01;05;09

Модуляционная неустойчивость диспергирующих электромагнитных волн в джозефсоновском переходе в пластине конечной толщины

© А.И. Ломтев

Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина НАН Украины,
83114 Донецк, Украина
e-mail: lomtev@kinetic.ac.donetsk.ua

(Поступило в Редакцию 26 июня 2007 г.)

В рамках нелокальной электродинамики перехода Джозефсона в пластине конечной толщины исследована модуляционная неустойчивость диспергирующих электромагнитных волн конечной амплитуды. Получено дисперсионное уравнение для инкремента нарастания малых амплитудных возмущений. Для указанного типа волн найдены области развития модуляционной неустойчивости и устойчивости волн. Показано, что модуляционная неустойчивость волн развивается в конечной области волновых векторов $Q_{B1}(k, D, L) < Q < Q_{B2}(k, A, D, L)$, а в актуальной длинноволновой области $0 \leq Q \leq Q_{B1}(k, D, L)$ и при $Q \geq Q_{B2}(k, A, D, L)$ волны являются устойчивыми. Указана уникальная возможность управления областью модуляционной неустойчивости дисперсионным параметром k-волновым вектором (или частотой $\omega(k)$) мод линейного приближения.

PACS: 74.81.Fa

По настоящее время не ослабевает интерес к исследованию модуляционной неустойчивости волн в различных нелинейных системах и средах [1,2]. Известно [3,4], что сжатие нелинейной волны может происходить как в поперечном, так и продольном направлении по отношению к направлению ее распространения. В качестве примером можно привести самофокусировку света, предсказанную Аскарьяном [5], неустойчивость типа разбиения волны на пакеты и самосжатия волновых пакетов — модуляционную неустойчивость, которая была впервые изучена Лайтхиллом [6].

Модуляционная неустойчивость электромагнитных волн в распределенных джозефсоновских переходах описывается неустойчивостью решений уравнения sine-Gordon. Наряду с теоретическим интересом явление модуляционной неустойчивости имеет ряд практических приложений. Например, оно используется для генерации цепочек сверхкоротких оптических импульсов с высокой частотой посторения, разработки новых логических устройств.

Во многих ситуациях при исследовании модуляционной неустойчивости необходимо рассматривать пространственно нелокальные модификации уравнения sine-Gordon [7–18]. Из-за различной геометрии задач в перечисленных работах уравнения джозефсоновский электродинамики отличаются видом ядра интегрального оператора, описывающего эффект пространственно-нелокальной связи. Однако во всех этих работах пространственная нелокальность уравнений для разности фаз волновых функций на берегах перехода возникает вследствие нелокальной связи магнитного поля на границе раздела и в сверхпроводнике. Такая причина пространственной нелокальности является универсальной для электродинамики джозефсоновских контактов.

Модуляционная неустойчивось в рамках пространственно нелокальной джозефсоновский электродинамики контакта из массивных сверхпроводников с большой толщиной $d \gg \lambda$ (λ — лондонская глубина проникновения) впервые рассмотрена в работе [7]. Показано, что процесс нарастания малых возмущений амплитуды и фазы отвечает развитию модуляционной неустойчивости электромагнитной волны конечной постоянной амплитуды с нелинейным сдвигом частоты и законом дисперсии мод линейного приближения. Выявлено стабилизирующее влияние пространственной нелокальности на модуляционную неустойчивость. В работе [19] для джозефсоновского перехода также из массивных сверхпроводников с толщиной $d \gg \lambda$ исследована модуляционная неустойчивость осциллирующей с джозефсоновской частотой плоской нелинейной электромагнитной волны конечной амплитуды, обусловленная нарастанием малых амплитудных возмущений и приводящая к разбиению такой волны на пакеты. В работе [20] исследована модуляционная неустойчивость диспергирующих электромагнитных волн, распространяющихся в джозефсоновском переходе, состоящем из массивных сверхпроводников толщины $d \gg \lambda$. Получено дисперсинное уравнение для инкремента нарастания малых амплитудных возмущений. Выявлено стабилизирующее влияние пространственной нелокальности на модуляционную неустойчивость в длинноволновой области. Показано существование возможности управления областью модуляционной неустойчивости дисперсионным параметром k-волновым вектором (или частотой $\omega(k)$) несущей волны линейного приближения.

