

Конфигурации аксиально-симметричных квазибессилового магнитных систем. I

© Г.А. Шнеерсон

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: integr@delfa.net

(Поступило в Редакцию 19 ноября 2007 г.)

Сформулированы общие требования, которым должна удовлетворять бессиловая магнитная система, являющаяся аналогом квазибессилового магнита. Отмечены преимущества системы, в которой бессиловая обмотка дополнена внешней зоной, где азимутальный ток отсутствует и размещены бандажи, воспринимающие остаточные усилия. Приведены примеры выбора бессилового токораспределения в плоском слое и тонкой обмотке. Рассмотрены конфигурации без дополнительных внешних тел (экранов). Показано, что в полученных решениях с высокой точностью обеспечены условия непрерывности функции потока и ее нормальной производной благодаря отводу тока во внешнюю зону.

PACS: 85.70.Ay, 07.55.-w

Введение

Исследованию бессиловых магнитных систем посвящено большое количество публикаций. Первая группа — это теоретические работы общего характера, включая начальные публикации и последующие работы, относящиеся к проблемам астрофизики, сверхпроводимости, физики плазмы [1–13]. Ряд работ посвящен исследованию тороидальных магнитных систем, включая магнитные системы индуктивных накопителей энергии, а также сцеллараторов, в обмотках которых электромагнитные силы были резко снижены благодаря тому, что токораспределение в определенной мере аппроксимировало бессиловое. Примерами таких работ являются публикации [4,7,14–21]. Большой интерес представляют бессиловые системы для задачи получения сверхсильных магнитных полей [4,14]. Реальный магнит, предназначенный для работы в таких полях, должен содержать обмотку, которая состоит из нескольких уравновешенных токовых слоев и является дискретным аналогом бессиловой. Простейшая однослойная система такого рода была рассмотрена в работе [22]. В [23] рассмотрена многослойная квазибессиловая обмотка с токами, изменяющими свое направление в каждом слое, а в работах [24–27] — предложен способ формирования системы уравновешенных токовых слоев и показано, что механические напряжения в них могут быть снижены до значений порядка $B_0^2/(2\mu_0 N^2)$, где B_0 — индукция на оси магнита, N — число слоев, μ_0 — магнитная проницаемость. Особенностью реального магнита является наличие внешней зоны, где должен замыкаться полоидальный ток, и торцевых частей, которые должны быть уравновешены так же, как и основная часть обмотки. В работе [28] предложен способ формирования такого распределения тока вне обмотки, при котором остаточные напряжения одинаковы во всех бандажных цилиндрах, а магнитная система имеет приемлемые

радиальные размеры даже в поле мегагауссного диапазона. Возможность реализации такой конструкции подтверждена компьютерным моделированием [26,27]. Что касается равновесия торцевой части магнита, то оно может быть обеспечено с помощью диамагнитных экранов [26,27,29–31], и вместе с тем возможен другой подход, когда равенство магнитных давлений по обе стороны обмотки обеспечивается путем отвода полоидального тока из торцевой зоны [24].

В настоящей статье рассматриваются способы формирования конфигураций магнитов, предназначенных для получения сверхсильных полей. В первой части в рамках модели строго бессилового поля будет рассмотрена задача выбора формы магнита таким образом, чтобы на границах обмотки выполнялось условие непрерывности как нормальной, так и касательной компоненты индукции. На примерах, допускающих аналитическое решение, будут показаны качественные особенности токораспределения в бессиловой обмотке малой толщины и продемонстрирована возможность создания равновесной конфигурации благодаря токоотводу.

Во второй части статьи в приближении аксиальной симметрии будут рассмотрены квазибессиловые магнитные системы, состоящие из уравновешенных токовых слоев нулевой толщины. Это приближение будет использовано в качестве модели магнита с тонкой обмоткой и для моделирования отдельных слоев многослойной обмотки. Такое упрощение позволит рассмотреть целый класс возможных конфигураций, построить прототипы обмоток, в которых используются не только уравновешенные токовые слои, но и создается внешняя зона, где поле не является квазибессиловым, а имеется система равнонагруженных цилиндрических бандажей.

1. Бессилловая конфигурация, аналогом которой является обмотка квазибессиллового магнита

Аксиально-симметричные квазибессилловые магнитные системы, описанные в работах [24–28], состоят из областей $T_{0,1,2}$ и T' (рис. 1). Первая из них — приосевая рабочая зона T_0 и примыкающая к ней внешняя область поля. Эта область находится вне обмотки, но в ней в общем случае могут быть размещены тела с азимутальным током, например, диамагнитные тела (экраны) с индуцированным током. В области T_1 располагается квазибессилловая обмотка, состоящая из N токовых слоев. Здесь ток и индукция магнитного поля имеют как азимутальную B_ϕ , так и полоидальную B_p компоненту, при этом линейная плотность тока в каждом слое может быть выбрана так, что все слои находятся в состоянии равновесия. Аналогом такой обмотки может быть рассматриваемая в данной статье строго бессилловая магнитная система. В упомянутых работах исследованы магнитные системы, в которых в области T_2 (внешняя область магнита) распределен лишь полоидальный ток.

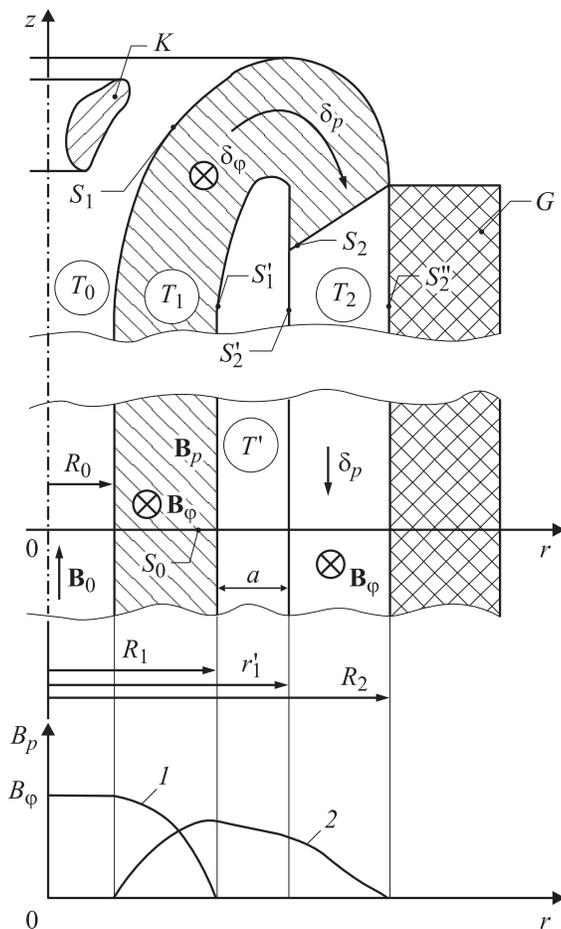


Рис. 1. Бессилловая магнитная система с внешней областью T_2 , где отсутствует азимутальный ток и размещены равномерно нагруженные бандажи; G — внешний бандаж, K — контур со сторонним током; 1 — $B_p(r)$, 2 — $B_\phi(r)$.

