

# Перемешивание и ляпуновские показатели хаотических систем

© М.Ю. Логунов, О.Я. Бутковский

Владимирский государственный университет,  
600000 Владимир, Россия  
e-mail: mulogunov@mail.ru, olegb@vlsu.ru

(Поступило в Редакцию 11 сентября 2007 г.)

Рассматривается явление перемешивания фазовых траекторий хаотических систем. Даны аналитические оценки скорости перемешивания и описан алгоритм ее экспериментального вычисления. Обсуждается связь локальной скорости перемешивания с локальными ляпуновскими показателями. Применимость разработанного алгоритма показана на ряде примеров хаотических систем.

PACS: 05.45.-a, 05.45.Pq, 05.40.-a

## Введение

Хорошо известно, что детерминированные хаотические системы обладают двумя специфическими свойствами:

- наличием, по крайней мере одного, положительного ляпуновского показателя;
- явлением перемешивания фазового пространства хаотической системы.

Техника вычисления ляпуновских показателей (как локальных, так и глобальных) достаточно проработана, и их влияние на динамику хаотических систем хорошо изучено. Описаны многочисленные эффекты действия ляпуновских показателей на предсказуемость [1], устойчивость динамики [2], а также геометрические характеристики аттрактора [3,4].

Существующие результаты по оценке скорости перемешивания (см. обзор [5]) позволяют установить скорость перемешивания и связать ее с ляпуновскими показателями лишь для определенных классов дискретных отображений [6,7], в то же время несмотря на некоторые опубликованные работы (например, [8,9]) аналитическое вычисление скорости перемешивания для непрерывных динамических систем (например, задаваемых в виде систем ОДУ) является еще не решенной задачей.

В настоящей статье описан алгоритм оценки скорости перемешивания, пригодный для исследования как дискретных, так и непрерывных динамических систем, и сделана попытка оценить скорость перемешивания двух известных хаотических систем (Лоренца и Ресслера) с существенно различными геометрическими и динамическими свойствами аттракторов, а также приведены строгие результаты вычисления этой скорости для хорошо изученных отображений „пекаря“ и „подмастерья пекаря“. Кроме того, рассматривается связь локальной скорости перемешивания, локальных ляпуновских показателей (ЛЛП) и локальных топологических свойств аттрактора.

## 1. Перемешивание в хаотических системах

Сформулируем понятие перемешивания математически, как это сделано в работе [10]. Для этого рассмотрим аттрактор  $G$  некоторой хаотической системы, на котором заданы оператор эволюции системы  $S(G)$  и инвариантная мера  $\mu$ . Выберем на аттракторе  $G$  две произвольные области  $B$  и  $W$ . Отношение меры точек из области  $B$ , которые через  $n$  итераций оператора эволюции  $S$  попали в область  $W$  по отношению к мере самой области  $W$ , можно записать следующим образом:

$$D_n = \frac{\mu(S^n(B) \cap W)}{\mu(W)}. \quad (1)$$

Оператор  $S$  является перемешивающим, если при  $n \rightarrow \infty$  значение  $D_n$  в (1) не зависит от конкретного выбора области  $W$ , а определяется отношением  $\mu(B)/\mu(G)$ :

$$\frac{\mu(S^n(B) \cap W)}{\mu(W)} \rightarrow \frac{\mu(B)}{\mu(G)}, \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2)$$

С физической точки зрения формула (2) описывает „размывание“ любой области начальных условий  $B$  по всему аттрактору  $G$ . Эту формулу можно описать следующим образом: в пределе  $n \rightarrow \infty$  мера образов точек множества  $B$  во множестве  $W$  равна мере множества  $B$  на аттракторе  $G$  для произвольных множеств  $B$  и  $W$ .

Формула (2) позволяет оценить скорость перемешивания в хаотической системе. Для этого естественно положить  $\mu(G) = 1$  и определить корреляционную функцию  $C_n(f, g)$  в виде:

$$C_n(f, g) = \left| \int g(f \circ S^{-n}) d\mu - \int g d\mu \int f d\mu \right|, \quad (3)$$

где  $f$  и  $g$  обычно представляют собой скалярное поле — некоторые функции от позиции точки на аттракторе [10,11].

При наличии перемешивания из (2) следует, что  $G_n(f, g) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , таким образом, происходит

спадание корреляций скалярного поля. При этом считается, что скорость спада корреляций характеризует скорость перемешивания [10].

## 2. Алгоритм оценки степени перемешивания

В этой части предложен алгоритм оценки степени перемешивания, основанный на непосредственном вычислении отношения, подобного (1).

Введем на аттракторе хаотической системы множество  $G_0$  из  $N$  начальных условий, заданных естественной инвариантной мерой. На каждом  $n$ -ом шаге эволюции будем задавать окрестность  $W_n$  некоторой точки  $x_n$ , лежащей на этом аттракторе, как множество из  $N_1$  ближайших к  $x_n$  точек множества  $S^n(G_0)$ . Также введем множество  $B_0$  как следующую разность множеств:  $B_0 = G_0/W_0$ , где  $W_0$  — окрестность произвольной точки  $x_0$  в начальный момент эволюции. Зафиксируем начальное условие  $x_0$  и будем следить за динамикой  $x_n = S(x_{n-1})$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и отношением числа точек из  $B_0$ , попавших с течением времени в  $W_n$  к полному числу точек  $N_1$ , формирующих множество  $W_n$ .

