqrt{3}$ (в случае экрана большой толщины) или до значения $\sigma_2 d/R_3$ (для экрана малой толщины) возможно, если аспектное отношение превышает 2.1, но при этом для сохранения равновесия торцевой части необходимо использовать еще и торцевой экран.

В качестве примеров рассмотрим соленоид, предназначенный для получения поля, с индукцией $B_0 = 100$ Т. Как в ранее рассмотренном примере (см. формулу (5)), в случае бандажа большой толщины, выполненного из очень прочного материала ($\sigma_2 = 2.2$ ГПа), приходим к аспектному отношению $R_2/R_1 = 2.42$, при этом $R_S/R_1 = 2.87$. Как было сказано, в системе с цилиндрическим экраном равновесие в области с $R_2/R_1 \leq 2$ может быть обеспечено и без торцевого экрана благодаря выбору конфигурации свободной границы. Поэтому в рассмотренном примере магнитной системы с относительно небольшим аспектным отношением торцевой экран должен перекрывать лишь узкий промежуток $2R_1 \leq r \leq R_S$ и может быть выполнен в виде выступа на внешнем цилиндре (рис. 1, *d*). При этом, как и в предыдущей конфигурации (рис. 1, *b*), зазор между торцевым экраном и обмоткой составляет $0.5R_1$. Расчет показывает, что осевая сила, действующая на узкий торцевой экран, в представленном примере близка к значению $1.96B_0^2/(2\mu_0)R_1^2$, тогда как формула (4) дает для этой силы значение $4.27B_0^2/(2\mu_0)R_1^2$. Дальнейшее снижение осевой силы возможно путем оптимизации формы торцевого экрана.

При увеличении аспектного отношения R_2/R_1 можно резко уменьшить напряжение в цилиндрическом экране. Например, для магнита с бандажом, выполненным из материала с пределом прочности $\sigma_2 = 400$ МПа, следует, как было показано, выбрать аспектное отношение равным 4.25, при этом $P_M = 0.055B_0^2/(2\mu_0)$. При данном аспектном отношении, в отличие от предыдущего примера, экран перекрывает значительную часть промежутка

от оси до цилиндрического экрана, поэтому сила может быть оценена по формуле (4). Наличие торцевого экрана требует удержания аксиальной силы в той же мере, как это имело место в конфигурации без цилиндрического экрана.

4. Безэкранные магнитные системы с уравновешенными торцевыми частями

Равновесие тонкой обмотки за пределами относительно узкого участка со свободной границей можно обеспечить без применения экранов путем непрерывного отвода тока. В первой части статьи этот способ был продемонстрирован на примере обмотки в виде гиперболоида вращения. В более общем случае построение равновесной тонкой обмотки возможно, если во всех точках M выполнено условие

$$(d/dr)(B_p(M)r) < 0. \quad (12)$$

При этом условии для поддержания равенства модулей индукций $B_p(M)$ и $B_\phi(N)$ необходимо часть полоидального тока отводить так, как это показано на рис. 2 на примере системы с плоским торцом. В этой системе равновесие без токоотвода можно поддержать только на участке границы $R_1 < r \leq 1.5R_1$. На остальной части полоидальный ток должен убывать в соответствии с зависимостью, показанной на рис. 2.

Определенные возможности для создания уравновешенных магнитных систем открывает применение многосвязных конфигураций. Примером может быть система двух тонкостенных коаксиальных модулей, разделенных радиальным зазором Δ_0 , на краях которого функция потока полоидального поля принимает равные по модулю и противоположные по знаку значения: $\psi_B(1) = -\psi_B(2)$ (рис. 3, а). Направления азимутальной

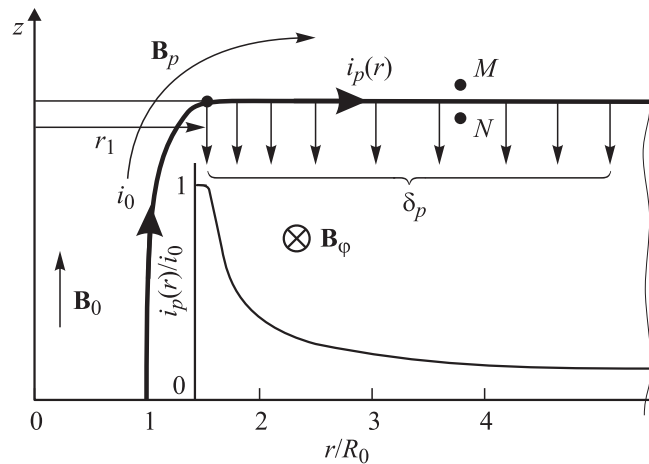


Рис. 2. Тонкостенный магнит с плоским торцом, обмотка которого уравновешена благодаря токоотводу: i_0 — полный полоидальный ток, $i_p(r)$ — ток, замыкающийся за пределами участка торца, ограниченного окружностью радиуса r .

