

01;03

Капиллярный распад цилиндрической пленки феррожидкости, намагниченной до насыщения осевым магнитным полем

© В.М. Коровин

Институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова,
119192 Москва, Россия
e-mail: korovin@imec.msu.ru

(Поступило в Редакцию 28 марта 2007 г.)

Рассматривается пленка магнитной жидкости на поверхности тонкого цилиндра из магнитно-мягкого материала. Проведены оценки порядков величин в уравнениях и краевых условиях, описывающих осесимметричное движение, вызываемое капиллярными и магнитными силами при капиллярном распаде пленки. На базе упрощенных уравнений феррогидродинамики изучено влияние эффекта намагниченности на капиллярный распад пленки. Показано, что за счет намагниченности жидкости происходит сдвиг рэлеевской области капиллярной неустойчивости в сторону длинноволновых мод. В результате на финальной стадии распада формируются более крупные капли по сравнению со случаем немагнитной жидкости.

PACS: 47.65.-d, 75.50.Mm

Введение

Известно, что жидкая пленка слабо изменяющейся толщины, нанесенная на волокно, быстро распадается на капли, достаточно регулярно располагающиеся по длине волокна. Аналогичным образом ведет себя пленка на внутренней поверхности капиллярной трубки. Причиной, вызывающей неустойчивость искривленных жидких пленок, являются силы поверхностного натяжения, стремящиеся минимизировать площадь свободной поверхности. Ввиду широкого проявления в технологических процессах капиллярной неустойчивости и распада пленок исследованию этого явления посвящено значительное количество литературы — см., например, обзор [1].

При значениях толщины волокон порядка 10^{-1} mm время жизни тонких макроскопических жидких пленок не превышает нескольких секунд. В процессе их распада характерные числа Бонда (отношение перепада давления, создаваемого силой тяжести, к лапласовскому давлению) малы. Ввиду этого при теоретическом анализе капиллярной неустойчивости пленок влиянием силы тяжести пренебрегается, что позволяет ограничиться изучением осесимметричных движений жидкости при распаде цилиндрических в начальный момент времени пленок. Экспериментальные данные подтверждают обоснованность такого подхода.

В отличие от быстрораспадающихся приближенно цилиндрических пленок обычных жидкостей в экспериментах с магнитными жидкостями [2–5] был реализован существующий практически неограниченное время строго цилиндрический гораздо более толстый (порядка 1 mm) слой, покрывающий цилиндрический токонесящий проводник — охлаждаемую водой трубку диаметром 2 mm. Стабилизация такой жидкой конфигурации обеспечивается направленными к оси симметрии объемными магнитными силами. Эти силы возникают в магнитной жидкости ввиду неоднородности магнитного

поля, индуцируемого проходящим по проводнику электрическим током. Для стабилизации цилиндрического слоя необходимо, чтобы сила тока превышала некоторое критическое значение. В экспериментах для устранения влияния силы тяжести на форму внешней границы слоя токонесящий проводник вместе с окружающим его слоем магнитной жидкости погружался в немагнитную жидкость, имеющую одинаковую с магнитной жидкостью плотность. При уменьшении силы тока до значений, меньших критического, цилиндрический слой распадается на капли.

В случае магнитного поля с винтовыми силовыми линиями, образованного путем суперпозиции собственного магнитного поля электрического тока, проходящего по цилиндрическому проводнику, и внешнего однородного поля, параллельного проводнику, даже после выключения тока наблюдалась стабилизация достаточно длинного цилиндрического слоя магнитной жидкости, окружающей проводник [5]. Если устойчивый цилиндрический слой, сформированный с помощью собственного магнитного поля электрического тока, проходящего по проводнику, подвергается воздействию внешнего однородного магнитного поля, перпендикулярного проводнику, то на внешней поверхности слоя образуются регулярно расположенные острые выступы [5]. Теоретическое исследование влияния винтового магнитного поля на капиллярную неустойчивость цилиндрического слоя невязкой магнитной жидкости, окружающего токонесящий проводник, проведено в [6]. Экспериментально осесимметричные оболочки из магнитных жидкостей, формируемые с помощью собственного магнитного поля тока, проходящего по тонкой (диаметр 10^{-1} mm) проволоке, наблюдались в [7,8].