Поле в этой области не является бессилловым. Индукция в области T_2 может иметь как азимутальную, так и полоидальную компоненту. Последняя весьма мала, если азимутальный ток в области T_2 отсутствует. Радиальные механические силы в области T_2 воспринимаются системой равномерно нагруженных диэлектрических цилиндров (бандажей) [26–28]. В общем случае между внутренней и внешней областями может существовать промежуточная область T' , в которой нет проводников с током. В областях T_2 и T' , как и в области T_0 , могут находиться контуры со сторонним или индуцированным азимутальным током. Некоторый интерес могут представлять конфигурации, в которых область T' отсутствует ($a = 0$, рис. 1).

В области T_1 магнитное поле удовлетворяет уравнениям Максвелла и дополнительному условию отсутствия электромагнитных сил

$$\mathbf{f} = [\boldsymbol{\delta}, \mathbf{B}] = 0, \quad (1)$$

где $\boldsymbol{\delta}$ — плотность тока. Это уравнение имеет своим следствием равенство

$$\boldsymbol{\delta} = \lambda \mathbf{H}, \quad (2)$$

где λ — скалярная функция, принимающая постоянное значение на каждой силовой линии магнитного поля [1,2].

В аксиально-симметричном поле удобно ввести две характерные величины — функцию тока $\psi_i = i/(2\pi)$ и функцию потока полоидального поля $\psi_B = rA_\phi$, где A_ϕ — азимутальная компонента векторного потенциала. Компоненты плотности тока и напряженности выражаются через функции ψ_i и ψ_B :

$$\left. \begin{aligned} H_\phi &= \frac{1}{\lambda} \delta_\phi = \frac{\psi_i}{r}, \\ H_z &= \frac{1}{\lambda} \delta_z = \frac{1}{\mu_0 r} \frac{\partial \psi_B}{\partial r} = \frac{1}{\lambda r} \frac{\partial \psi_i}{\partial r}, \\ H_r &= \frac{1}{\lambda} \delta_r = -\frac{1}{\mu_0 r} \frac{\partial \psi_B}{\partial z} = -\frac{1}{\lambda r} \frac{\partial \psi_i}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

В области T_1 обе функции принимают постоянные значения на одних и тех же поверхностях и связаны соотношением

$$\frac{\mu_0}{\lambda} \nabla \psi_i = \nabla \psi_B. \quad (4)$$

Из уравнения Максвелла $\text{rot}_\phi \mathbf{H} = \boldsymbol{\delta}_\phi$ вытекает следующее уравнение, справедливое в области бессиллового поля T_1 :

$$\frac{\partial^2 \psi_B}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_B}{\partial r} \right) + \mu_0 r \delta_\phi = 0. \quad (5)$$

Ему эквивалентно уравнение для функции ψ_i :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \right) + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\lambda r} \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \right) + \lambda \psi_i = 0, \quad (6)$$

где $\lambda = f(\psi_i)$. Уравнение (6) получено в работе [7] и использовалось для исследования тороидальных конфигураций.

В областях T_0 , T_2 и T' вне размещенных там контуров с наведенными или сторонними азимутальными токами функция ψ_B удовлетворяет уравнению (5), где член $\mu_0 r \delta_\varphi$ отсутствует

$$\frac{\partial^2 \psi_B}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_B}{\partial r} \right) = 0. \quad (7)$$

Функции ψ_i и ψ_B должны удовлетворять определенным условиям на границах S_0 , S_1 , S'_1 , S_2 , S'_2 и S''_2 . Граница S_0 является плоскостью симметрии (рис. 1). На этой границе выполнено условие отсутствия радиальной составляющей индукции ($B_r = 0$) или $\partial \psi_B / \partial z = 0$.

На границах S_1 , S_2 , S'_1 должно быть выполнено условие непрерывности функций ψ_i и ψ_B . Нормальные производные этих функций также не должны иметь скачка на этих границах, если на них отсутствует поверхностный ток.

Линия S_1 является образующей внутренней поверхности соленоида. На этой границе отсутствует нормальная компонента полоидальной плотности тока. Следовательно, нормальная компонента индукции полоидального поля здесь также равна нулю, и функция потока полоидального поля принимает постоянное значение: $\psi_B(S_1) = \psi_0$. При этом функция тока $\psi_i(S_1) = 0$.

Таким образом, решение уравнения (6), описывающего бессиловое поле в области T_1 , должно удовлетворять двум граничным условиям на S_1 : $\psi_i(S_1) = 0$ и $(\partial \psi_i / \partial n)|_{S_1} = r \lambda B_\tau(S_1) / \mu_0$, где $B_\tau(S_1)$ — касательная составляющая индукции „вакуумного“ магнитного поля на границе [3].

Решение уравнения (6) определяется выбором зависимости $\lambda(\psi_i)$. Будем исходить из предположения, что рассматриваемые конфигурации являются концевыми частями магнита большой длины ($l \gg 2R_0$). Вблизи средней плоскости такого магнита индукция B_0 в приосевой области T_0 практически не зависит от z : $B_z = B_0$, если $0 < r < R_0$. При этом в области T_1 ($R_0 < r < R_1$) $f_r = 0$. Отсюда следует уравнение, связывающее B_z и B_φ [5]

$$\frac{\partial B_z}{\partial r} B_z + \frac{B_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) = 0. \quad (8)$$

Задавая распределением по радиусу одной из компонент индукции в уравнении (8), можно найти другую [5], а также рассчитать функции ψ_i , ψ_B и $\lambda(\psi_i)$. Например, в случае, когда азимутальная компонента плотности тока постоянна в обмотке с внутренним радиусом R_0 и внешним R_1 , имеем

$$B_z = B_0(R_1 - r) / (R_1 - R_0). \quad (9)$$

Решив уравнение (8), находим:

$$\psi_i = r H_\varphi = \frac{B_0}{\sqrt{6} \mu_0 (R_1 - R_0)} \sqrt{4R_1(r^3 - R_1^3) - 3(r^4 - R_1^4)}. \quad (10)$$

В этом случае $\lambda = r B_0 / [\mu_0 \psi_i (R_1 - R_0)]$, где зависимость $r(\psi_i)$ найдена из (10).