компоненты тока в соседних модулях противоположны. Равновесная конфигурация первого модуля в этом случае близка к описанной для системы с цилиндрическим экраном. Расчеты равновесной конфигурации методом итераций показали, что двухмодульная система существует при следующих отношениях радиусов границ: $r_1/r'_1/r_2/r'_2 = 1/2.03/2.86/3.03$. При этом длина второго модуля мало отличается от длины первого. Участок ниже точки m второго модуля не уравновешен, а остальная часть его границы и вся граница первого модуля уравновешены. Кривая, представленная на рис. 3, б, показывает изменение магнитного давления при смещении за край уравновешенного участка. Индукция азимутального поля на неуравновешенном участке есть $B_\phi(r'_2) = B_0(r_1/r'_1)(r_2/r'_2)$, где B_0 — индукция на оси в рабочей области магнита (вдали от края). В рассматриваемом примере $B_\phi(r'_2) = 0.427B_0$, а соответствующее магнитное давление на внешний бандаж составляет

$$B_\phi^2(r'_2)/(2\mu_0) = 0.18B_0^2/(2\mu_0).$$

На рис. 3, в представлены зависимости, характеризующие двухмодульную магнитную систему при различных значениях функции потока $\Psi_B(2)$ вплоть до $\Psi_B(2) = -4\Psi_B(1)$. Последнему случаю соответствует наименьшее значение индукции $B_\phi(r'_2) \cong 0.34B_0$ и магнитного давления, действующего на внешний бандаж. Оно составляет около $0.12B_0^2/(2\mu_0)$, или 480 МПа, для поля с индукцией на оси $B_0 = 100$ Т. На рис. 3, д для одной из систем представлено распределение зависимости B_ϕ^2/B_p^2 на границе первого модуля в окрестности точки n , где имеет место наибольшая погрешность при построении профиля методом итераций. На уравновешенных участках это отношение близко к единице, что свидетельствует о приемлемой точности построения профилей методом итераций.

5. Внешняя область магнита (модель с непрерывным распределением полоидального тока)

В системе с отводом полоидального тока от торцов радиальные силы распределены во внешней области $r_1 < r < R_2$ (рис. 4), где они воспринимаются диэлектрическими цилиндрами (бандажами). Наиболее компактной является система с равнонагруженными бандажами. Простейшая модель этой системы была основана на допущении, что число бандажей велико, значения их толщины малы, и они механически не взаимодействуют [11]. В рамках этой модели распределение полоидального тока по радиусу считается непрерывным. При этом для азимутального напряжения справедливо выражение

$$\sigma_\phi \approx rB_\phi\delta_z = -\mu_0\Psi_i \frac{d\Psi_i}{dr} \frac{1}{r}, \quad (13)$$

где $\Psi_i = rH_\phi$ — функция тока.

В равнонагруженной системе напряжения во всех слоях одинаковы: $\sigma_\phi = \sigma_2 = B_{M2}^2/(2\mu_0)$, где B_{M2} — „маг-

