

Пространственный потенциал однородного кругового тора через эквигравитирующие элементы

© Б.П. Кондратьев, А.С. Дубровский, Н.Г. Трубицына, Э.Ш. Мухаметшина

Удмуртский государственный университет,
426034 Ижевск, Россия
e-mail: kond@uni.udm.ru

(Поступило в Редакцию 18 сентября 2007 г.)

Представлена и проведена полная система простейших эквигравитирующих элементов для однородного кругового тора, в нее входят: составной одномерный стержень из трех звеньев с чисто мнимой на них плотностью, а также две вещественные точечные массы, расположенные на краях этого стержня. Через данные элементы получен пространственный гравитационный потенциал тора в произвольной точке. Построена поверхность потенциала и найдено семейство эквипотенциалей.

PACS: 02.30.Em

Введение

Задача о потенциале гравитирующего (или заряженного статическим электричеством с однородным распределением заряда) кругового тора весьма актуальна для многих задач физики и астрономии. Однако она является математически весьма сложной и требует тщательного анализа. Этой проблемой занимался еще Риман [1], но в задаче Дирихле он не использовал граничных условий и не довел до конца разложение потенциала в ряд Фурье. В работе [2] Züge формально выразил потенциал через двойные интегралы, но в решении задачи далее не продвинулся, причем ссылка на Римана у него отсутствует.

Следующий этап изучения притяжения кругового тора связан с развитием новых методов в теории потенциала, представленных в монографиях [3,4]. Потенциал тора, причем не только кругового, рассматривался в [3, разд. 2.39] и в [4, гл. 7]. В [3] был получен, в частности, и потенциал тора на оси симметрии; он оказался выраженным в конечном виде через стандартные полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода в форме Лежандра:

$$\varphi(x_3) = \frac{8\pi G\rho}{3k^2} r_0 R_0 \frac{r_0 + l}{l} [(2 - k^2)E(k) - 2(1 - k^2)K(k)], \quad (1)$$

где

$$l = \sqrt{R_0^2 + x_3^2}; \quad k^2 = \frac{4r_0 l}{(r_0 + l)^2}.$$

Кроме того, в [4, с.194] был найден и полный пространственный потенциал тора:

$$\frac{\varphi_{\text{тор}}(r, x_3)}{2\sqrt{2}G\rho R_0 r_0} = \int_0^{2\pi} \left\{ \left[c + 2 \left(R_1^2 - \frac{r^2}{R_0^2} \right) \right] K(k_1) + (a - c)E(k_1) - 2 \frac{(x_3 - r_0 \sin \theta)^2}{R_0^2} \Pi(n, k_1) \right\} \frac{\cos \theta d\theta}{a - c}. \quad (2)$$

Здесь используются обозначения геометрических характеристик тора (рис. 1). Кроме того, введены параметры

$$R_1 = 1 + \frac{r_0}{R_0} \cos \theta; \quad a = \frac{2(r^2 + (x_3 - r_0 \sin \theta)^2)}{R_0^2};$$

$$n = \frac{a - b}{2r^2/R_0^2};$$

$$\left(\frac{b}{c} \right) = \frac{a}{2} - R_1^2 \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2} - R_1^2 \right)^2 + 4R_1^2 \frac{(x_3 - r_0 \sin \theta)^2}{R_0^2}};$$

$$k_1 = \frac{1 - k'}{1 + k'} \leq 1; \quad (3)$$

$$k' = \sqrt{\frac{(r - R_1)^2 + (x_3 - r_0 \sin \theta)^2}{(r + R_1)^2 + (x_3 - r_0 \sin \theta)^2}} \leq 1.$$

Подчеркнем, что выражение потенциала (2) содержит интегралы от стандартных полных эллиптических интегралов 1, 2 и 3-го рода. Оно было получено в [4] методом синтеза вкладов в потенциал тора от широких элементарных круговых колец. В той же монографии пространственный потенциал тора, представленный в форме (2), был тщательно изучен. В частности, был выполнен предельный переход к потенциалу тора на

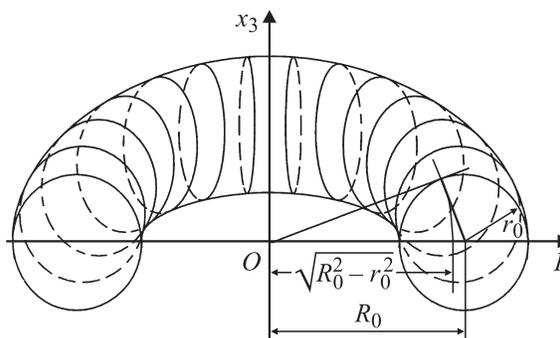


Рис. 1. Изображение половины кругового тора.