В частном случае, когда $\lambda = \text{const}$, выполняется соотношение $\psi_i = \lambda(\psi_B - \psi_0)$, где ψ_0 — значение функции потока на внутренней границе S_1 . В этом случае основное уравнение (6) переходит в линейное однородное уравнение Гельмгольца. Вдали от торцов ($z \ll l/2$) имеет место известное решение этого уравнения, не зависящее от координаты z [1]:

$$B_z = B_0 \frac{J_0(\lambda_k^{(1)} \frac{r}{R_0})}{J_0(\lambda_k^{(1)})}, \quad B_\varphi = B_0 \frac{J_1(\lambda_k^{(1)} \frac{r}{R_0})}{J_0(\lambda_k^{(1)})}. \quad (11)$$

В области $R_0 < r < R_1 = \lambda_m^{(0)} R_0 / \lambda_k^{(1)}$ оно описывает бессиловое поле, в котором индукция $B_z = B_0$ при $0 < r < R_0$ и $B_z = 0$ при $r = R_1$. При этом $B_\varphi = 0$ при $0 < r < R_0$ и $B_\varphi = B_0 J_1(\lambda_k^{(1)} R_1 / R_0) / J_0(\lambda_k^{(1)})$ на границе $r = R_1$. В приведенных формулах $\lambda_k^{(1)}$, $\lambda_m^{(0)}$ — соответственно, k -й или m -й корни функций Бесселя $J_1(x)$ и $J_0(x)$, при этом $m > k$. Параметр λ принимает значения $\lambda_k^{(1)} / R_0$. При произвольных k и m плотность тока δ_φ является знакопеременной в слое $R_0 < r < R_1$ и лишь при условии $m - k = 1$ направление тока в толще обмотки не изменяется. Примером может быть магнит с внутренним радиусом R_0 и внешним $R_1 = (\lambda_2^{(0)} / \lambda_1^{(1)}) R_0 = 1.44 R_0$. При этом $\lambda = 3.83 / R_0$, толщина обмотки $R_1 - R_0 = 0.44 R_0$, $B_\varphi(R_1) = 0.85 B_0$.

В предельном случае тонкостенного цилиндра ($R_1 - R_0 = d \ll R_0$) уравнение (8) переходит в условие постоянства магнитного давления в тонком слое $0 < x_0 < d$

$$B_z^2 + B_\varphi^2 = B_0^2. \quad (12)$$

Примером может быть распределение индукции вида $B_z = B_0 \cos[\beta(x_0)]$; $B_\varphi = B_0 \sin[\beta(x_0)]$, где $\beta(0) = 0$, $\beta(x_0) = 1$, $x_0 = r - R_0$. В этом примере $\lambda = d\beta/dx_0$.

В случае $\lambda = \pi / (2d) = \text{const}$ приходим к случаю, когда не только модуль индукции, но и модуль плотности тока постоянны в слое $0 < x_0 < d$

$$B_z = B_0 \cos \lambda x_0, \quad B_\varphi = B_0 \sin \lambda x_0,$$

$$\delta_z = (\lambda B_0 / \mu_0) \cos \lambda x_0, \quad \delta_\varphi = (\lambda B_0 / \mu_0) \sin \lambda x_0. \quad (13)$$

Этот же результат можно получить из формул (11) при условии $m > k \gg 1$, заменив функции Бесселя их асимптотическими выражениями.

Согласно теореме вириала [6,11], бессиловое поле в ограниченной области T_1 может существовать только в присутствии внешних проводников с током, подверженных воздействию электромагнитных сил. Минимизация этих сил и рациональное распределение усилий, действующих на внешние проводники, является частью задачи по созданию магнитных систем, близких к бессильным. На примерах систем, показанных на рис. 1 и 2, рассмотрим, как формируются эти силы вдали от торцевых частей (в области, где индукция не зависит от координаты z).

В системе, представленной на рис. 1, область бессилового поля T_1 граничит с полоидальным полем с

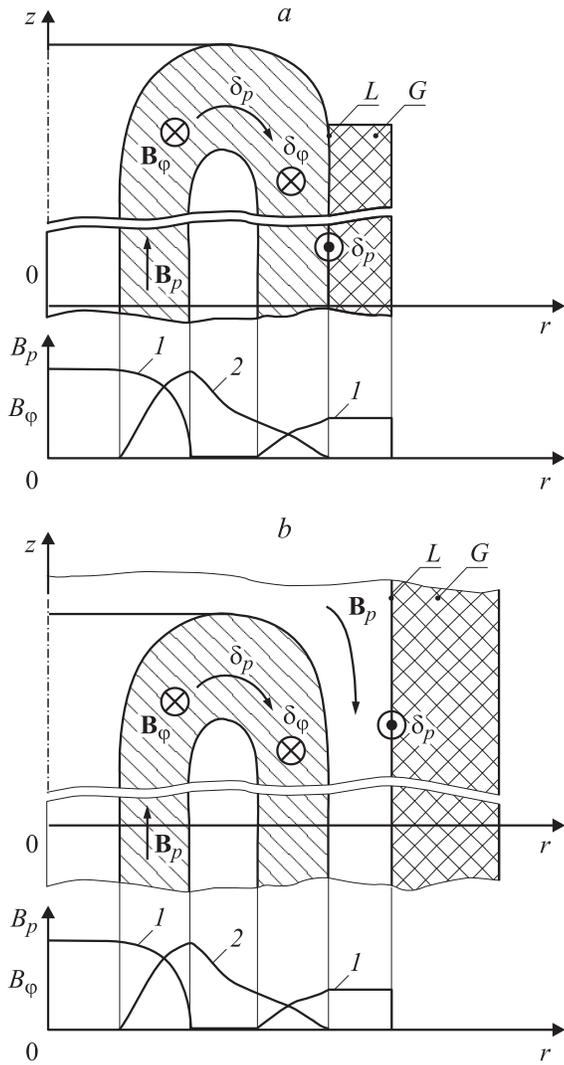


Рис. 2. Бессиловая магнитная система без внешней области T_2 : *a* — система, в которой магнитное давление формируется в слое L на краю бессиловой зоны и воспринимается внешним бандажом G . *b* — система, в которой на краю бессиловой обмотки отсутствует поверхностный ток благодаря применению замкнутого диамагнитного экрана L , воспринимающего нагрузку [30,31]; 1 — $B_p(r)$, 2 — $B_\phi(r)$.

внутренней стороны ($r = R_0$) и с азимутальным полем — с внешней стороны ($r = R_1$). На этих границах магнитное давление не имеет скачка. В области T_2 индукция полоидального поля пренебрежимо мала. Здесь электромагнитная сила воздействует на проводники с полоидальным током и воспринимается системой бандажей, размещенных в области T_2 , а также внешним бандажом.

Иная ситуация имеет место в системе, представленной на рис. 2, *a*. В ней бессиловое поле занимает всю обмотку, и отсутствует область T_2 с полоидальным током, где радиальные силы воспринимаются бандажами. Магнитное давление изменяется непрерывно вплоть до внешней границы ($r = R_2$). Например, в случае тонкого слоя магнитное давление постоянно в промежутке

$R_0 < r < R_2$. Индукция полоидального поля нарастает в промежутке $r' < r < R_2$ при приближении к внешней границе. При переходе через границу указанная индукция и магнитное давление скачком обрываются до нуля. Это означает, что на внешней границе бессиловой области T_1 существует поверхностный ток. В реальной магнитной системе этого типа на внешней части границы S_1 должен находиться цилиндр S_1'' с азимутальным током. На поверхность этого цилиндра действует магнитное давление $B^2(R_2)/(2\mu_0)$, воспринимаемое внешним бандажом. Скачка индукции полоидального поля на внешней границе можно избежать, если расположить снаружи соосный диамагнитный экран L (рис. 2, *b*). В этом случае электромагнитные силы воздействуют на экран, поскольку скачок индукции имеет место не на краю обмотки, а на поверхности экрана [7,20,31].