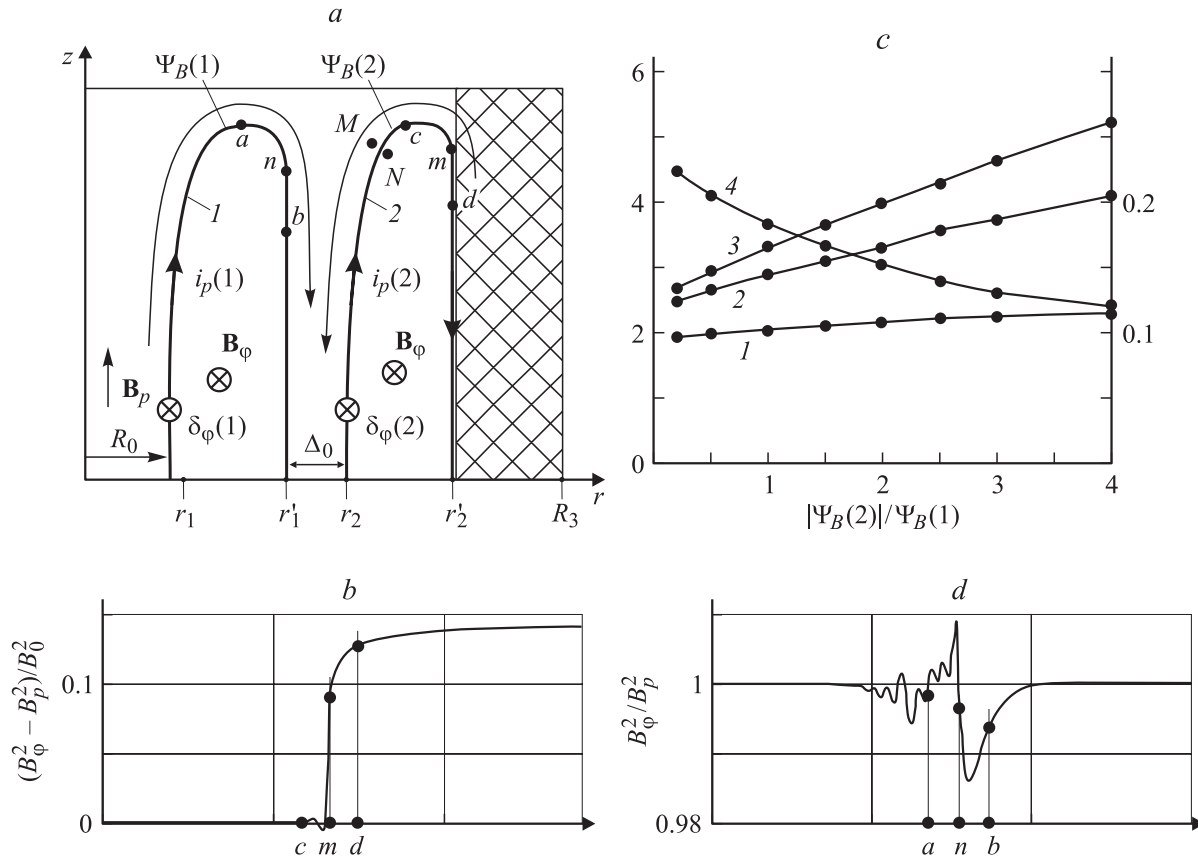


Рис. 3. Двухмодульный тонкостенный магнит с полностью уравновешенным первым модулем и частично уравновешенным вторым: *a* — двухмодульная конфигурация с внешним бандажом; *b* — изменение отношения уравновешивающих магнитных давлений в окрестности точки *n*; *c* — кривые, показывающие, как изменяются радиальные размеры двухмодульной системы (левая ось) и квадрат индукции на внешней границе (правая ось) при увеличении магнитного потока в зазоре между модулями: 1 — r'_1/r_1 , 2 — r_2/r_1 , 3 — r'_2/r_1 , 4 — $B^2\varphi(r'_2)/B_0^2$; *d* — изменение разности магнитных давлений в окрестности точки *m*.

нитный предел прочности“ материала бандажей. При этом решение уравнения (13) имеет вид

$$\Psi_i(r) = (C - r^2\sigma_2/\mu_0)^{1/2}, \quad (14)$$

где постоянная интегрирования C может быть найдена из условия на внутренней границе равнонагруженной области магнитной системы

$$\Psi_i(r_1) = B_\varphi(r_1)r_1/\mu_0 = B_\varphi(R_1)R_1/\mu_0 = \Psi_{i,0},$$

где r_1 — внутренняя граница области, в которой замыкается полоидальный ток (рис. 4). Отсюда следуют выражения для C и $\Psi_i(r)$:

$$C = (\psi_{i,0})^2 \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right), \quad \Psi_i(r) = \psi_{i,0} \left[1 + \frac{\alpha_1}{2} \left(1 - \frac{r^2}{r_1^2}\right)\right]^{1/2}, \quad (15)$$

где $r \geq r_1$. В этой формуле $\alpha_1 = 2\mu_0\sigma_2/B_\varphi^2(r_1) = \alpha(r_1/R_1)^2$. В системе без зазора между квазибессиловой обмоткой и внешней зоной магнита $r_1 = R_1$, $\alpha_1 = \alpha$.

При полном замыкании тока в толще внешней зоны обмотки, когда $B_\varphi(R_2) = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_i(r)}{\Psi_{i,0}} &= \sqrt{\frac{R_2^2 - r^2}{R_2^2 - r_1^2}} = \sqrt{1 + \frac{\alpha_1}{2} (1 - \rho^2)} \\ &= \sqrt{1 + \frac{\alpha}{2} \left[\left(\frac{r_1}{R_1}\right)^2 - \rho^2\right]}, \end{aligned}$$

$$B_\varphi(r) = B_\varphi(r_1) \frac{r_1}{r} \sqrt{\frac{R_2^2 - r^2}{R_2^2 - r_1^2}}, \quad A = \frac{R_2}{R_1} = \sqrt{\left(\frac{r_1}{R_1}\right)^2 + \frac{2}{\alpha}}, \quad (16)$$

где $\rho = r/R_1$. Максимальное значение ρ есть $\rho_{\max} = R_2/R_1$. В наиболее интересном случае, когда $\alpha \ll 1$, аспектное отношение $A = R_2/R_1$ практически не зависит от r_1 . В рассмотренном примере плотность аксиального тока неограниченно растет на краю расчетной области (при $r = R_2$):

$$\delta_z = -\frac{B_{M2}}{\mu_0 \sqrt{2(R_2^2 - r^2)}}. \quad (17)$$

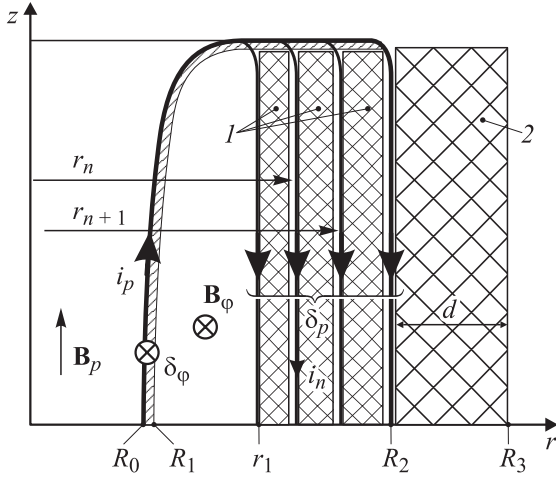


Рис. 4. Квазибессилового магнит с обмоткой малой толщины и внешней зоной, где размещены цилиндры с полоидальным током, а также равнонагруженные диэлектрические бандажи 1 и внешний бандаж 2.