Очевидно, что при данном выборе областей  $W_n$  и  $B_0$  это отношение находится по формуле, сходной с (1):

$$M_n = \frac{\mu(S^n(B_0) \cap W_n)}{\mu(W_n)}. \quad (4)$$

Однако отметим, что в отличие от (1) в данном случае область  $W_n$  перемещается по аттрактору на каждом шаге эволюции. Тем не менее этот алгоритм будет применяться к заведомо хаотическим системам, меры множеств  $B_0$ ,  $G$  и  $W_n$  в нем остаются постоянными, а по определению перемешивающего оператора сходимость  $M_n$  к значению  $\mu(B_0)/\mu(G_0)$  не зависит от конкретного выбора области  $W_n$ , поэтому можно предположить, что характер изменения зависимости (4) от  $n$  определяется, как и для последовательности (1), именно перемешивающими свойствами хаотической системы.

Выражение (4) естественно назвать степенью перемешивания точек области  $W_n$  за  $n$  итераций оператора эволюции, поскольку оно показывает относительную степень обновления окрестности заданной точки за определенный интервал времени, или вероятность появления в окрестности данной точки тех точек, которые на начальном этапе эволюции не входили в ее окрестность.

Благодаря определенному выше выбору множеств  $W_n$  и  $B_0$  значение  $M_n$  будет возрастать от 0 при  $n = 0$  до некоторого стационарного значения, которое можно установить из (2):

$$M_\infty = (N - N_1)/N.$$

В среднем по локальным областям  $W_0$  зависимость  $M_n$  является монотонно возрастающей, скорость роста которой характеризует скорость перемешивания на аттракторе  $G$ .

Чтобы получить аналитические выражения для степени перемешивания, предположим, что для данной хаотической системы выполняются два условия.

1. Скорость перемешивания на аттракторе постоянна.

2. Если некоторая точка аттрактора выходит из окрестности  $W_n$ , она в течение эволюции уже не может вернуться в эту область.

Пусть относительное число точек, не покинувших некоторую окрестность  $W_1$ , на протяжении одной итерации оператора эволюции  $S$  составляет  $V_1$ . Тогда с учетом двух описанных условий достаточно очевидно, что относительное число точек  $V_n$ , входящих в ту же окрестность на протяжении всего времени эволюции  $n$  составит

$$V_n = V_1^n. \quad (5)$$

Из определения величин  $M_n$  и  $V_n$  следует соотношение  $M_n = 1 - V_n$ , поэтому изменение степени перемешивания со временем описывается уравнением

$$M_n = 1 - (1 - M_1)^n.$$

Для последующего анализа удобнее пользоваться рекуррентной оценкой степени перемешивания, которую нетрудно получить из (5):

$$M_n = M_{n-1} + (1 - M_{n-1})M_1. \quad (6)$$

Скорость роста функции  $M_n$  в этом случае характеризуется слагаемым  $(1 - M_{n-1})M_1$ , где множитель  $M_1$  может служить критерием быстроты роста  $M_n$ , а значит и критерием скорости перемешивания. Большие значения  $M_1$  соответствуют более быстрому перемешиванию, и наоборот, чем меньше значение  $M_1$ , тем ниже скорость перемешивания на аттракторе.

Для непрерывных систем выражения (4) и (6) можно переписать в виде

$$M(t) = \frac{\mu(S(t, B_0) \cap W(t))}{\mu(W)} \quad (7)$$

и

$$M(t + \tau) = M(t) + (1 - M(t))M(\tau),$$

откуда при  $\tau \rightarrow 0$  можно получить

$$\frac{dM}{dt} = (1 - M(t))K, \quad (8)$$

где  $K$  — значение правой производной от  $M(t)$  в нуле.

Решение уравнения (8) с учетом начального условия  $M(0) = 0$  можно записать как

$$M(t) = 1 - e^{-Kt}. \quad (9)$$

Экспоненциальная скорость роста  $M(t)$  в этом случае характеризуется параметром  $K$ , который определяет среднюю за время  $\tau$  скорость перемешивания.

Ниже приводятся примеры вычисления  $M_1$  и  $M(1)$  для четырех хаотических динамических систем и обсуждается связь скорости перемешивания с ЛЛП и предсказуемостью динамических систем.

### 3. Примеры

#### 3.1. Отображения пекаря и подмастерья пекаря

Введенный в разд. 2 алгоритм оценки степени перемешивания позволяет аналитически рассчитать скорость перемешивания  $M_1$  для отображений пекаря и подмастерья пекаря. Эти отображения интересны нетривиальной связью между их временем предсказуемости и ляпуновскими показателями, о чем будет сказано ниже.