Из сравнения двух рассмотренных конфигураций (рис. 1 и 2) видно, что первая из них имеет преимущество с точки зрения обеспечения прочности магнитной системы, поскольку в ней нагрузка воспринимается как бандажами, размещенными в области T_2 , так и внешним бандажом. В отличие от этого в конфигурациях, представленных на рис. 2, нагрузка передается только на внешний бандаж, расположенный за токовым слоем, или на внешний экран.

2. Расчет бессилового магнита как пример некорректной задачи математической физики

Для того чтобы система (рис. 1) без поверхностных токов была реализована, необходимо, чтобы не только вдали от торцевых частей, но и на всех границах были выполнены условия непрерывности функций ψ_i и ψ_B и их нормальных производных.

Ограничимся далее случаем, когда $\lambda = \text{const}$ (линейная задача). При этом условии уравнение (6) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \psi_B}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_B}{\partial r} \right) + \lambda^2 \psi_B = 0. \quad (14)$$

В уравнении (14) параметр λ отличен от нуля лишь в области T_1 . В этой области функция тока ψ_i при условии $\lambda = \text{const}$ может быть представлена в виде $\psi_i = (\lambda/\mu_0)\psi'_B$, где $\psi' = \psi_B - \psi_0$. На границе S_1' функция ψ_i принимает постоянное значение $\psi_i = \psi_{i,0} = i/(2\pi)$, где i — полный полоидальный ток в обмотке. В области T' это значение функции тока остается неизменным. В области T_2 азимутальное поле может быть сформировано путем такого выбора распределения полоидального тока, при котором выполняется условие непрерывности ψ_i на границе S_1 . В общем случае в области T_2 существует как полоидальная компонента объемной электромагнитной силы $\mathbf{f}_p = [\delta_\phi, \mathbf{B}_p]$, так и азимутальная сила $\mathbf{f}_\phi = [\delta_p, \mathbf{B}_p]$. Последняя может быть сделана равной нулю при таком выборе токораспределения, когда выполнено условие $\delta_p \parallel \mathbf{B}_p$.

На границе S_1 имеем $\psi'_B = 0$, а на границе S'_1 эта функция примет постоянное значение $\psi'_B = \mu_0 i / (2\pi\lambda)$. При этих условиях и при заданном условии на границе S_0 решение уравнения (14) во всей расчетной области $T_0 + T_1 + T' + T_2$ должно удовлетворять еще условию непрерывности нормальной производной функции ψ'_B . На границе S_2 , где обрывается азимутальный ток, условие непрерывности функции выполняется автоматически. В отличие от этого на границах S_1 и S'_1 , где функция ψ'_B задана, а не определяется в ходе расчета, второе граничное условие не выполняется. Ситуация в данном случае типична для некорректных задач математической физики: невозможно на границе произвольного вида выполнять сразу два граничных условия, подобно тому как в задачах электростатики нельзя задать на границе одновременно потенциал и его нормальную производную [3,9].

Добиться выполнения двух граничных условий на S_1 и S'_1 можно следующими способами, применяя их совместно или по отдельности: путем вариации формы границ S_1 , S'_1 , границы S_2 и путем размещения в областях T_0 и T_2 диамагнитных тел или контуров с током [7,16,27,30,31].

Пример подобного построения показан на рис. 3, где представлен фрагмент плоского бессилового поля. В этом примере границы S_1 и S_2 фиксированы, участок S'_1 отсутствует. На участке границы S_0 распределение индукции задано в виде следующей зависимости от координаты x : $B_y = B_0 \cos[\lambda(x - x(a))]$, при этом $\lambda = (\pi/2d)$, где $d = x(b) - x(a)$. В области T_2 размещены диамагнитные тела. Задавая на них значения ψ'_B , можно путем серии пробных расчетов добиться приближенного совпадения нормальных производных $\partial\psi'_B/\partial n$ на обеих сторонах границы S_1 в фиксированных точках. В рассмотренном примере линии полоидального поля в области T_1 одновременно являются линиями полоидального тока. Этот ток отводится из области бессилового поля, т.е. из области обмотки, во внешнюю область T_2 .

Представляет интерес и несколько иная постановка задачи, открывающая дополнительные возможности построения бессилового поля: можно рассматривать S_2 (рис. 1) как границу с заданным распределением функции потока полоидального поля. В этом случае расчетная область для функции ψ'_B распадается на две: T_1 и $T_0 + T' + T_2$. Непрерывность нормальной производной $\partial\psi'_B/\partial n$ на границах S_1 и S_2 в этом случае может быть достигнута не только упомянутыми способами, но и путем вариации распределения ψ'_B на границе S_2 . При этом одновременно варьируется распределение функции тока, т.е. формируется распределение полоидального тока на указанной границе путем целенаправленного отвода тока из области T_1 в область T_2 через границу S_2 . Токоотвод удобно использовать при построении обмоток малой толщины.

Вопросу о выборе конфигурации бессиловых обмоток, удовлетворяющих условиям непрерывности как функции

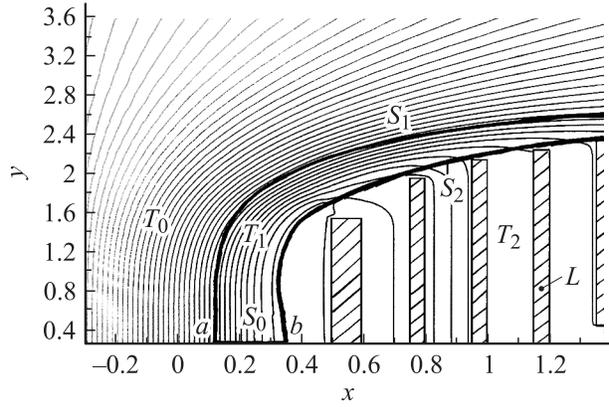


Рис. 3. Фрагмент плоского бессилового поля у края магнитной системы. На рисунке показаны линии полоидального поля. В области T_2 размещены диамагнитные тела L .

потока полоидального поля, так и ее нормальной производной, не уделялось должного внимания в литературе. Например, в работах [14,16] рассчитаны тороидальные системы, на границах которых нарушено условие непрерывности $\partial\psi'_B/\partial n$, т.е. в таких системах имеет место поверхностный азимутальный ток.

Далее рассмотрены примеры аналитических расчетов бессилового поля для обмоток малой толщины, в которых оба условия непрерывности на границах выполнены благодаря токоотводу.

3. Особенности токораспределения в торцевой зоне бессилового магнита с малой толщиной обмотки и плоской границей

Рассмотрим сначала магнитную систему, у которой граница S_1 на периферии торцевой части переходит в плоскость.

Простейшим примером является магнитная система, периферийная часть которой представляет собой слой толщиной d , заключенный между плоскими параллельными границами S_1 и S'_1 . Примем, что параллельно S_1 размещен торцевой диамагнитный экран K , отделенный от S_1 зазором постоянной толщины h [26,27,31] (рис. 4).