Этот эффект отсутствует в системе с внешним проводящим слоем, по которому замыкается часть тока. Сначала рассмотрим случай, когда этот слой удерживается бандажом, толщина которого мала: $h \ll R_2$. На этот слой воздействует магнитное давление $B_\phi^2(R_2)/(2\mu_0)$, и в бандаже возникает азимутальное напряжение $\sigma_\phi \approx [B_\phi^2(R_2)/(2\mu_0)](R_2/h) = \sigma_2$. При условии $r_1 \approx R_1$ функция тока и индукция на оси магнита могут быть рассчитаны по формулам:

$$\Psi_i(r) = \frac{B_{M2}R_2}{\sqrt{2}\mu_0} \sqrt{1 + \frac{2h}{R_2} - \frac{r^2}{R_2^2}},$$

$$B_\phi(R_1) = \frac{B_{M2}R_2}{\sqrt{2}R_1} \sqrt{1 + \frac{2h}{R_2} - \frac{R_1^2}{R_2^2}}. \quad (18)$$

В рассматриваемой системе по внешнему проводнику замыкается лишь малая часть тока Δi . Это можно показать для случая, когда $h = R_1^2/(2R_2)$. В этом примере

$$B_\phi(r) = B_\phi(R_1) \frac{R_1}{r} \sqrt{1 - \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2}},$$

$$B_\phi(R_2) = B_\phi(R_1) \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = \frac{B_{M2}}{\sqrt{2}} \frac{R_1}{R_2}, \quad (19)$$

$$R_2/R_1 \approx \sqrt{2/\alpha}.$$

Внешний радиус магнитной системы есть $R_3 = R_2 + h$, и при условии $h \ll R_2$ имеем $R_3 \approx R_2 \approx (2/\alpha)^{1/2}$. Для сравнения отметим, что это значение внешнего радиуса существенно меньше рассчитанного по формуле (9) для коаксиальной конфигурации с бандажом малой толщины. Таким образом, система равнонагруженных слоев более компактна, чем коаксиальная.

Для рассмотренной системы можно рассчитать долю тока, которая замыкается по внешнему цилиндру:

$$\frac{\Delta i}{i} = \frac{R_2 B_\phi(R_2)}{R_1 B_\phi(R_1)} = \frac{R_1}{R_2} \approx \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \ll 1. \quad (20)$$

В качестве примера рассмотрим систему, рассчитанную на получение поля в магните с тонкой обмоткой, когда $B_\phi(R_1) \approx B_0$. Принимая $B_0 = 100$ Т, $r_1 = R$, выполним, как и раньше, оценки для двух значений магнитного предела прочности материала бандажей: $B_{M2} = 55$ и 32 Т (соответственно $\alpha = 0.3$ и 0.1). При непрерывном токоотводе без внешнего проводящего слоя формула (16) дает $A = 2.77$ и 3.32 соответственно. В системе с тонким бандажом аспектное отношение изменяется незначительно: $A = 2.58$ и 3.16 . При этом толщина внешнего бандажа $n = R_1^2/(2R_2)$ составляет $0.18R_1$ и $1.15R_1$.

Рассмотрим далее систему с внешним бандажом произвольной толщины, предполагая, что азимутальное напряжение постоянно как в области $r_1 < r < R_2$, так и на внутренней границе бандажа ($r = R_2$). В общем случае азимутальная компонента индукции в равнонагруженной области $r_1 < r < R_2$ может быть рассчитана по формуле

$$B_\phi(r) = \frac{r_1}{r} \left[1 + \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{r^2}{r_1^2} \right) \right]^{1/2}. \quad (21)$$

Вычисления приводят к следующим зависимостям для аспектных отношений:

$$A = R_2/R_1 = ((r_1/R_1)^2 + 2/\alpha)^{1/2} (1 + \Omega)^{-1/2},$$

$$A_1 = R_2/r_1 = (1 + 2/\alpha_1)^{1/2} (1 + \Omega)^{-1/2}, \quad (22)$$

где $\Omega = (2/\xi)(\theta_e^2 - 1)/(\theta_e^2 + 1)$, $\theta_e = R_3/R_2$. Параметр Ω близок к нулю в предельном случае, когда $\theta_e \approx 1$, и равен $2/\sqrt{3}$, если $\theta_e \gg 1$.

В отличие от коаксиальной системы наименьшее значение внешнего радиуса магнита R_3 имеет место в случае, когда толщина внешнего бандажа мала, т.е. при условии $\theta_e \approx 1$ и $R_3 \approx R_2$. В системе с бандажом большой толщины ($\theta_e \gg 1$) отношение R_2/R_1 принимает значение:

$$A \approx ((r_1/R_1)^2 + 2/\alpha)^{-1/2} (1 + 2/\sqrt{3})^{-1/2},$$

$$A_1 \approx (1 + 2/\alpha)^{-1/2} (1 + 2/\sqrt{3})^{-1/2}. \quad (23)$$

В этом случае основная доля тока сосредоточена во внешнем цилиндрическом проводнике. В случае $\alpha \ll 1$ имеем $\Delta i/i \approx (1 + 2/\sqrt{3})^{-1/2} = 0.68$.