оси симметрии (1) и рассчитано обширное семейство кривых равного потенциала.

Однако ввиду сложности задачи для тора и настоятельной необходимости тщательной проверки полученных ранее результатов важно подойти к данной проблеме с принципиально иной точки зрения, применяя для решения данной задачи так называемые эквигравитирующие элементы. Напомним, что в монографиях [3,4] было развито новое направление в теории потенциала, опирающееся на строгое доказательство существования простейших эквигравитирующих элементов для класса тел с азимутальной симметрией. Там были развиты общие теоретические методы нахождения таких элементов, в частности, найдены и эквигравитирующие элементы для тора.

В настоящей работе метод эквигравитирующих элементов применяется к однородному круговому тору; представлены выражения для пяти эквигравитирующих элементов тора, с помощью которых находится пространственный потенциал этого тела. Новый подход к задаче позволил представить потенциал тора в принципиально новой математической форме и, что немало важно, с независимых позиций проверить правильность выражения (2).

1. Эквигравитирующие элементы тора

Дан однородный круговой тор (рис. 1) в поверхностью

$$(r - R_0)^2 + x_3^2 = r_0^2. \tag{4}$$

Полная масса тора

$$M_{\text{тор}} = 2\pi^2 \rho r_0^2 R_0. \tag{5}$$

Как показано в [4], потенциал однородного кругового тора может быть представлен с помощью системы пяти элементов, состоящей из трехзвенного стержня с чисто мнимым распределением плотности вещества на каждом из этих отрезков:

$$\begin{aligned} \mu_1(\xi) &= -\frac{8}{3} i \rho_0 r_0 R_0 \left(\frac{1}{k} + k \right) E(k) - \left(\frac{1}{k} - k \right) K(k), \\ k &= \frac{r_0}{\sqrt{R_0^2 + \xi^2}} \leq 1; \quad -\sqrt{R_0^2 - r_0^2} \leq \frac{\xi}{i} \leq \sqrt{R_0^2 - r_0^2}, \tag{6} \\ \mu_2(\xi) &= \mu_3(\xi) = -\frac{8}{3} i \rho_0 r_0 R_0 \left[(1 + k^2) E\left(\frac{1}{k}\right) - (1 - k^2) K\left(\frac{1}{k}\right) \right]; \\ k &= \frac{r_0}{\sqrt{R_0^2 + \xi^2}} \geq 1; \quad -R_0 \leq \frac{\xi}{i} \leq -\sqrt{R_0^2 - r_0^2}; \\ &\quad \sqrt{R_0^2 - r_0^2} \leq \frac{\xi}{i} \leq R_0. \tag{7} \end{aligned}$$

Кроме указанного составного стержня в состав системы эквигравитирующих элементов входят еще две точечные вещественные массы

$$M_4 = M_5 = \frac{4}{3} \pi \rho r_0^3, \tag{8}$$

расположенные в точках $\pm i R_0$ мнимой оси.

В [4] была проведена проверка указанной системы эквигравитирующих элементов по массе и доказано, что в сумме эти элементы действительно дают полную массу тора (5).

2. Представление потенциала тора через эквигравитирующие элементы

Согласно методу, развитому в [3] и [4], потенциал осисимметричного тела, имеющего эквигравитирующий стержень с плотностью $\mu(\xi)$, выражается интегралом

$$\varphi(r, x_3) = G \int \frac{\mu(\xi) d\xi}{\sqrt{r^2 + (x_3 - \xi)^2}}, \tag{9}$$

где интегрирование проводится по всему стержню. Если эквигравитирующая система изучаемого тела состоит из нескольких стержней, то его потенциал находится суммированием вкладов от каждого из них.