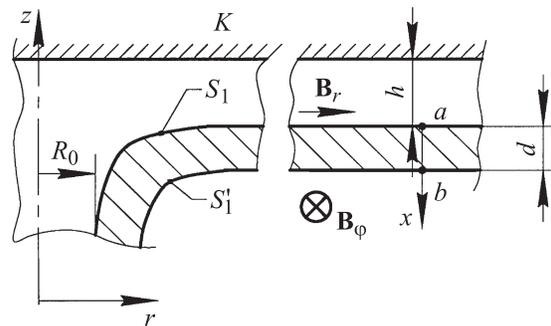


Рис. 4. Магнитная система с плоским торцевым экраном K .

Индукция в этом зазоре изменяется по закону

$$B_r(a) = \frac{\psi_0}{rh}. \quad (15)$$

В реальной магнитной системе с плоским экраном это распределение полоидального поля имеет место, если $r - R_0 \gg h$, где R_0 — внутренний радиус магнита.

При отсутствии токоотвода с границы S'_1 зависимость индукции азимутального поля от радиуса имеет вид

$$B_\varphi(b) = \mu_0 \frac{\psi_i}{r}. \quad (16)$$

Обе функции ψ_0 и ψ_i принимают на указанных границах постоянные значения.

Отметим, что $B_r(b) = 0$, $B_\varphi(a) = 0$. В рассматриваемой системе имеет место не зависящее от координаты r решение системы уравнений (4), (6)

$$\psi_B(x) = \psi_0 \left(\frac{1}{h} \int_0^x f(x) dx + 1 \right), \quad \delta_\varphi = -\frac{\partial H_r}{\partial x} = -\frac{1}{\mu_0 r} \frac{\partial^2 \psi_B}{\partial x^2}, \quad (17)$$

где x — координата, которая отсчитывается по нормали к границе S_1 , $f(x)$ — безразмерная функция, принимающая значение $f(0) = 1$ и $f(d) = 0$. Из этого решения следует: $B_r(x, r) = \psi_0 f(x)/(rh)$. Функции λ и ψ_i можно найти из системы уравнений

$$\lambda \psi_i = r \delta_\varphi = -\frac{\psi_0}{\mu_0 h} \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} = \frac{\partial \psi_B}{\mu_0 \partial x} = \frac{\psi_0}{\mu_0 h} f. \quad (18)$$

Решение этой системы есть

$$\psi_i = \frac{\psi_0}{\mu_0 h} \sqrt{1 - f^2}, \quad \lambda = -\frac{\partial f / \partial x}{\sqrt{1 - f^2}}. \quad (19)$$

Далее находим

$$\begin{aligned} H_\varphi &= \psi_i / r = \psi_0 \sqrt{1 - f^2} / (\mu_0 h r), \\ \delta_\varphi &= \lambda H_\varphi = -\frac{\psi_0}{\mu_0 h r} \frac{\partial f}{\partial x}, \\ B_x &= 0, \quad \delta_x = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

В этой системе, как и в плоском листе с прямыми силовыми линиями, полное магнитное давление остается постоянным по толщине листа: $P_M = (B_r^2 + B_\varphi^2)/(2\mu_0) = \psi_0^2/(2\mu_0 h^2 r^2)$. Хотя силовые линии тороидального поля являются окружностями, радиальная объемная сила равна нулю, так как радиальный градиент магнитного давления компенсируется силой, обусловленной кривизной линий поля.

В случае $\lambda = \text{const}$, как и в ранее приведенных формулах (13), имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(\pi x / (2d)), \quad B_r = B_r(a) \cos(\pi x / (2d)), \\ B_\varphi &= B_r(a) \sin(\pi x / (2d)). \end{aligned} \quad (21)$$

В другом случае, когда азимутальная плотность тока не зависит от координаты x , получаем

$$\lambda = [x(2d - x)]^{-1/2}, \quad \delta_\varphi = \psi_0 / (\mu_0 r h d),$$

$$B_\varphi = [\psi_0 / (r h d)] [x(2d - x)]^{1/2}, \quad B_r = [\psi_0 / (r h d)] (d - x). \quad (22)$$

В рассмотренной конфигурации обе компоненты индукции магнитного поля B_r и B_φ в области T_2 равны нулю.

В случае слоя малой толщины формулы (21), описывающие бессилоное поле в плоском слое с распределением касательной компоненты индукции B_τ вида (15), можно использовать и тогда, когда распределение B_τ описывается другой зависимостью. Для построения бессилового поля, удовлетворяющего условию $\lambda = \text{const}$, можно использовать суперпозицию частных решений уравнения (14). Одним из них является решение вида

$$\psi'_B = \int_0^\infty \sin(\sqrt{\lambda^2 + k^2} x) r K_1(kr) \Phi(k) dk. \quad (23)$$

Функция ψ'_B затухает при $r \rightarrow \infty$ и равна нулю на границе S_1 . Это решение описывает определенный класс конфигураций, различающихся выбором функции $\Phi(k)$. Например, когда $\Phi(k) = k \delta_0(k)$ (δ_0 — дельта-функция), решение соответствует рассмотренному выше примеру, в котором $B_r(a) = \text{const}/r$.

Используя формулы (3), можно найти компоненты индукции и плотности тока при $x > 0$

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi'_B}{\partial x} \\ &= \int_0^\infty \sqrt{\lambda^2 + k^2} \cos(\sqrt{\lambda^2 + k^2} x) K_1(kr) \Phi(k) dk = \frac{\mu_0 \delta_r}{\lambda}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$B_\varphi = \frac{\lambda \psi'_B}{r} = \lambda \int_0^\infty \sin(\sqrt{\lambda^2 + k^2} x) K_1(kr) \Phi(k) dk = \frac{\mu_0 \delta_\varphi}{\lambda}, \quad (25)$$

$$B_x = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\psi'_B) = \int_0^\infty \frac{\sin(\sqrt{\lambda^2 + k^2} x)}{\sqrt{\lambda^2 + k^2}} k K_0(kr) \Phi(k) dk. \quad (26)$$

Далее рассмотрим магнитную систему с плоской границей, не предполагая, что вблизи границы расположен диамагнитный экран (рис. 5). Будем исходить из допущения, что d — толщина области T_1 — постоянна и мала по сравнению с внутренним радиусом магнита R_0 . Из этого условия следует $\lambda = \pi / (2d) \gg 1/R_0$.

Следует учесть, что подынтегральные выражения в формулах (26)–(28) резко убывают при $kr > 1$. Поэтому основной вклад в интегралы соответствует значениям $k \leq 1/r < 1/R_0 \ll \lambda$. Отсюда следует приближенное равенство $\lambda^2 + k^2 \approx \lambda^2$. В результате формулы (24), (25) для B_r и B_φ сохраняют вид (20), но в отличие от

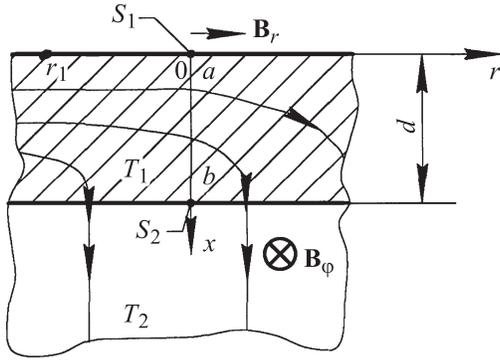


Рис. 5. Линии полоидального тока в плоском слое с токоотводом.