Представленные выражения для аспектных отношений относятся к области магнита, удаленной от торцевых частей. В этой области полоидальный ток направлен параллельно оси z , и в ней нет аксиальных сил. Очевидным преимуществом обладают магнитные системы, у которых полоидальный ток направлен указанным образом во всей внешней зоне магнита вплоть до торцевых

Аспектные отношения, рассчитанные для обмотки с уравновешенными осевыми силами и для равнонагруженной обмотки с двумя типами внешних бандажей

α	0	0.1	0.2	0.3	0.35	0.4	0.5
R_e/R_1	1.64	1.70	1.74	1.80	1.84	1.88	2.18
R'_2/R_1	—	4.58	3.32	2.77	2.58	2.45	2.24
R''_2/R_1	—	3.12	2.25	1.88	1.76	1.67	1.52

частей. В таких магнитных системах зависимость граничного значения функции тока от радиуса описывается формулой (18). Профиль границы должен быть построен так, чтобы наряду с условием $\Psi_B = \text{const}$ выполнялось условие равновесия $|B_p(M)| = |B_\phi(N)|$.

В системе с торцевым экраном при заданной зависимости $B_\phi(r)$ этого можно достичь путем трансформации границы. Надо выбрать зависимость $h(r)$ (рис. 1, *c*) так, чтобы было выполнено условие равновесия. В частности, для системы с тонким внешним бандажом, когда справедливы формулы (16), на участке $R_1 < r < R_2$ зазор можно рассчитать по приближенной формуле, не учитывающей краевой эффект при $r \approx R_2$:

$$h/R_0 = (R_2/2)(R_2^2 + R_1^2 - r^2)^{-1/2}. \quad (24)$$

При отсутствии торцевого экрана удается построить методом итераций систему равновесных профилей для значений $\alpha < 0.5$ (рис. 4). Например, для $\alpha = 0.1$ внешняя граница такого профиля обрывается при $R_2 = R_e \approx 1.7R_1$, тогда как внешний радиус равнонагруженной обмотки при этом значении прочностного параметра α , согласно формуле (22), должен быть равен $R'_2 = 4.58R_1$ (при $\theta_e = 1$) и $R''_2 = 3.12R_1$ (при $\theta_e \gg 1$). В таблице приведены аспектные отношения R_e/R_1 для равновесных конфигураций. Там же представлены значения R'_2/R_1 и R''_2/R_1 , рассчитанные по формуле (22) для $\theta_e = 1$ и $\theta_e \gg 1$ соответственно.

Из данных таблицы видно, что лишь в случае $\alpha > 0.35$ выполняется условие $R'_2/R_1 < R_e/R_1 < R''_2/R_1$, поэтому толщина внешнего бандажа может быть выбрана такой, чтобы аспектное отношение R_e/R_1 совпало с рассчитанным по формуле (22). Например, для $\alpha = 0.5$ это имеет место в случае бандажа малой толщины ($\theta_e \approx 1$), а в случае $\alpha \approx 0.35$ — в случае бандажа большой толщины ($\theta_e \gg 1$). Таким образом, при использовании для бандажей материалов, магнитный предел прочности которых выше $0.59B_0$, можно создать магнит с малым аспектным отношением ($R_2/R_1 \approx 2$), в котором полоидальный ток не имеет радиальной компоненты и отсутствуют аксиальные силы во внешней зоне магнита. Например, в поле с индукцией $B_0 = 100$ Т значению $\alpha \approx 0.35$ соответствует материал, у которого прочностной предел $\sigma_2 \approx 1.4$ ГПа. При использовании менее прочных материалов аспектное отношение должно быть увеличено. При условии $R_2/R_1 \geq 2$ необходима промежуточная зона, в которой ток, отводимый от торца с

целью поддержания его равновесия, перераспределяется таким образом, чтобы было выполнено условие равнонагруженности бандажей. В этой зоне имеют место неуровновешенные аксиальные силы, поскольку плотность тока имеет не только аксиальную, но и радиальную компоненту.

В системе с несколькими модулями граница области, где необходимо отводить ток для поддержания равновесия торца, смещена в область слабого поля. Это позволяет обеспечить относительно низкие механические напряжения в равнонагруженной зоне даже при небольшом аспектном отношении.

Для примера рассмотрим двухмодульную систему, соответствующую граничному условию для функции тока полоидального поля $\Psi_B(2) = -4\Psi_B(1)$ (рис. 5). Во внешнем модуле можно создать систему равнонагруженных бандажей, подобно тому как это было описано для одномодульной системы. В представленном примере профиль построен с использованием первого из равенств (16) в качестве граничного условия с параметром $\alpha_1 = 2\mu_0\sigma_2/B_\phi^2(r_2) = 0.3$. Система с равнонагруженной областью $r_2 < r < r'_2$ (рис. 5) имеет несколько больший внешний радиус, чем система, в которой полоидальный ток не отводится от торца. В этом примере индукция азимутального поля на границах принимает значения $B_\phi(r_2) = 0.44B_0$, $B_\phi(r'_2) = 0.295B_0$. При этом азимутальное напряжение в бандажах есть $\sigma_\phi = 0.06B_0^2/(2\mu_0)$. При указанном значении параметра α_1 профиль внешнего модуля, построенный методом итераций, характеризуется аспектным отношением $r'_2/r_2 = 1.38$. В данной системе необходим внешний бандаж, подверженный воздействию магнитного давления $B_\phi^2(r'_2)/(2\mu_0)$. В рассмотренном примере оно составляет $0.087B_0^2/(2\mu_0)$. Применение равнонагруженного внешнего модуля позволяет снизить напряжение во внешнем бандаже на 27% по сравнению с системой, в которой равновесие торцов обеспечивается без токоотвода.