В случае однородного кругового тора таких стержней три и, кроме того, есть еще две точечные массы (8), расположенные в точках $\pm i R_0$. С учетом всего этого потенциал тора в точке (r, x_3) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{тор}}(r, x_3) &= -\frac{8}{3} i G \rho r_0 R_0 \\ &\times \left\{ \int_{-i\sqrt{R_0^2 - r_0^2}}^{i\sqrt{R_0^2 - r_0^2}} \frac{\left(\frac{1}{k} + k\right) E(k) - \left(\frac{1}{k} - k\right) K(k)}{\sqrt{r^2 + (x_3 - \xi)^2}} d\xi \right. \\ &+ \int_{-iR_0}^{-i\sqrt{R_0^2 - r_0^2}} \frac{(1 + k^2) E\left(\frac{1}{k}\right) + (1 - k^2) K\left(\frac{1}{k}\right)}{\sqrt{r^2 + (x_3 - \xi)^2}} d\xi \\ &\left. + \int_{i\sqrt{R_0^2 - r_0^2}}^{iR_0} \frac{(1 + k^2) E\left(\frac{1}{k}\right) + (1 - k^2) K\left(\frac{1}{k}\right)}{\sqrt{r^2 + (x_3 - \xi)^2}} d\xi \right\} \\ &+ \frac{4}{3} \pi G \rho r_0^3 \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (x_3 - iR_0)^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + (x_3 + iR_0)^2}} \right]. \tag{10} \end{aligned}$$

Подчеркнем, что наряду с интегралами по отрезкам в комплексном пространстве в выражение потенциала (10) входят и конечные величины. Важно заметить также, что форма представления потенциала (10) совершенно иная, нежели в (2).

Для практического применения выражение потенциала тора (10) далее следует преобразовать. Подстановкой

$\xi = iR_0x$ избавляемся в (10) от мнимости и преобразуем этот потенциал к виду

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{тор}}(r, x_3) = & \frac{8\sqrt{2}}{3} G\rho q R_0^3 \\ & \times \left\{ \int_0^{\sqrt{1-q^2}} \frac{\sqrt{S+X}}{S} \left[\left(\frac{1}{k} + k\right) E(k) - \left(\frac{1}{k} - k\right) K(k) \right] dx \right. \\ & + \int_{\sqrt{1-q^2}}^1 \frac{\sqrt{S+X}}{S} \left[(1+k^2) E\left(\frac{1}{k}\right) + (1-k^2) K\left(\frac{1}{k}\right) \right] dx \\ & \left. + \frac{\pi}{2} q^2 \left[\frac{\sqrt{S+X}}{S} \right]_{x=1} \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь введены обозначения

$$q = \frac{r_0}{R_0}; \quad k = \frac{q}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$X = r^2 + x_3^2 - R_0^2 x^2; \quad Y = 2R_0 x_3 x; \quad S = \sqrt{X^2 + Y^2}. \quad (12)$$

Интегральные выражения в (11) представляют вклад во внешний потенциал тора от стержней, а последний член, записанный в конечной форме, описывает вклад от двух точечных масс. Таким образом, потенциал тора представлен теперь двумя выражениями, (2) и (11), которые имеют совершенно разный вид. Так, в (11) под знаком интеграла отсутствует стандартный полный интеграл 3-го рода $\Pi(n, k_1)$, имеющийся в (2). Кроме того, в (11) часть потенциала представлена выражением в конечной форме, а в формуле (2) присутствуют только интегралы. Подчеркнем, что представление потенциала тора в форме (11) ввиду сложности и новизны задачи о потенциале тора имеет важное значение.

3. Потенциал тора на оси симметрии

Переход от общего выражения пространственного потенциала (10) или (11) к потенциалу на оси симметрии тора Ox_3 выполняется при $r = 0$: находим

$$\begin{aligned} b\varphi_{\text{тор}}(x_3) = & \frac{16}{3} G\rho q R_0^3 x_3 \\ & \times \left\{ \int_0^{\sqrt{1-q^2}} \left[\left(\frac{1}{k} + k\right) E(k) - \left(\frac{1}{k} - k\right) K(k) \right] \frac{dx}{x_3^2 + R_0^2 x^2} \right. \\ & + \int_{\sqrt{1-q^2}}^1 \left[(1+k^2) E\left(\frac{1}{k}\right) + (1-k^2) K\left(\frac{1}{k}\right) \right] \frac{dx}{x_3^2 + R_0^2 x^2} \\ & \left. + \frac{\pi}{2} \frac{q^2}{x_3^2 + R_0^2 x^2} \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Численно проверено, что формулы (1) и (13) эквивалентны друг другу.