В противоположном пределе для джозефсоновского перехода в ультратонкой пленке немагнитного и магнитного (двумерного и трехмерного) сверхпроводника толщиной $d \ll \lambda$ в работах [21–23] исследована модуляционная неустойчивость однородных джозефсоновских колебаний конечной амплитуды с нелинейным сдвигом частоты, порождаемая нарастанием малых амплитудных возмущений. В работе [24] в рамках нелокальной джозефсоновской электродинамики исследована модуляционная неустойчивость диспергирующих электромагнитных волн, распространяющихся в джозефсоновском переходе в тонкой сперхпроводящей пленке толщиной $d \ll \lambda$. Для диспергирующих волн выявлено стабилизирующее влияние пространственной нелокальности на модуляционную неустойчивость в длинноволновой области. Продемонстрирована возможность управления областью модуляционной неустойчивости при помощи дисперсионного параметра — волнового вектора k (или частоты $\omega(k)$) волн линейного приближения. Модуляционная неустойчивость бездисперсных, колеблющихся с джозефсоновской частотой, нелинейных электромагнитных возбуждений в джозефсоновском переходе в пластине конечной толщины при нелокальной электродинамике исследована в работе [25].

Тем более актуальным представляется исследование развития модуляционной неустойчивости нелинейных электромагнитных диспергирующих волн, распространяющихся в джозефсоновском переходе в пластине конечной толщины (при произвольном отношении d/λ), которое до сих пор не проводилось.

Одной из нелинейных систем, в которых также может проявляться модуляционная неустойчивость, является переход Джозефсона в сверхпроводящей пластине конечной толщины при произвольном отношении d/λ, когда динамика разности фаз волновых функций на берегах контакта $\varphi(x,t)$ в пренебрежении диссипацией и затравочным мейсснеровским током описывается нелинейным интегродифференциальным уравнением sine-Gordon с пространственной нелокальностью [17]:

$$\sin\varphi(x,t) + \frac{1}{\omega_J^2}\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\lambda_J^2}{\pi\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-x')\frac{\partial\varphi(x',t)}{\partial x'}\,dx', \qquad (1)$$

где ω_J и λ_J — джозефсоновский частота и глубина проникновения соответственно, а интергральное ядро $K(x)$ имеет вид

$$K(x) = K_0\left(\frac{|x|}{\lambda}\right) + \frac{1}{d\lambda^2}\int_0^{\infty}\frac{dkJ_0(kx)}{\kappa^3[\kappa + k\coth(\kappa d)]}. \qquad (2)$$

Здесь $K_0\left(\frac{|x|}{\lambda}\right)$ и $J_0(kx)$ — функции Макдональда и Бесселя нулевого порядка,

$$\kappa = (\lambda^{-2} + k^2)^{1/2}.$$

При аппроксимации $\sin\varphi(x,t) \approx \varphi(x,t)$ уравнение (1) имеет решение вида диспергирующих мод линейного приближения с бесконечно малой амплитудой a_0

$$\varphi_0(x,t) = a_0\exp\left\{\pm i[kx - \omega(k)t]\right\} \qquad (3)$$

и спектром

$$\tilde\omega^2(\tilde k) = 1 + L\tilde k^2\left[\frac{1}{\sqrt{1+\tilde k^2}} + \frac{1}{\pi D}J(\tilde k)\right], \qquad (4)$$

где

$$J(\tilde k) = \int_0^{\infty}\left[1 + \tilde k^2\cosh^2 x\right]^{-3/2}\left[\sqrt{1+\tilde k^2\cosh^2 x} + \tilde k\cosh x\coth\left(D\sqrt{1+\tilde k^2\cosh^2 x}\right)\right]^{-1}dx. \qquad (5)$$

Здесь введены безразмерные величины $\tilde\omega(\tilde k) = \omega(\tilde k)/\omega_J$, $\tilde k = \lambda k$ и параметры $L = \lambda_J^2/\lambda^2$, $D = d/\lambda$.