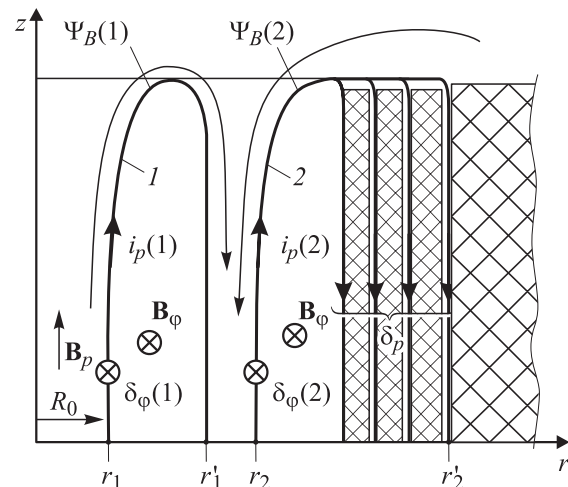


Рис. 5. Двухмодульная система с равнонагруженными слоями во внешнем модуле: 1 — основной модуль, 2 — внешний модуль с системой бандажей.

6. Дискретная структура внешней зоны магнита

Модель с непрерывным токораспределением во внешней зоне магнита является первым приближением к реальной системе дискретных слоев с полоидальным током и цилиндрическими бандажами (рис. 4). Ограничимся далее случаем, когда в такой системе внешняя поверхность каждого бандажа отделена от следующего проводящего слоя тонким зазором. В рамках этой модели можно считать, что в проводящих металлических слоях формируется давление P_n . Оно передается изнутри на каждый из цилиндров, а их внешняя сторона свободна. Как и в предыдущем разделе, примем далее условие, что индукция полоидального поля во внешней зоне магнита пренебрежимо мала, а ток имеет только аксиальную компоненту. Это условие справедливо для одномодульных систем без цилиндрических экранов. Из принятых допущений следует, что во внешней зоне есть только радиальные силы. При этом азимутальные напряжения на внутренних границах диэлектрических цилиндров определяются по известной формуле теории упругости [10]

$$(\sigma_\varphi)_n = P_n \frac{r_{e,n}^2 + r_{i,n}^2}{r_{e,n}^2 - r_{i,n}^2}, \quad (25)$$

где радиальные напряжения равны P_n .

В реальном магните проводящие слои с полоидальным током представляют собой совокупность параллельных проводников, разделенных изоляционными зазорами в азимутальном направлении. Если предположить, что модуль упругости изоляционного материала, заполняющего зазоры, относительно мал, то азимутальные напряжения в проводниках также малы по сравнению с радиальными, которые равны P_n . Последние, в свою очередь, много меньше азимутальных напряжений в тонких диэлектрических цилиндрах.

В формуле (25) n — номер цилиндра, $r_{e,n}$, $r_{i,n}$ — его внешний и внутренний радиусы, P_n — поверхностная сила, определяемая по формуле: $P_n = (B_{i,n}^2 - B_{e,n}^2)/(2\mu_0)$, где $B_{i,n}$ и $B_{e,n}$ — значения азимутальной компоненты индукции с внутренней и наружной сторон n -го проводящего слоя соответственно.

В конфигурации, представленной на рис. 4, при малой толщине проводящих цилиндров $B_{i,n} = \mu_0\Psi_{i,n}/(r_n)$, $B_{e,n} \approx \mu_0\Psi_{i,n+1}/(r_n)$, где r_n — радиус n -го проводящего слоя, $\Psi_{i,n}$ — значение функции тока на внутренней границе n -го проводящего слоя. Как видно из рис. 4, $\Psi_{i,n+1} = \Psi_{i,n} - 2\pi i_n$, где i_n — ток в стенке n -го проводящего цилиндра. Если зазоры между изоляционными цилиндрами и толщина проводящих слоев малы, то $r_n \approx r_{i,n}$; $r_{e,n} \approx r_{i,n+1} \approx r_{n+1}$.

Введем безразмерные функции тока $y_n = \Psi_{i,n}/\Psi_{i,0}$ и безразмерные внутренние радиусы $\rho_n = r_{i,n}/r_1$. Система уравнений для азимутальных напряжений в бандажных цилиндрах после перехода к безразмерным величинам

принимает вид

$$\frac{\sigma_{\varphi,n} 2\mu_0}{B_\varphi^2(r_1)} = \frac{\theta_n^2 + 1}{\theta_n^2 - 1} (y_n^2 - y_{n+1}^2) \frac{1}{\rho_n^2},$$

$$n = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (26)$$

где $B_\varphi(r_1) = \mu_0 i_1 / (2\pi r_1)$, $\theta_n = r_{e,n} / r_{i,n}$. В равнонагруженной системе тонких бандажей $\sigma_{\varphi,n} \approx \sigma_2$, и левые части этих уравнений принимают одинаковые значения $g = 2\mu_0 \sigma_2 / B_\varphi^2(r_1)$. Дополнительным условием является соотношение

$$\rho_n = \theta_{n-1} \rho_{n-1}, \quad (27)$$

справедливое при малых зазорах, когда, как было отмечено $r_{e,n-1} \approx r_{i,n}$. Их формулы (27) вытекают выражение, справедливое при условии $n \geq 1$:

$$\rho_n = \prod_1^n \theta_{k-1}.$$

При этом $\theta_0 = 1$. Таким образом, при плотной компоновке равнонагруженных элементов магнитной системы приходим к системе уравнений, связывающей безразмерные токи с геометрическими параметрами θ_n .

$$g = \frac{\theta_n^2 + 1}{\theta_n^2 - 1} (y_n^2 - y_{n+1}^2) \left(\prod_1^n \theta_{k-1}^2 \right)^{-1},$$

$$n = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (28)$$

где N — число слоев, $y_1 = 1$. На последний токовый слой магнитное давление действует только изнутри, и для него уравнение равновесия принимает вид

$$g = \frac{\theta_N^2 + 1}{\theta_N^2 - 1} y_N^2 \left(\prod_1^N \theta_{k-1}^2 \right)^{-1}. \quad (29)$$

Система уравнений (28), (29) позволяет найти токи при заданных значениях толщины бандажей, либо расчитать их при заданных токах.