4. Эквипотенциальные кривые гравитирующего тора

Кроме расчетов потенциала на оси симметрии тора общая формула (11) была проверена и численно во многих пространственных пробных точках. Формулы (2) и (11) оказались эквивалентными друг другу. Для окончательной проверки с помощью (11) была рассчитана поверхность потенциала для тора. Такая поверхность имеет сложный вид (рис. 2). Она напоминает палатку, натянутую на два вертикально воткнутых кола.

Сечения этой поверхности на разной высоте, представляющие кривые равного потенциала (или эквипотенциали), показаны на рис. 3. Для больших значений потенциала кривая разбивается на два замкнутых овала; с уменьшением потенциала эти овалы сливаются и образуют гантелеобразную форму; при дальнейшем уменьшении значений потенциала эквипотенциали тора округляются. Точки максимума попадают внутрь фигуры.

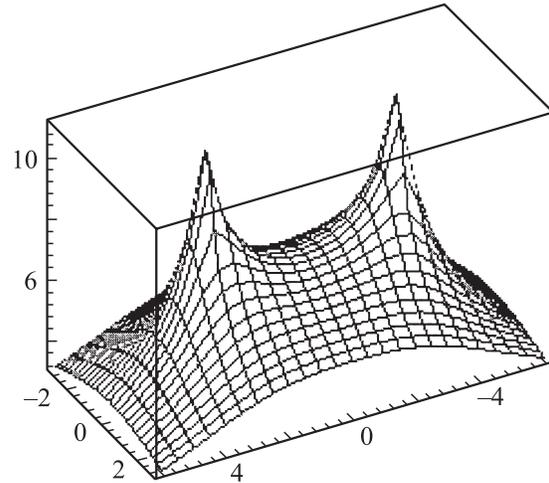


Рис. 2. Пространственный потенциал однородного кругового тора. По горизонтальным осям отложены нормированные на r_0 цилиндрические координаты (r, x_3) , по вертикальной оси — нормированный на $(G\rho r_0^2)$ потенциал. Для расчетов взято отношение $\frac{r_0}{R_0} = \frac{1}{3}$.

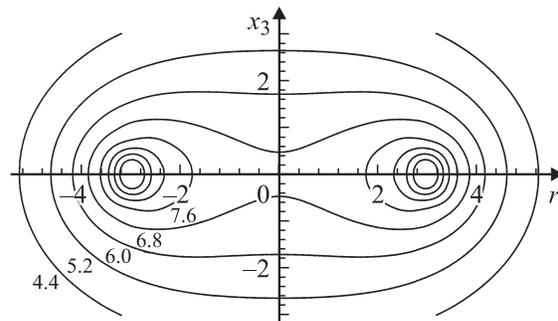


Рис. 3. Кривые равного потенциала, являющиеся сечениями поверхности на рис. 2. Цифры на кривых дают значение нормированного потенциала тора.

Заключение

Задача о потенциале гравитирующего (или заряженного статическим электричеством с однородным распределением заряда) однородного тора сводится к прямому использованию его эквигравитирующих элементов. Ранее в [4] эти элементы были найдены путем сложного анализа аналитического продолжения потенциала тора и отыскания особых точек. Поэтому была необходима прямая проверка эквигравитирующих элементов через нахождение полного пространственного потенциала тора, что и сделано в данной статье. Кроме того, выполненное здесь численное сравнение найденного данным методом потенциала тора с тем выражением, которое было получено ранее другим способом — через элементарные широкие круговые кольца — позволило убедиться в достоверности обоих известных теперь представлений потенциала тора. Каким выражением удобнее пользоваться, зависит от характера решаемых в физике и астрономии задач.

Список литературы

- [1] Риман Б. О потенциале тора. М.–Л.: ОГИЗ, 1948. С. 367–372.
- [2] *Züge A* // J. Reine Angew. Math. 1889. Bd 104. S. 89–101.
- [3] Кондратьев Б.П. Теория потенциала и фигуры равновесия. М.–Ижевск: РХД, 2003. 624 с.
- [4] Кондратьев Б.П. Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. М.: Мир, 2007. 512 с.