Отображение пекаря имеет следующий вид:

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = \begin{cases} (2x_n, y_n/2), & x_n < 1/2, \\ (2 - 2x_n, 1 - y_n/2), & 1/2 \leq x_n \end{cases} \quad (10)$$

и состоит в том, что сначала единичный квадрат сжимается вдоль оси  $y$  в два раза и в два раза растягивается вдоль оси  $x$ , затем разрезается пополам и правый кусок кладется сверху на левый (параллельным переносом).

Отображение подмастерья пекаря задается выражениями

$$x_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} x_n, & x_n < \alpha, \\ \beta(x_n - \alpha) \bmod 1, & \alpha \leq x_n; \end{cases} \quad (11)$$

$$y_{n+1} = \begin{cases} \alpha y_n, & x_n < \alpha, \\ \alpha + \frac{1}{\beta} (\beta(x_n - \alpha) + y_n), & \alpha \leq x_n, \end{cases} \quad (12)$$

где  $\alpha = 1 - 1/2^U$  и  $\beta = 2^{2^U}$ . Его суть состоит в том, что большая часть единичного квадрата слабо сжимается в  $1/\alpha$  раз вдоль оси  $y$  и во столько же раз растягивается вдоль оси  $x$ ; меньшая часть  $[1 - \alpha, 1) \times [0, 1)$  сжимается очень сильно вдоль оси  $y$  в  $\beta$  раз, нарезается на куски единичной длины, которые затем укладываются штабелем на слабосжатую часть квадрата.

Оба отображения сохраняют площадь и имеют инвариантную меру  $\mu(x, y) = 1$ . Оценим скорость перемешивания в этих отображениях. Для удобства иллюстрации схемы оценки и простоты расчетов будем считать, что на единичном квадрате задана метрика  $L_\infty$ .

Рассмотрим окрестность некоторой точки  $O(x_0, y_0)$  (которая в метрике  $L_\infty$  представляет собой квадрат с центром  $O$ ). Под однократным действием оператора эволюции отображения пекаря (10) эта окрестность трансформируется в прямоугольник (нарисован пунктиром на рис. 1). Как было сказано в разд. 2, скорость перемешивания  $M_1$  является отношением меры новых точек, попавших в окрестность к  $O$  после действия оператора эволюции (заштрихованные области), к мере всей окрестности точки  $O$  (квадрат на рис. 1). В данном случае это соответствует отношению площади заштрихованной части квадрата к площади всего квадрата на рис. 1. Очевидно, что для отображения пекаря

$$M_1^{\text{baker}} = \frac{1}{2}. \quad (13)$$

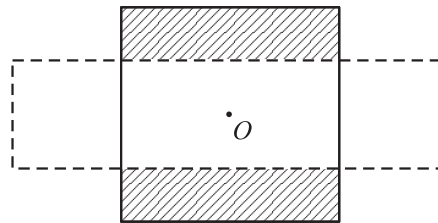


Рис. 1. К вычислению скорости перемешивания в отображении пекаря.

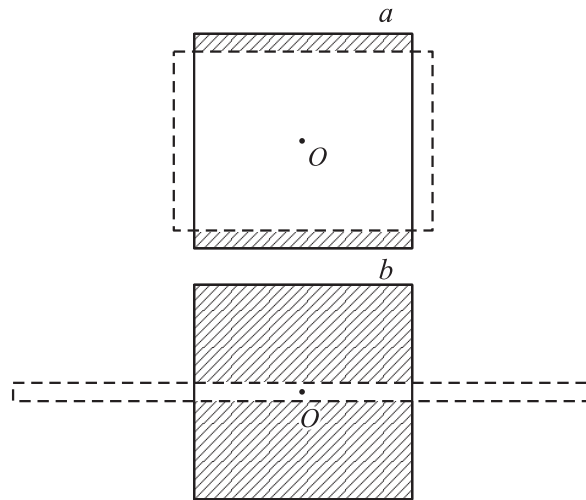


Рис. 2. К вычислению скорости перемешивания в отображении подмастерья пекаря.

Оценим теперь скорость перемешивания  $M_1^{\text{apr}}$  в отображении подмастерья пекаря. В этом случае она уже не будет постоянной на всем единичном квадрате. Можно показать, по аналогии с отображением пекаря, что скорость перемешивания отображения (11), (12) на прямоугольной области  $[0, \alpha) \times [0, 1)$  составляет  $d_1^{\text{apr}} = 1 - \alpha$  (рис. 2, a). В области  $[1 - \alpha, 1) \times [0, 1)$  (рис. 2, b) скорость перемешивания существенно выше и составляет  $d_2^{\text{apr}} = 1 - 1/\beta$ .