При аппроксимации в уравнении (1) $\sin\varphi(x,t) \approx \approx \varphi(x,t) - \varphi(x,t)^3/3!$ [26] рассмотрим эволюцию нелинейных волн малой, но конечной амплитуды типа бризера в переходе. Представим разность фаз $\varphi(x,t)$ в виде

$$\varphi(x,t) = u(x,t)\exp\{i[kx - \omega(k)t]\} + u^*(x,t)\exp\{i[kx - \omega(k)t]\}, \quad |u(x,t)| \ll 1. \qquad (6)$$

Учтем в уравнении (1) нижайший порядок нелинейности на фазе основной несущей гармонки и ограничимся приближением медленно меняющейся во сремени амплитуды $u(x,t)$, когда справедливо неравенство $|\partial^2 u(x,t)/\partial t^2| \ll 2\omega(k)|\partial u(x,t)/\partial t|$. Тогда из уравнения (1) при подстановке в него поля (6) для амплитуда $u(x,t)$ получим нелинейное нелокальное „уравнение Шредингера“

$$2i\frac{\omega(k)}{\omega_J^2}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \left[\frac{\omega^2(k)}{\omega_J^2} - 1 + \frac{1}{2}|u(x,t)|^2\right]u(x,t) + \frac{\lambda_J^2}{\pi\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty}K(x-x')\left[\frac{\partial u(x',t)}{\partial x'} + iku(x',t)\right] \times \exp\left[-ik(x-x')\right]dx' = 0, \qquad (7)$$

которое имеет точное решение вида однородной плоской нелинейной волны с постоянной амплитудой A:

$$u_0(t) = A\exp[iA^2\omega_J^2 t/4\omega(k)], \quad A \ll 1. \qquad (8)$$

Исследуем устойчивость такого решения. О характере распада плоской волны (8) можно судить по развитию ее малых возмущений. С этой целью допустим, что случайно возникло малое возмущение амплитуд $\psi(x,t)$, когда

$$u(x,t) = [A + \psi(x,t)]\exp[iA^2\omega_J^2 t/4\omega(k)], \quad |\psi(x,t)| \ll A. \qquad (9)$$

Из уравнения (7) для малого возмущения амплитуды $\psi(x,t)$ следует линейное уравнение

$$2i\,\frac{\omega(k)}{\omega_J^2}\,\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}+\left[\frac{\omega^2(k)}{\omega_J^2}-1\right]\psi(x,t)$$
$$+\frac{1}{2}A^2\left[\psi(x,t)+\psi^*(x,t)\right]$$
$$+\frac{\lambda_J^2}{\pi\lambda}\,\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(x-x')\left[\frac{\partial\psi(x',t)}{\partial x'}+ik\psi(x',t)\right]$$
$$\times\exp\left[-ik(x-x')\right]dx'=0. \tag{10}$$

Полагая в уравнении (10) $\psi(x,t)=v(x,t)+iw(x,t)$, для действительной и мнимой частей возмущения амплитуды получим систему уравнений

$$2\,\frac{\omega(k)}{\omega_J^2}\,\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}+\left[\frac{\omega^2(k)}{\omega_J^2}-1\right]w(x,t)$$
$$+\frac{\lambda_J^2}{\pi\lambda}\,\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(x-x')\left[\frac{\partial w(x',t)}{\partial x'}+kv(x',t)\right]$$
$$\times\exp\left[-ik(x-x')\right]dx'=0,$$
$$-2\,\frac{\omega(k)}{\omega_J^2}\,\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}+\left[\frac{\omega^2(k)}{\omega_J^2}-1+A^2\right]v(x,t)$$
$$+\frac{\lambda_J^2}{\pi\lambda}\,\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(x-x')\left[\frac{\partial v(x',t)}{\partial x'}-kw(x',t)\right]$$
$$\times\exp\left[-ik(x-x')\right]dx'=0. \tag{11}$$

Для возмущений амплитуды вида (произвольные возмущения можно представить как суперпозицию таких полей)

$$v(x,t)=V(Q,\Omega)\exp\left[i(Qx-\Omega t)\right],$$
$$w(x,t)=W(Q,\Omega)\exp\left[i(Qx-\Omega t)\right] \tag{12}$$