системы с экраном в более общем случае в бессиловом поле появляется нормальная к границе компонента B_x

$$B_x = \frac{\sin(\lambda x)}{\lambda r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r(a)). \quad (27)$$

В точке b на границе S_2 , где $x = d$, имеем

$$B_x(b) = -\frac{1}{\lambda r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r(a)). \quad (28)$$

Плоскость $x = 0$ является границей областей T_0 и T_1 . На этой границе $\psi_i = 0$, и выполнены условия непрерывности как для функции потока ψ_B , так и для индукции B_r . Плоскость $x = d$ может быть выбрана в качестве границы S_2 . При условии $\lambda = \pi/(2d)$ имеем $B_r(b) = 0$. Таким образом, при использованном допущении касательная компонента индукции отсутствует с тыльной стороны области. Нормальная компонента $B_x(b)$ имеет порядок величины $B_r(a)d/r$, поэтому $B_x(b)$ много меньше $B_r(a)$ в области, где $r \gg d$.

Можно найти токораспределение в области бессилового поля T_1 . Рассмотрим участок границы, для которого выполнено условие $r > r_1$, где r_1 — некоторое значение радиуса ($r_1 \gg d$). В точках с координатой $r = r_1$ распределение потока полоидального поля в области T_1 есть $\psi'_B(x_1, r_1) = \mu_0 \psi_i(r_1, d) \sin(\lambda x_1)/\lambda$. При больших значениях радиуса линии $\psi'_B = \text{const}$ (силовые линии полоидального магнитного поля) и линии тока описываются уравнением

$$\psi_i(r_1, d) \sin(\lambda x_1) = \psi_i(r, d) \sin[\lambda x(r)]. \quad (29)$$

У магнита с плоской границей вдали от оси $B_r(a) \approx B_r(r_1)(r_1/r)^2$. В соответствии с формулой (3) $\psi_i(r, d) = r H_\phi(r, d) = H_r(r_1)(r_1^2/r) = \psi_i(r, d)(r_1/r)$. Из уравнения (29) в этом случае следует равенство $\sin(\lambda x_1)/r_1 = \sin[\lambda x(r)]/r$, или

$$x(r) = \frac{1}{\lambda} \arcsin \left(\frac{r}{r_1} \sin(\lambda x_1) \right). \quad (30)$$

Линии тока и напряженности вначале идут почти параллельно верхней границе, а затем круто изгибаются

и пересекают нижнюю границу под прямым углом в точке с координатой $r = r_1/\sin(\lambda x_1)$ (рис. 5). Далее ток замыкается за пределами бессилового поля в области T_2 . В этом случае, как и в ранее рассмотренных примерах, сохраняется равенство $B_r(a) = B_\phi(b)$, где точки a и b лежат на одной нормали к границе.

В реальной магнитной системе полоидальное поле в области T_2 определяется распределением азимутальных токов в области T_1 . Это поле удовлетворяет условию непрерывности функций $\psi'_B(b) = r(b)B_r(a)/\lambda$ и $\partial\psi_B/\partial n$ на границе S_2 . Оно несколько отличается от поля в области T_2 , которое можно построить, используя приведенные выше формулы. Для этого в указанной области следует решить уравнение (7), используя граничное значение $\psi'_B(b)$ на границе S_2 . Однако это решение, вообще говоря, не удовлетворяет условию непрерывности $\partial\psi_B/\partial n$: на границе S_2 условие $B_r = 0$ может быть не выполнено со стороны области T_2 . В этом проявляется некорректность задачи: выполнение одного граничного условия не означает, что выполнено второе. Разрыв производной $\partial\psi_B/\partial n$ на фиксированной границе S_2 означает, что полученное решение не в полной мере отвечает поставленной задаче. Это решение формально соответствует измененным условиям на границе S_2 ; оно описывает случай, когда на этой границе имеет место поверхностный азимутальный ток. Аналогичный эффект отмечен при анализе тороидальных бессиловых конфигураций [14]. Взаимодействие поверхностного тока с полоидальным полем приводит к появлению силы, направленной по нормали к S_2 . Этот недостаток расчетной модели может быть устранен путем вариации границ и благодаря внесению в область T_2 диамагнитных тел, подобно тому как было показано выше в примере предыдущего раздела.

Покажем, что в отличие от тороидального магнита в рассматриваемой системе силы, воздействующие на границу, весьма малы, так как полоидальное поле в области T_2 много слабее, чем в рабочей зоне магнита. Поэтому плоский слой с рассчитанным распределением тока и магнитного поля близок к бессиловой системе, удовлетворяющей условиям непрерывности функции потока и индукции полоидального поля на границе S_2 .

Для оценки упомянутой силы рассмотрим конфигурацию, представленную на рис. 6. Вдали от оси радиальная компонента индукции в области T_0 есть $B_r(a) = 2\psi_0/r^2$. Следовательно, согласно (20), на границе S_2 в точках с координатами $z = \pm l/2$ имеем

$$\psi'_B(b) = (r/\lambda)B_\phi(b) = (r/\lambda)B_r(a) = 2\psi_0/(r\lambda). \quad (31)$$

Радиальную компоненту напряженности $B_r(b)$ находим из уравнения (7):

$$\begin{aligned} B_r(b) &= \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi'_B}{\partial z} \right)_{z=l/2} = -\frac{1}{r} \int_0^{l/2} \frac{\partial^2 \psi'_B}{\partial z^2} dz \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^{l/2} \psi'_B dz \right). \end{aligned} \quad (32)$$

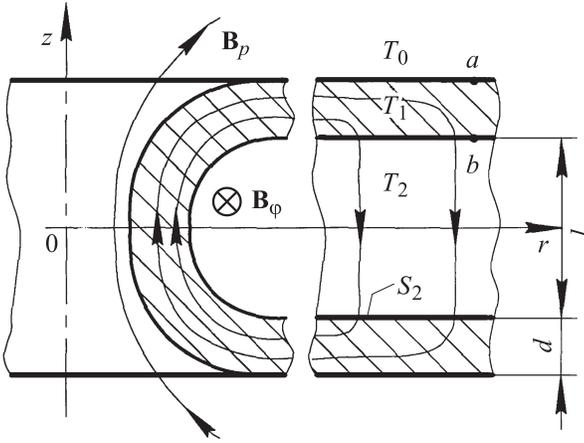


Рис. 6. Бессиловой магнит с плоскими торцами и токоотводом.

Пробные расчеты методом конечных элементов показывают, что в области T_2 на большом расстоянии от оси z функция ψ'_B слабо изменяется вдоль координаты z и приближенно равна своему граничному значению. Используя приближенное равенство

$$\int_0^{l/2} \psi'_B dz \approx \frac{l}{2} \psi'_B(b),$$

получим

$$B_r(b) \approx \frac{3\psi_0 l}{\lambda r^4} = \frac{3l}{2\lambda r^2} B_r(a). \quad (33)$$

В области $r > l/2$ имеет место приближенное выражение для аксиальной компоненты индукции в точке b , вытекающие из формул (28) и (31), $B_x(b) \approx B_r(a)/(\lambda r)$. Отсюда следует оценка $B_r(b)/B_x(b) \approx 3l/(2r)$, иначе говоря, радиальная компонента напряженности вдали от оси убывает быстрее, чем аксиальная.