В равнонагруженной системе ($g = \text{const}$) имеет место рекуррентное соотношение для параметров θ_n , ($n = 1, 2, \dots, N - 1$), вытекающее из формулы (28):

$$\theta_n^2 = \frac{g \prod_1^n \theta_{k-1}^2 + (y_n^2 - y_{n+1}^2)}{g \prod_1^n \theta_{k-1}^2 - (y_n^2 - y_{n+1}^2)}$$

$$= \frac{g \left(\frac{r_n}{r_1}\right)^2 + (y_n^2 - y_{n+1}^2)}{g \left(\frac{r_n}{r_1}\right)^2 - (y_n^2 - y_{n+1}^2)}, \quad (30)$$

где $\theta_0 = 1$, $y_1 = 1$. В формуле для параметра θ_N следует принять $y_{N+1} = 0$.

Эта зависимость позволяет найти значения толщины бандажей и координаты токовых слоев при заданных токах.

7. Магнит с многослойной обмоткой

Метод итераций позволяет построить безэкранный систему дискретных равновесных слоев нулевой толщины, являющуюся моделью реального многослойного квазибессилового магнита. В качестве примера такое построение выполнено для трехслойного магнита с аспектным отношением $R_2/R_1 \approx 1.7$ (рис. 6). При этом аспектном отношении слои торцевой зоны магнита обрываются в точках t_n и далее переходят в цилиндрические слои, где ток направлен параллельно оси z . Иначе говоря, здесь реализуется система без аксиальных сил, описанная выше. Азимутальный ток в цилиндрических проводниках отсутствует, и функция потока полоидального поля Ψ_B не постоянная на их поверхностях. Силовые линии на периферии обмотки могут пересекать линии полоидального тока, что приводит к появлению азимутальных сил. Однако азимутальные силы в этой области малы, поскольку полоидальное поле резко ослабляется за пределами торцевых участков.

Представленная конфигурация слоев нулевой толщины дает исходные данные для последующей стадии расчета, в ходе которой токовые слои заменяются слоями конечной толщины с распределенным в них током. Между цилиндрическими слоями и снаружи магнитной системы размещены диэлектрические цилиндры (бандажи), воспринимающие радиальные силы. Метод конечных элементов позволяет далее не только рассчитать поле и электромагнитные силы, но и найти механические напряжения в слоях обмотки. Описание технологии этих расчетов выходит за рамки данной статьи. Ограничимся примером для описанной системы с малым аспектным отношением.

На рис. 7 представлены фрагмент обмотки со слоями конечной толщины и картина поля, рассчитанного методом конечных элементов в приближении аксиальной симметрии. Напряжения в бандажах близки между

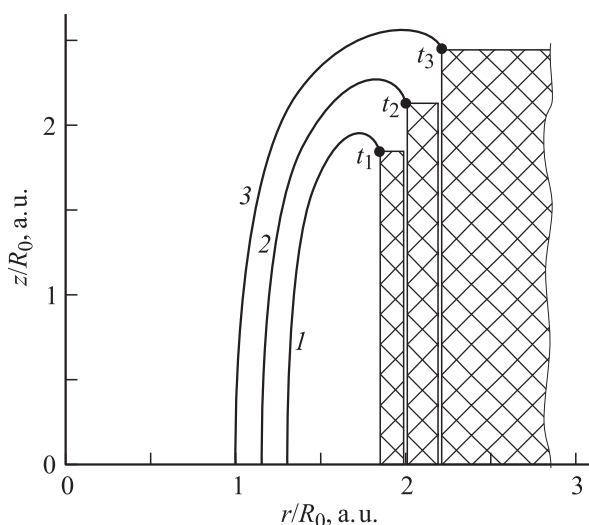


Рис. 6. Система трех уравновешенных слоев малой толщины. 1, 2, 3 — слои обмотки, точки t_1, t_2, t_3 — границы уравновешенных слоев.