из системы уравнений (11) следует дисперсионное уравнение $\tilde\Omega=\tilde\Omega(\tilde Q)$:

$$\tilde\Omega(\tilde Q)=\frac{\tilde k}{2(\tilde k+\tilde Q)\tilde\omega(\tilde k)}\left[\tilde\omega^2(\tilde k+\tilde Q)-1\right]$$
$$\pm\frac{1}{2\tilde\omega(\tilde k)}\left\{\frac{1}{\tilde k+\tilde Q}\left[\tilde k+\tilde Q\tilde\omega^2(\tilde k+\tilde Q)\right]-\tilde\omega^2(\tilde k)\right\}^{1/2}$$
$$\times\left\{\frac{1}{\tilde k+\tilde Q}\left[\tilde k+\tilde Q\tilde\omega^2(\tilde k+\tilde Q)\right]-\tilde\omega^2(\tilde k)-A^2\right\}^{1/2}, \tag{13}$$

где $\tilde\omega(\tilde k)$ определяется соотношением (4) с учетом (5) и введены безразмерные величины $\tilde\Omega(\tilde Q)=\Omega(\tilde Q)/\omega_J$ и $\tilde Q=\lambda Q$.

Дисперсионное уравнение (13) с учетом соотношений (4), (5) для инкремента нарастания возмущения всегда имеет положительное решение $\operatorname{Im}\tilde\Omega(\tilde Q)>0$ в области волновых векторов $\tilde Q_{B1}(k,D,L)<\tilde Q<\tilde Q_{B2}(k,A,D,L)$, в которой малые возмущения амплитуды (12) нарастают со временем, и при этом развивается модуляционная неустойчивость однородной плоской нелинейной волны (8). В областях волновых векторов $0\le\tilde Q\le\tilde Q_{B1}(k,D,L)$ и $\tilde Q\ge\tilde Q_{B2}(k,A,D,L)$ $\operatorname{Im}\tilde\Omega(\tilde Q)\equiv 0$, и волна является устойчивой. Пограничный волновой вектор $\tilde Q_{B1}(k,D,L)$ определяется нетривиальным решением уравнения

$$\tilde k+\tilde Q\tilde\omega^2(\tilde k+\tilde Q)=(\tilde k+\tilde Q)\tilde\omega^2(\tilde k), \tag{14}$$

а пограничный волновой вектор $\tilde Q_{B2}(k,A,D,L)$ определяется нетривиальным решением соотношения

$$\frac{1}{\tilde k+\tilde Q}\left[\tilde k+\tilde Q\tilde\omega^2(\tilde k+\tilde Q)\right]-\tilde\omega^2(\tilde k)=A^2. \tag{15}$$

Максимальное значение инкремента нарастания возмущений равно

$$\left(\operatorname{Im}\tilde\Omega(\tilde Q_m)\right)_{\max}=A^2/4\tilde\omega(\tilde k) \tag{16}$$

и достигается при значении волнового вектора $\tilde Q_m$, являющегося корнем уравнения

$$\frac{1}{\tilde k+\tilde Q}\left[\tilde k+\tilde Q\tilde\omega^2(\tilde k+\tilde Q)\right]-\tilde\omega^2(\tilde k)=A^2/2. \tag{17}$$

Диспергирующая однородная плоская нелинейная волна (8) с учетом (4) в процессе развития модуляционой неустойчивости будет эволюционировать в цепочку импульсов — малоамплитудных бризеров, частота повторения которых определяется периодом модуляции исходной волны $L_0=2\pi/Q$, где $Q_{B1}(k,D,L)<Q<Q_{B2}(k,A,D,L)$.