Мерой погрешности полученного результата может быть магнитное давление на границе T_2 , наличие которого является следствием неточного „сшивания“ решений. Это давление есть

$$P_M = \frac{B_r^2(b)}{2\mu_0} = \frac{9l^2 B_r^2(a)}{9\lambda^2 \mu_0 r^4}. \quad (34)$$

Оно может быть пренебрежимо мало по сравнению с давлением внешнего поля с индукцией $B_r(a)$, так как отличается от него множителем порядка $d^2 l^2 / r^4 \ll 1$. Таким образом, полученное решение для плоского слоя, толщина которого конечна, но мала по сравнению с другими характерными размерами, с малой погрешностью описывает бессиловое поле в области T_1 , которое „сшивается“ с полем в областях T_0 и T_2 .

4. Тонкостенный бессиловой магнит с криволинейной границей

Формулы, описывающие поле в бессиловом плоском слое, могут быть приближенно использованы и в случае, когда слой не является плоским, но его толщина мала

по сравнению с характерными размерами магнитной системы. Эти формулы дают представление о распределении тока в толще обмотки. Что касается конфигурации обмотки, при ее приближенном расчете можно принять толщину d равной нулю. При этом допущении на границе S_1 , которая сливается с S_2 , должно быть выполнено условие $\psi_B = \psi_0 = \text{const}$ и условие равновесия каждого элемента границы

$$B_\tau(a) = B_\phi(b), \quad (35)$$

вытекающие из формулы (12) [30]. Функция тока и нормальная компонента плотности тока на границе равновесного слоя принимают значения

$$\begin{aligned} \psi_i(b) &= r(b)H_\phi(b) = r(b)B_\tau(a)/\mu_0, \\ \delta_n(b) &= -\frac{1}{r(b)} \frac{\partial \psi_i(b)}{\partial \tau} = \lambda B_n(b)/\mu_0. \end{aligned} \quad (36)$$

Отметим, что приведенное выражение для δ_n является обобщением равенства (28) на случай, когда обмотка не является плоским слоем.

На участках ограниченной длины, где выполнено условие $rH_\tau = \text{const}$, можно обеспечить равновесие и без токоотвода путем выбора конфигурации этих участков. Как было показано выше, равновесие помимо токоотвода может быть также обеспечено путем установки экранов. Такого рода тонкостенные конфигурации будут рассмотрены в следующей части статьи. Для широкого класса конфигураций, удовлетворяющих условию $\frac{\partial}{\partial \tau}(rB_\tau(a)) < 0$, равновесие тонкого слоя может быть достигнуто путем отвода тока из области T_1 . При этом нормальная к границе плотность тока определяется по формуле (36), а распределения поля и тока в толще обмотки в окрестности точек a и b приближенно описываются формулами (21) и (27).

В предельном случае $d = 0$ индукция полоидального поля в области T_2 пренебрежимо мала. Это очевидно, поскольку в слое нулевой толщины как поток индукции полоидального поля, так и нормальная к границе компонента индукции в точке b равны нулю. Формально это условие вытекает из равенства (27) $B_n(b) = (d/2\pi)\mu_0\delta_n$, где $d = 0$. В случае слоя конечной толщины приведенное равенство является граничным условием для расчета полоидального поля в области T_2 , где ψ_B удовлетворяет уравнению (7). Заметим, что в том случае, когда область T_2 является средой с однородной проводимостью, распределение полоидального тока также описывается уравнением (7). Его решение с граничным условием (36) описывает токовое поле, в котором выполняется условие $\mathbf{V} = \mu_0(\delta_p/\lambda)$. В таком поле отсутствуют азимутальные объемные силы.

Приведем далее пример, иллюстрирующий как возможность построения равновесной тонкостенной обмотки путем отвода тока, так и возможность создания токораспределения в области T_2 , в котором сохраняется параллельность векторов полоидальной плотности тока и напряженности магнитного поля. Функция потока

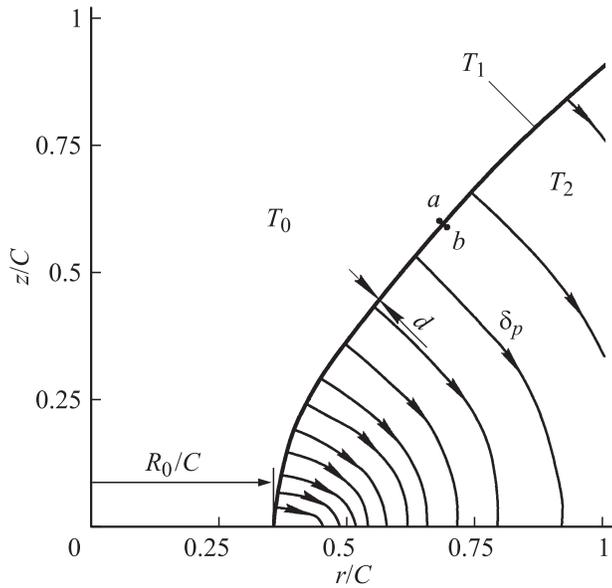


Рис. 7. Бессилловой магнит с обмоткой малой толщины, на оси которого индукция изменяется по закону $B(0, z) = B_0(1 + z^2/C^2)^{-1}$, а равновесие обмотки поддерживается благодаря отводу полоидального тока во внешнюю зону магнитной системы.

полоидального поля в области T_0 (рис. 7), удовлетворяющая уравнению (7), может быть представлена интегралом Фурье–Бесселя

$$\psi_B = B_0 r C \int_0^\infty e^{-kz/C} J_1\left(k \frac{r}{C}\right) \frac{\sin k}{k} dk. \quad (37)$$

Поверхности постоянного потока $\psi_B = \text{const}$ являются гиперолоидами вращения и описываются уравнением

$$\frac{r^2}{1 - \rho^2} - \frac{z^2}{\rho^2} = C^2. \quad (38)$$

Функция потока в приосевой области магнита T_0 определяется по формуле

$$\psi_B = B_0 C^2 (1 - \rho). \quad (39)$$

Одна из линий $\psi_B = \psi_0 = \text{const}$ есть внутренняя граница обмотки S_1 , которая в данном примере близка к его внешней границе S_2 . В приведенных формулах ρ — параметр, характеризующий внутренний радиус магнита R_0

$$R_0 = C \sqrt{1 - \rho^2}. \quad (40)$$

Распределение индукции полоидального поля по оси z имеет вид

$$B_z|_{r=0} = \frac{B_0}{1 + (z/C)^2}. \quad (41)$$

Функция потока в приосевой области магнита

$$\psi_B = B_0 C^2 (1 - \rho).$$

Индукция полоидального поля на линии, где $\psi_B = \psi_0$, изменяется по закону

$$\begin{aligned} B_\tau(a) &= \frac{B_0 C}{r(a)} \frac{1 - \rho^2}{\sqrt{(r(a)/C)^2 - (1 - \rho^2)^2}} \\ &= \frac{B_0 R_0^2}{r(a)} \frac{1}{\sqrt{r^2(a) - R_0^4/C^2}}. \end{aligned} \quad (42)$$

В этой формуле $r(a)$ — координата точек на контуре S_1 . Функция тока на внешней стороне уравновешенной обмотки (в области T_2) есть

$$\psi_i(b) = \frac{B_0 R_0^2}{\mu_0 \sqrt{r^2(a) - R_0^4/C^2}}. \quad (43)$$

При условии $r(a) \approx r(b)$ выполнено равенство $B_\tau(a) = B_\varphi(b)$. На рис. 7 представлена конфигурация обмотки малой толщины и показаны линии полоидального тока во внешней зоне магнитной системы в случае, когда среда в этой зоне имеет постоянную проводимость.