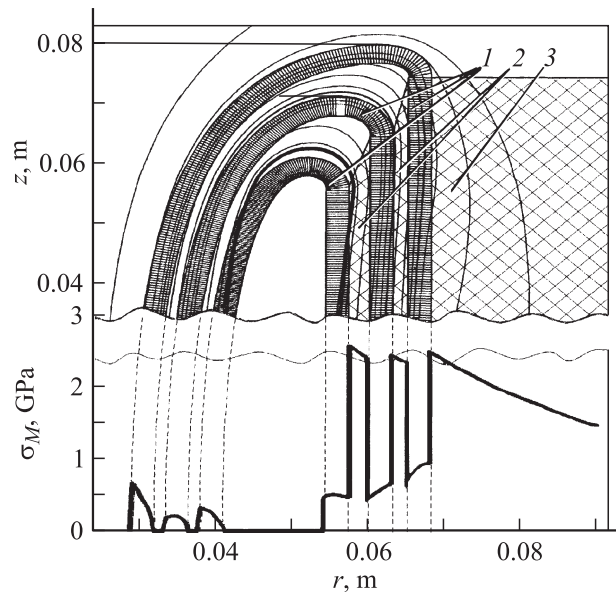


Рис. 7. Система трех уравновешенных слоев конечной толщины и гистограмма, показывающая распределение эквивалентных напряжений в средней плоскости квазибессилового обмотки и в бандажах: 1 — слои обмотки, 2 — промежуточные бандажи, 3 — внешний бандаж.

собой. В рассмотренной трехслойной системе в поле с индукцией 100 Т напряжения в бандажах (до 2 GPa) не превосходят допустимых для современных прочных диэлектрических материалов, а напряжения в основной части трехслойной обмотки близки к допустимым для проводников, используемых в технологии сверхсильных полей.

В двухмодульной системе также можно методом итераций построить дискретный набор слоев. На основании расчетов, описанных в разд. 5, возможно ожидать, что в этой более сложной магнитной системе усиления, воздействующие в поле с индукцией 100 Т на наиболее нагруженный элемент магнитной системы — внешний бандаж, — будут снижены до значений, близких к 400 МПа.

Заключение

Разработанная методика построения слоев тока, подчиненных условиям равновесия, позволила построить ряд конфигураций, которые могут рассматриваться как прототипы магнитов с квазибессилового обмоткой. Существенно расширен класс магнитных систем, в которых квазибессилового обмотка дополнена диамагнитными экранами, показана возможность создания безэкранных конфигураций путем построения фигуры равновесия со свободной границей и путем отвода полоидального тока во внешнюю зону магнита. Остаточные напряжения в квазибессилового обмотке могут быть снижены до приемлемого уровня при переходе к реальной многослойной системе: эти напряжения являются величинами

порядка $B_0^2/(2\mu_0 N^2)$, где B_0 — индукция поля в центре магнита, N — число слоев обмотки. Поэтому наиболее напряженной частью магнитной системы являются бандажи внешней зоны, где распределен полоидальный ток. В этой зоне остаточные азимутальные напряжения в равнонагруженных бандажах имеют порядок величины $B_0^2/(\mu_0 A^2)$, если $A \gg 1$. При сравнительно небольших аспектных отношениях ($A < 2$) удается так построить конфигурацию торцевого участка магнита, что радиальное распределение тока, отводимого от этого участка, одновременно обеспечивает условие равнонагруженности бандажей внешней зоны. В таком магните отсутствуют аксиальные силы, а напряжения в бандажах в несколько раз ниже магнитного давления поля в центре. Дальнейшее снижение этих напряжений возможно при переходе к магнитным системам, состоящим из коаксиальных модулей.

В приведенном примере модель трех тонких слоев использована в качестве исходной конфигурации при построении магнитной системы с проводниками конечной толщины. Результаты расчета методом конечных элементов показали, что поле и напряжения в магните близки к рассчитанным в рамках указанной модели. Таким образом, аксиально-симметричные конфигурации токовых слоев нулевой толщины, рассмотренные в статье, позволяют получить оценочные значения остаточных напряжений. Вместе с тем они дают исходные данные для построения более точных расчетных моделей, учитывающих конечную толщину проводников, и для разработки конструкций реальных квазибессилового магнитов с мегагауссным полем.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 07-08-00507 и гранта президента РФ МК-8531.2006.8.

Список литературы

- [1] Шнеерсон Г.А., Колтунов О.С., Хозиков В.Ю. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 1. С. 110–116.
- [2] Shneerson G.A., Borovkov A.I., Koltunov O.S., Mikhailyuk D.S., Titkov V.V. // 9th Int. Megagauss Conf. / Ed. by V.D. Selemet, L.N. Plyashkevich. Sarov, 2004. P. 602–615.
- [3] Shneerson G.A., Koltunov O.S. et al. // Physica. B. 2004. Vol. 346–347. P. 566–570.
- [4] Hand G.L., Levine M.A. // Phys. Rev. 1962. Vol. 127. N 6. P. 1856–1857.
- [5] Felici N.J. // Revue general de l'electr. 1950. Vol. 59. N 11. P. 479–501.
- [6] Новгородцев А.Б., Фатхиев А.Р. // Изв. вузов. Энергетика. 1982. № 2. С. 17–21.
- [7] Вабищевич П.Ч. Численные методы решения задач со свободной границей. М.: Изд-во МГУ, 1987. 183 с.
- [8] Шишигин С.Л. Электричество. 2008 (принято к печати).
- [9] Дашук П.Н., Зайенц С.Л., Комельков В.С. и др. Техника больших импульсных токов и магнитных полей. М.: Атомиздат, 1970. 233 с.
- [10] Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. М.: Высш. шк., 1990. 400 с.
- [11] Шнеерсон Г.А. // ЖТФ. 1986. Т. 56. Вып. 1. С. 36–43.
- [12] Amromin E.L., Khosikov V.Yu., Shneerson G.A. // Plasma Devices and Operations. 1998. Vol. 4. P. 321–327.