Численные расчеты проводились с использованием программы „MATLAB R12“, характеризующейся своей точностью и надежностью полученных результатов. На рис. 1 показана управляемая волновым вектором $\tilde k$ (или частотой $\tilde\omega(\tilde k)$) область модуляционной неустойчивости

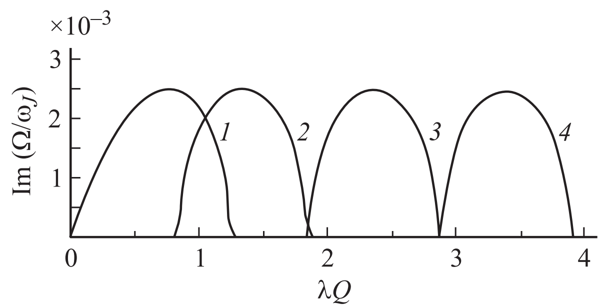

Рис. 1. Управляемая область модуляционной неустойчивости диспергирующих электромагнитных волн при постоянных параметрах $A=10^{-1}$, $D=1$, $L=10^{-2}$ для величины волнового вектора $k=0$ — *1*, 1 — *2*, 2 — *3*, 3 — *4*.

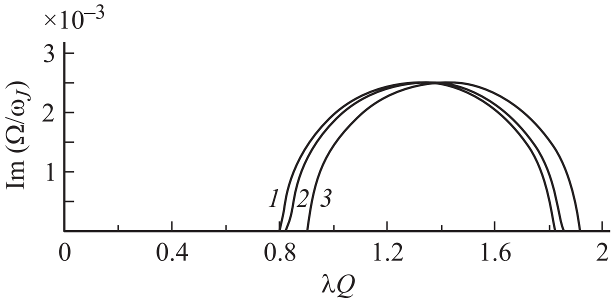

Рис. 2. Области модуляционной неустойчивости диспергирующих электромагнитных волн при постоянных параметрах $A = 10^{-1}$, $k = 1$, $L = 10^{-2}$ для величины приведенной толщины пластины $D = 10^3$ — *1*, 1 — *2*, 10^{-3} — *3*.

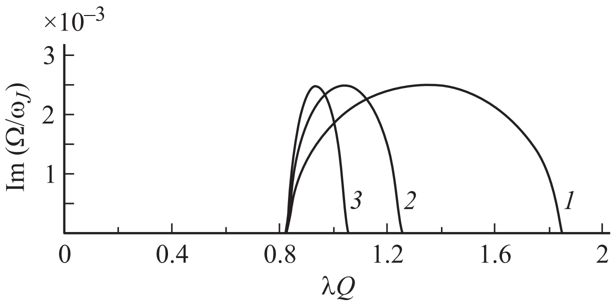

Рис. 3. Области модуляционной неустойчивости диспергирующих электромагнитных волн при постоянных параметрах $A = 10^{-1}$, $k = 1$, $D = 1$ для $L = 10^{-2}$ — *1*, $2.5 \cdot 10^{-2}$ — *2*, $5 \cdot 10^{-2}$ — *3*.

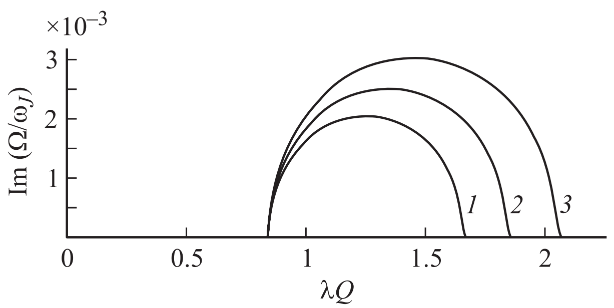

Рис. 4. Области модуляционной неустойчивости диспергирующих электромагнитных волн при постоянных параметрах $k = 1$, $D = 1$ для $L = 10^{-2}$ для величины амплитуды $A = 0.9 \cdot 10^{-1}$ — *1*, 10^{-1} — *2*, $1.1 \cdot 10^{-1}$ — *3*.

диспергирующей плоской нелинейной электромагнитной волны (4), (8) при фиксированных значениях параметров A, D, L для четырех значений приведенного волнового вектора $\tilde{k}$.

На рис. 2 представлены области модуляционной неустойчивости электромагнитной волны (4), (8) при фиксированых значениях параметров $A, \tilde{k}, L$ для трех значений приведенной толщины пластины D.