Средняя по инвариантной мере  $\mu$  скорость перемешивания отображения подмастерья пекаря

$$M_1^{\text{apr}} = d_1^{\text{apr}} \alpha + d_2^{\text{apr}} (1 - \alpha) = (1 - \alpha) \alpha + \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) (1 - \alpha)$$

или

$$M_1^{\text{apr}} = 1 - \alpha^2 - \frac{1 - \alpha}{\beta}. \quad (14)$$

Значения  $M_1^{\text{apr}}$  представляют собой с ростом  $U$  убывающую последовательность. Если  $U \rightarrow \infty$ , то  $M_1^{\text{apr}} \rightarrow 0$  и перемешивание в отображении (11), (12) пропадает, причем за исключением единственного случая  $U = 1$ , когда  $M_1^{\text{apr}} = 5/8$ , скорость перемешивания в отображении подмастерья пекаря меньше, чем в отображении пекаря.

Эти отображения допускают аналитическое вычисление ляпуновских показателей [12]. Расчеты показывают,

что старший ляпуновский показатель отображения пекаря следующий:

$$\Lambda^{\text{baker}} = \ln 2,$$

а отображения подмастерья пекаря:

$$\Lambda^{\text{apr}} = \alpha \ln 1/\alpha + (1 - \alpha) \ln \beta.$$

Можно заметить, что  $\Lambda^{\text{apr}} > \Lambda^{\text{baker}}$ , т.е. отображение подмастерья пекаря является более „хаотическим“, чем отображение пекаря.

В работе [12] было показано, что время предсказуемости  $\tau_2$ , рассматриваемое как среднее время увеличения начального малого возмущения в два раза, для системы (10) меньше, чем для системы (11), (12), хотя она имеет меньший старший Ляпуновский показатель. Именно аналитические выражения для времен  $\tau_2$  имеют вид [12]:

$$\tau_2^{\text{baker}} = 1, \quad \tau_2^{\text{apr}} = \frac{1 - \alpha^j}{1 - \alpha}, \quad j = \left[ -\frac{\ln 2}{\ln \alpha} \right],$$

где операция  $[h]$  обозначает наименьшее целое — большее либо равное  $h$ .

Для  $U \rightarrow \infty$  можно показать, что  $\tau_2^{\text{apr}} \approx 2^{U-1} \rightarrow \infty$ , а  $\Lambda^{\text{apr}} \rightarrow \ln 2$ . Отсюда следует, казалось бы парадоксальный, вывод [12,13]: даже для систем с положительным ляпуновским показателем время предсказуемости может быть сколь угодно велико. Однако, учитывая результаты оценки скорости перемешивания (13) и (14), можно сделать вывод о том, что время предсказуемости зависит не только (а иногда, как в данном случае, не столько) от ляпуновских показателей, но и от характера скорости перемешивания в системе. В данном случае системе с меньшей скоростью перемешивания соответствует большее время предсказуемости.

Отметим, что локальная скорость перемешивания и локальные ляпуновские показатели отображения подмастерья пекаря ведут себя согласованно: большей локальной скорости перемешивания соответствует больший ЛЛП, и наоборот. В работе [11] эта связь между скоростью спадания корреляционных функций (3) и обобщенными ляпуновскими показателями для дискретных отображений типа (10) и (11), (12) выявлена более четко. Ниже будет показано, что в случае непрерывных хаотических систем связь между локальной скоростью перемешивания и ЛЛП имеет более сложный характер, определяемый динамикой системы и локальным топологическим строением аттрактора, при котором, в частности, на слабоперемешивающих областях движение может быть сильно неустойчивым.

### 3.2. Система Лоренца

Система Лоренца (15) представляет собой классический пример хаотической динамической системы. Эта система является квазигиперболической, в ее аттракторе все траектории седловые и при вариации параметров не

возникает устойчивых циклов и точек. Максимальный ляпуновский показатель системы Лоренца примерно равен 0.9.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 10(y - x), \\ \dot{y} &= 28x - y - xz, \\ \dot{z} &= -8/3z + xy. \end{aligned} \quad (15)$$

Для того чтобы экспериментально определить степень перемешивания  $M(t)$  (7) в этой системе, на аттракторе было взято  $N = 2500$  инвариантно распределенных начальных точек, из которых запускалась эволюция системы. В каждый момент времени для каждой точки  $x_0$  вычислялась степень перемешивания  $M(t, x_0)$  по формуле (7), в которой множество  $W(t)$  соответствовало  $N_1 = 50$  ближайших к  $S(t, x_0)$  точек. Затем значения  $M(t, x_0)$  усреднялись по всем стартовым точкам  $x_0$  для оценки средней степени перемешивания  $M(t)$  на аттракторе.

Результаты вычислений показаны на рис. 3, где сплошной линией изображена экспериментально полученная кривая  $M(t)$ , а пунктиром — аналитическая (9). Видно удовлетворительное сходство двух этих кривых. Бóльшее аналитическое значение  $M(t)$  в области  $t > 7$  объясняется неучтенной поправкой на максимальное значение  $M(\infty) = (N - N_1)/N$ , которое в данном случае составляет 0.98, и хорошо согласуется с экспериментальным.

Меньшие значения экспериментальной кривой  $M(t)$  по сравнению с аналитической оценкой (9) в области  $0.5 < t < 5$  объясняются нарушением двух условий, при которых эта оценка была получена.