Как и в предыдущем примере, в построенном поле при конечном значении толщины d условие непрерывности касательной составляющей индукции полоидального поля нарушается на внешней границе, однако при $d \ll R_0$ роль этого фактора, как и в рассмотренном ранее примере, весьма мала.

Заключение

Выбор конфигурации бессилловой магнитной системы, являющейся аналогом реального магнита конечной длины, связан с решением некорректной задачи математической физики, поскольку на границах расчетной области необходимо удовлетворять двум условиям непрерывности: для функции потока и ее нормальной производной.

Вдали от концов магнита, в его средней части, конфигурация магнита представляет собой систему двух коаксиальных цилиндров. В стенке внутреннего цилиндра поле является бессилловым. В стенке внешнего поле может также быть бессилловым, но при этом на краю области индукция обрывается скачком, что возможно при наличии слоя тока, подверженного действию магнитного давления. Для создания прочной магнитной системы предпочтительней система, в которой во внешнем цилиндре поле не является бессилловым, а в этой зоне имеют место радиальные силы, воспринимаемые цилиндрическими бандажами.

В концевых частях магнита бессилловую конфигурацию можно построить, применяя в различных сочетаниях три метода: выбор формы границы, размещение внешних проводников (экранов) и использование токовода с границы во внешнюю область. Рассчитано поле и найдено распределение плотности тока в тонком бессилловом слое. Получены приближенные аналитические решения для двух тонкостенных магнитных систем, показывающие возможность создания бессилловых

конфигураций, в которых благодаря токоотводу можно обеспечить интегральное равновесие без использования дополнительных внешних контуров с током.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 07-08-00507.

Список литературы

- [1] *Lundquist S.* // Ark. Fys. 1950. Bd 2. N 35. S. 361–365.
- [2] *Lüst R., Schlüter A.* // Zs. Astrophys. 1954. Bd 34. S. 263–282.
- [3] *Chandrasekhar S.* // Proc. Nat. Acad. of Sci. 1956. Vol. 42. N 4. P. 1–5.
- [4] *Furth H.P., Levine M.A., Waniek R.W.* // Rev. Sci. Instr. 1957. Vol. 28. N 11. P. 949–958.
- [5] *Schlüter A.* // Z. Naturforschung. 1957. Bd 12a. N 2. S. 855–859.
- [6] *Parker E.N.* // Phys. Rev. 1958. Vol. 109. P. 1440.
- [7] *Morikawa G.K.* // Controlled Thermonuclear Conference. Washington, D.C. 1958. P. 428–432.
- [8] *Лебедев А.Н.* // ЖТФ. 1964. Т. 34. Вып. 5. С. 812–817.
- [9] *Емец Ю.П., Ковбасенко Ю.П.* // ЖТФ. 1983. Т. 53. Вып. 8. С. 1425–1429.
- [10] *Кемпбелл А., Иветс Дж.* Критические токи в сверхпроводниках. М.: Мир, 1975. 334 с.
- [11] *Лонгмайр К.* Физика плазмы. М.: Атомиздат, 1966.
- [12] *Шафранов В.Д.* Вопросы теории плазмы. Вып. 2. М.: Госатомиздат, 1963. С. 92–131.
- [13] *Кадоццев Б.К.* Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1988.
- [14] *Buck G.J.* // J. Appl. Phys. 1965. Vol. 36. N 7. P. 2231–2235.
- [15] *Eyssa Y.M., Boom R.W.* // IEE Trans. on Mag. 1981. Vol. MAG17. N 1. P. 460–462.
- [16] *Bi Yanfang, Yan Luguang* // IEE Trans. on Mag. 1983. Vol. MAG19. N 3. P. 324–326.
- [17] *Miura Y., Sakota M., Shimada R.* // IEE Trans. on Mag. 1994. Vol. 30. N 4. P. 2573–2576.
- [18] *Nomura S., Osaki T., Kondoh J.* et al. // IEE Trans. on Appl. Supercond., 1999. Vol. 9. N 2. P. 354–356.
- [19] *Nomura S., Ajiki D., Suzuki C., Watanabe N.* // IEE Trans. on Appl. Supercond. 2001. Vol. 11. N 1. P. 20–24.
- [20] *Wells D.R., Mills R.G.* // High Magnetic Fields. Cambridge, Mass: Technol. Press, 1962. Ch. 2. P. 44–47.
- [21] *Быков В.Е., Георгиевский А.В., Корякко В.И., Литвиненко Ю.А.* „Бессилловые“ тороидальные магнитные системы. Препринт ХФТИ № 76–39. Харьков, 1976. 52 с.
- [22] *Кузнецов А.А.* // ЖТФ. 1961. Т. 31. С. 650.
- [23] *Claude M.Z., Mailfert A.* // Bull. Soc. Frans. Electriciens. 1963. Vol. 4. P. 33–37.
- [24] *Amromin E.L., Khosikov V.Yu., Shneerson G.A.* // Plasma Devices and Operations. 1998. Vol. 4. P. 321–326.
- [25] *Шнеерсон Г.А., Колтунов О.С., Хозиков В.Ю.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 1. С. 110–116.
- [26] *Shneerson G.A., Borovkov A.I., Koltunov O.S., Mikhaluk D.S., Titkov V.V.* // Proc 9th Int. Megagauss Conf. // Ed. by V.D. Selemmer, L.N. Plyashkevich. Sarov, 2004. P. 602–615.
- [27] *Shneerson G.A., Koltunov O.S.* et al. // Physica B. 2004. Vol. 346–347. P. 566–570.
- [28] *Шнеерсон Г.А.* // ЖТФ. 1986. Т. 56. Вып. 1. С. 36–43.
- [29] *Wakerfield K.E.* // High Magnetic-Fields. Cambridge, Mass: Technol. Press, 1962. P. 39–43.
- [30] *Hahd G.L., Levine M.A.* // Phys. Rev. 1962. Vol. 127. N 6. P. 1856–1857.
- [31] *Levine M.A.* // High Magnetic-Fields. Cambridge, Mass: Technol. Press, 1962. P. 277–280.