На рис. 3 изображены области модуляционной неустойчивости электромагнитной волны (4), (8) при фиксированных значениях параметров k, A, D для трех значений параметра L.

На рис. 4 демонстрируются области модуляционной неустойчивости электромагнитной волны (4), (8) при фиксированных значениях параметров k, D, L для трех значений амплитуды A.

Итак, в работе показано, что модуляционная неустойчивость диспергирующей плоской нелинейной волны (4), (8) развивается в конечной области волновых векторов $Q_{B1}(k, D, L) < Q < Q_{B2}(k, A, D, L)$. Для возмущений амплитуды в областях волновых векторов $0 \le Q \le Q_{B1}(k, D, L)$ и $Q \ge Q_{B2}(k, A, D, L,)$ диспергирующая плоская нелинейная электромагнитная волна (4), (8) является устойчивой.

Экспериментально развитие модуляционной неустойчивости возможно наблюдать в длинных переходах Джозефсона в пластинах конечной толщины для произвольного отношения d/λ при возбуждении в них диспергирующих волн малой, но конечной амплитуды.

В заключение автор выражает искреннюю признательностью Ю.В. Медведеву и И.Б. Краснюку за полезные обсуждения, внимание и поддержку.

Список литературы

[1] *Hall B., Lisak M., Anderson D., Semenov V.E.* // Phys. Lett. A. 2004. Vol. 321. N 4. P. 255–262.
[2] *Wen-Cheng X., Shu-Min Zh., Wei-Cheng Ch., Ai-Ping L., Song-Hao L.* // Opt. Commun. 2001. Vol. 199. N 5–6. P. 355–360.
[3] *Карпман В.И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 176 с.
[4] *Кадомцев Б.Б.* Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1976. 240 с.
[5] *Аскарьян Г.А.* // ЖЭТФ. 1962. Т. 42. Вып. 6. С. 1567–1572.
[6] *Lighthill M.J.* // J. Instr. Math. Appl. 1965. Vol. 1. N 2. P. 262–273.
[7] *Алиев Ю.М., Силин В.П., Урюпин С.А.* // Сверхпроводимость. 1992. Т. 5. Вып. 2. С. 228–235.
[8] *Gurevich A.* // Phys. Rev. B. 1992. Vol. 46. N 5. P. 3187–3190.
[9] *Иванченко Ю.М., Соболева Т.К.* // Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 51. Вып. 2. С. 100–102.
[10] *Ivanchenko Yu.M., Soboleva T.K.* // Phys. Lett. A. 1990. Vol. 147. N 1. P. 65–69.
[11] *Иванченко Ю.М., Соболева Т.К.* // ФТТ. 1990. Т. 32. Вып. 7. С. 2029–2033.
[12] *Mints R.G., Snapiro I.B.* // Phys. Rev. B. 1995. Vol. 51. N 5. P. 3054–3057.
[13] *Ломтев А.И.* // Письма в ЖЭТФ. 1999. Т. 69. Вып. 2. С. 132–138.
[14] *Ломтев А.И.* // ФТТ. 2000. Т. 42. Вып. 1. С. 16–22.
[15] *Ломтев А.И.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 9. С. 63–67.
[16] *Кулик И.О., Янсон И.К.* Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах. М.: Наука, 1970. 272 с.
[17] *Кузовлев Ю.Е., Ломтев А.И.* // ЖЭТФ. 1997. Т. 111. Вып. 5. С. 1803–1809.
[18] *Ломтев А.И.* // ЖЭТФ. 1998. Т. 113. Вып. 6. С. 2256–2262.
[19] *Абдуллаев Ф.Х.* // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23. Вып. 2. С. 8–11.

[20] *Ломтев А.И.* // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. Вып. 4. С. 6–14.
[21] *Ломтев А.И.* // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 8. С. 72–78.
[22] *Ломтев А.И.* // ФТТ. 2003. Т. 45. Вып. 8. С. 1358–1363.
[23] *Ломтев А.И.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 64–68.
[24] *Ломтев А.И.* // ФТТ. 2003. Т. 45. Вып. 12. С. 2131–2135.
[25] *Ломтев А.И.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 1. С. 123–126.
[26] *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббсон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.