Нарушение первого условия состоит с том, что скорость перемешивания на аттракторе Лоренца не постоянна. На рис. 4 показана гистограмма значений степени перемешивания на траекториях длиной в единицу времени системы  $M(1)$ , вычисленных для каждой из начальных точек алгоритма. Как следует из этого рисунка, на аттракторе Лоренца существуют траектории с невысокой степенью (а значит, и скоростью) перемешивания.

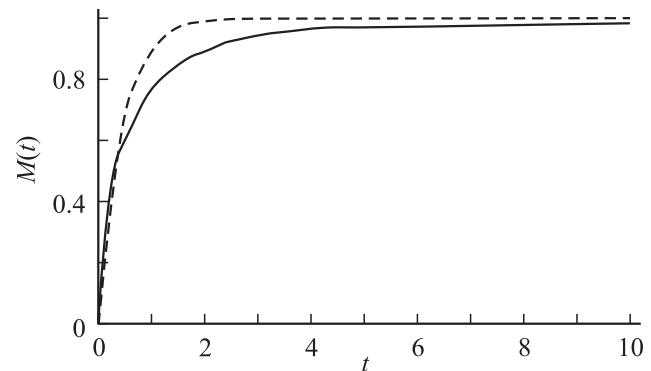


Рис. 3. Степень перемешивания  $M(t)$  в системе Лоренца. Сплошная линия — экспериментальная кривая, пунктир — аналитическая (9).

Нарушение второго условия (предположение о том, что точка, раз покинув область  $W(t)$ , не может больше в нее возвратиться) объясняется тем фактом, что в реальности точка, сохраняющая свою принадлежность некоторой окрестности  $W(t)$  на достаточно больших временах, может периодически на короткие промежутки времени покидать эту окрестность, а затем опять возвращаться в нее, что приводит к заниженному значению степени перемешивания по сравнению с оценкой (9). Расчеты показывают, что точка, глобально принадлежащая некоторой окрестности  $W(t)$  в течение единицы времени системы (15) (что соответствует степени перемешивания  $M(1) \approx 0.77$ ), в среднем 13% времени эволюции проводит вне ее.

Расположение траекторий со слабым и сильным перемешиванием на аттракторе Лоренца представлено на рис. 5. Видно, что траектории со слабым перемешиванием достаточно компактно сконцентрированы около

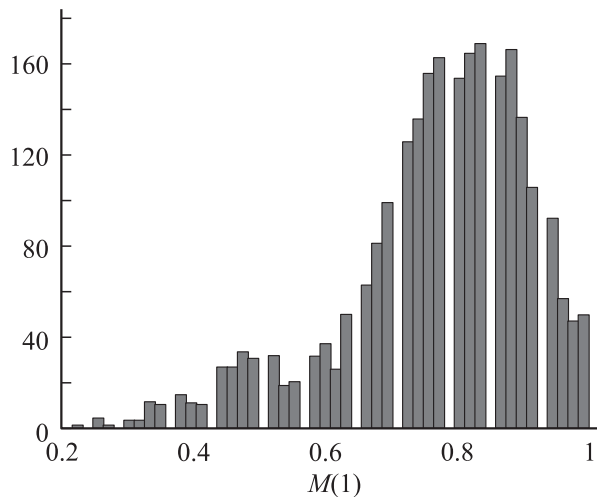


Рис. 4. Гистограмма степени перемешивания  $M(1)$  для траекторий на аттракторе Лоренца.

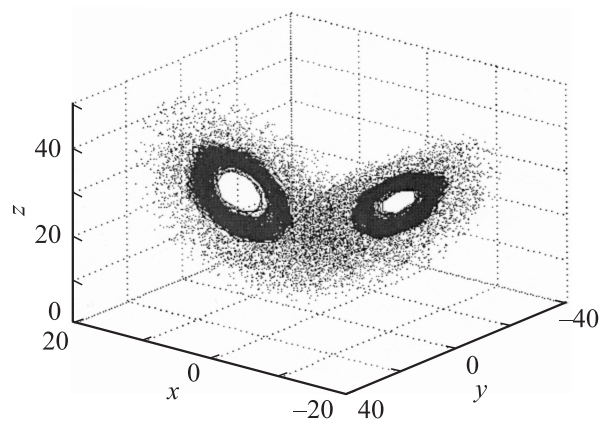


Рис. 5. Фазовый портрет системы Лоренца. Сплошным цветом закрашена область, где степень перемешивания траектории  $M(1)$  меньше 0.5. Точками показана область, в которой степень перемешивания траекторий  $M(1)$  больше 0.5.

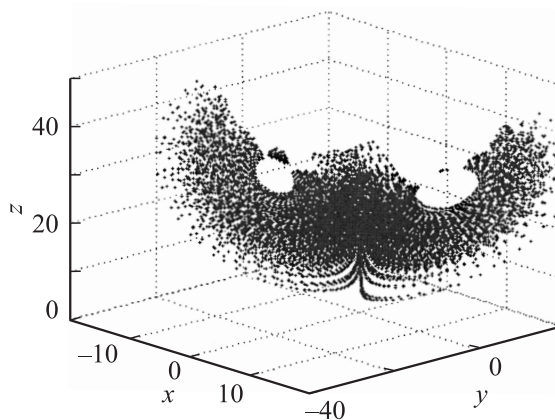


Рис. 6. Часть фазового портрета системы Лоренца. Показаны только точки, в которых максимальный из ЛЛП больше нуля.

неустойчивых стационарных точек, а основной вклад в перемешивание траекторий вносят их перескоки между неустойчивыми орбитами вокруг этих точек.

Обсудим связь между ЛЛП и локальной скоростью перемешивания фазовых траекторий. На рис. 6 показаны точки на аттракторе Лоренца, в которых максимальный локальный ляпуновский показатель больше нуля. (ЛЛП вычисляли с помощью решения уравнения в вариациях для вектоов возмущений и последующей ортогонализации Грама–Шмидта.)

Как можно видеть из этого рисунка, области больших ЛЛП, вообще говоря, не совпадают с областями сильного перемешивания,<sup>1</sup> поэтому связь скорости перемешивания с ЛЛП в непрерывных системах не является очевидной. Можно сделать вывод о том, что два этих свойства, характеризующие движение точек на аттракторах, имеют для непрерывных хаотических систем самостоятельное значение.

### 3.3. Система Ресслера

Система Ресслера (16) в отличие от (15) не является квазигиперболической и ее аттрактор ленточного типа (см. фазовый портрет на рис. 7) имеет существенно иные геометрические свойства. Максимальный ляпуновский показатель этой системы примерно равен 0.08 и почти в 10 раз меньше ляпуновского показателя для системы Лоренца

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + 0.2y, \\ \dot{z} &= 0.4 + z(x - 8). \end{aligned} \tag{16}$$

Перемешивающие свойства этой системы также исследовались в работе [8], где делалось предположение о диффузионном характере движения в системе (16) и рассматривалась модель ее фазовых флуктуаций.

<sup>1</sup> В отличие от отображений пекаря и ученика пекаря (см. также [11]).

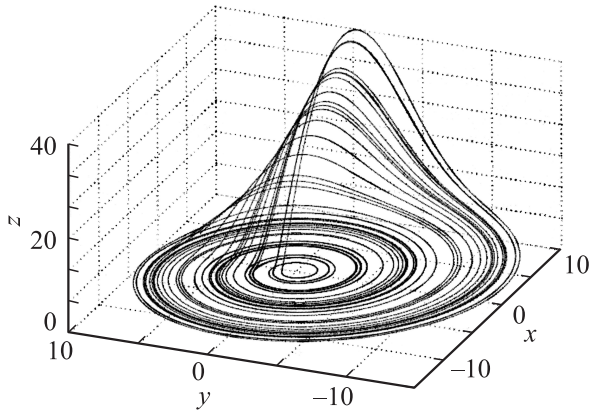


Рис. 7. Фазовый портрет системы Ресслера.

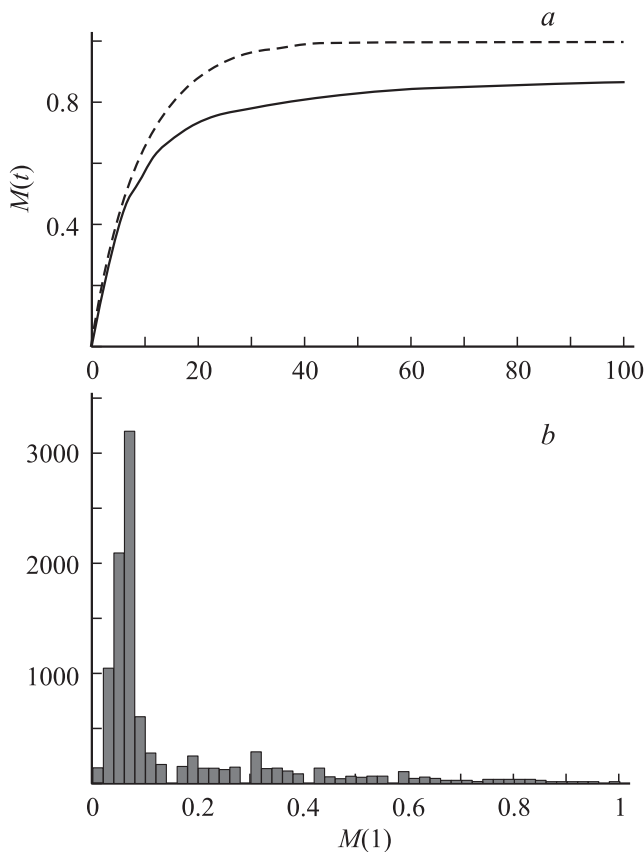


Рис. 8. *a* — степень перемешивания  $M(t)$  системы Ресслера, сплошная линия — экспериментальная кривая, пунктир — аналитическая, *b* — гистограмма степени перемешивания  $M(1)$ .

Для системы Ресслера были проведены те же расчеты, что и для системы Лоренца (15).

На рис. 8 показана степень перемешивания  $M(t)$  (*a*), и гистограмма значений  $M(1)$  (*b*) для точек на аттракторе Ресслера. Всего стартовых точек 10 000, окрестность состоит из 50 точек. Как следует из этого рисунка, перемешивание в системе (16) в среднем по аттрактору гораздо слабее, чем в системе Лоренца (что хорошо со-

гласуется с результатами [8]). Вероятно, это объясняется его ленточной структурой, когда траектории, существенную часть времени двигаясь внутри достаточно плоской „ленты“ с примерно постоянной скоростью, не могут перемешиваться в силу теоремы единственности.

Существенное отклонение экспериментальной кривой  $M(t)$  от аналитической оценки вызвано вариабельностью локальных скоростей роста на аттракторе (среднеквадратичное отклонение значений  $M(1)$  составляет 0.17, в то время как для системы Лоренца оно составляет 0.14) и тем же явлением, которое имеет место и в системе Лоренца: точка, входящая в некоторую область  $W(t)$  на большом интервале времени, может периодически на короткие промежутки времени в рамках этого интервала покидать окрестность. Сравним силу этого явления в системах (15) и (16) для одной и той же степени перемешивания 0.77. Чтобы достичь этой степени перемешивания, эволюции локальной окрестности системы (16) должна длиться  $\approx 30$  единиц времени. В течение этого интервала времени точка, входящая в окрестность в начальный и конечный моменты времени, примерно 29% времени эволюция проводит вне этой окрестности. Таким образом, этот эффект в системе Ресслера проявляется более чем в два раза сильнее, чем в системе Лоренца.

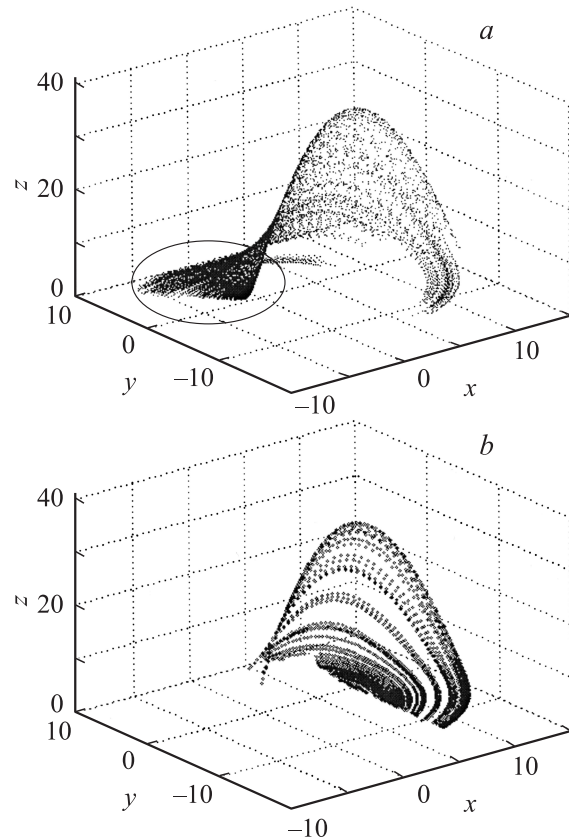


Рис. 9. Фрагменты фазового портрета Ресслера: *a* — траектории, на которых степень перемешивания  $M(1)$  превысила 0.5 единиц; *b* — точки аттрактора, в которых максимальный ЛЛП больше 0.2.

Укажем также на качественное различие гистограмм степени перемешивания для этих систем (рис. 4 и 8, *b*). Из рисунков следует, что большинство траекторий системы Лоренца испытывают достаточно сильное перемешивание, в то время как в системе Ресслера подавляющее большинство траекторий перемешивается слабо, но имеется длинный „хвост“ функции распределения, свидетельствующий о существовании относительно небольших областей быстрого перемешивания.

Область сильной перемешиваемости системы Ресслера показана на рис. 9, *a*. В этой области траектории поднимаются в пространство над плоскостью  $x - y$ , неустойчиво движутся в нем, а затем опять „падают“ на плоскость  $x - y$ , делая складку, создающую сильное перемешивание (отмечена эллипсом на рис. 9, *a*). Область больших ЛЛП показана на рис. 9, *b*.

Из анализа этих рисунков, а также рисунков разд. 3.2 для системы Лоренца можно сделать вывод о том, что только больших значений ЛЛП не достаточно для того, чтобы локальная скорость перемешивания стала достаточно большой, необходимо еще соответствующее локальное геометрическое строение аттрактора.

#### 4. Перемешивание и устойчивость динамики непрерывных систем

В непрерывных системах возможны различные сочетания локальной скорости перемешивания траекторий и ЛЛП. Приведем два примера, показывающие крайние случаи этого сочетания: отсутствие перемешивания и сильно неустойчивая динамика, а также сильное перемешивание и устойчивая динамика.

Легко представить устройство локальной области аттрактора, в которой может отсутствовать перемешивание, но динамика системы будет сильно неустойчивой. Например, траектории этой области могут двигаться, равномерно разбегаясь в некоторой гиперплоскости, но при этом в силу отсутствия их пересечений друг с другом<sup>2</sup> не будут перемешиваться. Схематический пример динамики в такой области приведен на рис. 10, *a*, где показана эволюция некоторой окрестности аттрактора, содержащей фиксированное число точек, ближайших к заданной. Эта окрестность (изображенная как окружность) в ходе эволюции увеличивается в размерах, однако все точки, входящие в нее, являются образами точек, входивших в начальную окрестность (эллипс).

Напротив, динамика системы может быть устойчивой, но обладающей сильным перемешиванием. Схематический пример такой динамики показан на рис. 10, *b*. Ее особенность состоит в сильной локальной вариабельности скорости движения изображающей точки по аттрактору. Это приводит к тому, что более „медленные“ точки

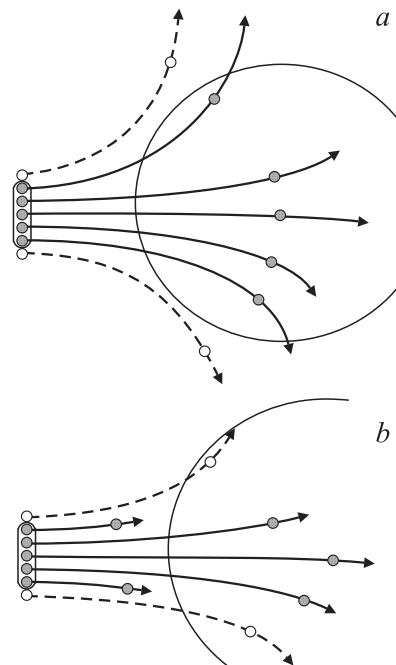


Рис. 10. *a* — сильно неустойчивая динамика без перемешивания; *b* — более устойчивая динамика с сильным перемешиванием.

могут „выпадать“ из рассматриваемой окрестности и восполняться в ней образами точек, первоначально не входивших в окрестность. В таком случае перемешивание траекторий на аттракторе может определяться этим процессом восполнения.

#### 5. Заключение

В настоящей работе описан метод оценки скорости перемешивания в хаотических системах и показано его применение при анализе систем Лоренца и Ресслера. И перемешивание, и ляпуновские показатели являются важными характеристиками хаотических систем, совместно определяющими их время предсказуемости, что особенно ярко проявляется для дискретных отображений типа (10) и (11), (12).

В непрерывных системах возможны различные сочетания ЛЛП и локальной скорости перемешивания на различных областях аттрактора. Совместное влияние на исследуемые процессы этих характерных признаков хаотической динамики во многом определяет сложность анализа хаотических систем.

Полученная идеализированная аналитическая оценка указывает только на экспоненциальный характер роста степени перемешивания, что приводит к ее существенным отклонениям от экспериментально полученных значений для негиперболической системы Ресслера. Более медленный характер роста степени перемешивания в системе Ресслера (рис. 8) может оказаться достаточно общим случаем для систем, имеющих сходное гео-

<sup>2</sup> В данном случае рассматривается динамика детерминированной системы, в которой шумы или случайные возмущения, приводящие к пересечению траекторий, отсутствуют или играют незначительную роль.

метрическое строение аттрактора (например, генератор Анищенко—Астахова), но этот вопрос требует дальнейшего изучения.

## Список литературы

- [1] *Smith L.A., Ziehmman C., Fraedrich K.* // Q.J.R. Meteorol. Soc. 1999. Vol. 125. P. 2855–2886.
- [2] *Mukougawa H., Kimoto M., Yoden S.* // J. Atmospheric Sci. 1991. Vol. 48. P. 1231–1237.
- [3] *Hunt B.R.* // Nonlinearity. 1996. Vol. 9. P. 845–852.
- [4] *So P., Barreto E., Hunt B.R.* // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 60. P. 378–385.
- [5] *Baladi V.* // Proc. Symp. Pure Mathematics. Providence, RI: American Mathematical Society. 1999. Vol. 69. P. 297–325.
- [6] *Collet P., Eckmann J.* // J. of Stat. Phys. 2004. Vol. 115. P. 217–254.
- [7] *Wonhas A., Vassilicos J.C.* // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 66. N 5. P. 051 205.
- [8] *Peifer M., Schelter B., Winterhalder M. et al.* // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72. P. 026 213.
- [9] *Анищенко В.С., Астахов С.В.* // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33. Вып. 21. С. 1–8.
- [10] *Wiggins S., Ottino J.M.* // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 2004. Vol. 362. P. 937–970.
- [11] *Badii R., Heinzelmann K., Meier P., Politi A.* // Phys. Rev. A. 1988. Vol. 37. N 4. P. 1323–1328.
- [12] *Smith L.A.* // Proc. Int. School of Physics „Enrico Fermi“, Course CXXXIII. Italian Physical Society, Bologna, 1997. P. 177–246.
- [13] *Безручко Б.П., Смирнов Д.А.* Математическое моделирование и хаотические временные ряды. Саратов: ГосУНЦ „Колледж“, 2005.