В отличие от известных работ в настоящей проведен анализ капиллярной неустойчивости пленки намагниченной до насыщения феррожидкости, покрывающей намагничивающуюся тонкую проволоку, помещенную в продольное магнитное поле. Снаружи пленка окружена

покоящимся газом. Проведен асимптотический анализ уравнений Навье–Стокса, содержащих магнитные силы, и получено уравнение в частных производных, описывающее эволюцию возмущения первоначально цилиндрической свободной поверхности пленки. На базе этого уравнения и уравнений магнитостатики изучено влияние эффекта намагниченности жидкости на капиллярный распад пленки.

Математическое описание движения вязкой магнитной жидкости при капиллярном распаде пленки в магнитном поле

Рассмотрим осесимметричное движение магнитной жидкости при капиллярном распаде пленки переменной толщины, покрывающей намагничивающуюся цилиндрическую подложку — тонкую прямолинейную проволоку. Предполагается, что рассматриваемая система помещена в однородное (вдали от пленки) продольное магнитное поле \mathbf{H}_0 , создаваемое внешними источниками (рис. 1). Введем цилиндрическую систему координат r, ϑ, z с осью z , являющейся осью симметрии подложки. Обозначим через $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\vartheta, \mathbf{a}_z$ единичные векторы вдоль соответствующих координатных линий. Пусть поверхность вращения $r = R(z, t)$, где t — время, представляет границу пленки с окружающим ее покоящимся газом. Внутренней границей пленки является поверхность подложки $t = c$. Будем отмечать индексами $j = 1, 2, 3$ магнитные поля $\mathbf{H}_j(r, z, t) = (H_{jr}, 0, H_{jz})$ соответственно в пленке, в подложке и в окружающем газе. Обозначим как $\mathbf{M}_j(r, z, t) = (M_{jr}, 0, M_{jz})$ намагниченность жидкости ($j = 1$) и намагниченность материала подложки ($j = 2$).

Рассматривается случай намагниченной до насыщения жидкости

$$\mathbf{M}_1 = \frac{M_S \mathbf{H}_1}{H_1}, \quad H_1 = \sqrt{H_{1r}^2 + H_{1z}^2},$$

где M_S — намагниченность насыщения. Предполагается, что закон намагничивания материала подложки $\mathbf{M}_2 = \chi_2 \mathbf{H}_2$ линейный, т.е. магнитная восприимчивость χ_2 не зависит от напряженности поля.

В приближении феррогидродинамики магнитное поле потенциально, так что $\mathbf{H}_j = \text{grad } \Phi_j$, а плотность объем-

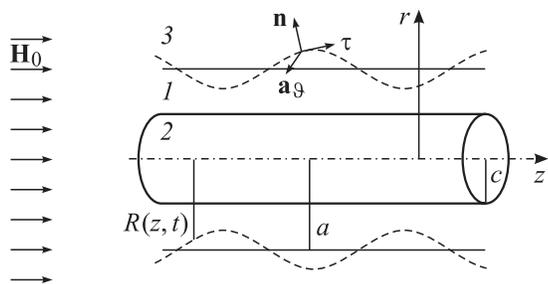


Рис. 1. Геометрия задачи.

ной магнитной силы $\mathbf{f}(r, z, t)$ определяется выражением

$$\mathbf{f}(r, z, t) = \mu_0 M_S \text{grad } H_1, \quad (1)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Н/м — магнитная постоянная.

Вследствие селеноидальности векторов магнитной индукции ($B_j = \mu_0(H_j + M_j)$, $j = 1, 2$, $B_3 = \mu_0 H_3$) распределения потенциалов Φ_j описываются уравнениями

$$\Delta \Phi_1 \left[\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2 \right] \left[M_S + \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2} \right] - M_S \left[\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r \partial z} + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} \right] = 0, \quad (2)$$

$$\Delta \Phi_j = 0, \quad j = 2, 3; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Предполагается, что на границах контакта сред с различными магнитными свойствами поверхностные токи отсутствуют. Граничные условия, выражающие непрерывность тангенциальных компонент магнитного поля и нормальных компонент индукции, записываются следующим образом:

при $r = c$

$$\Phi_1 = \Phi_2, \quad \mu_0 \left[M_S + \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2} \right] \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = \mu_2 \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}, \quad (3)$$

при $r = R(z, t)$

$$\Phi_1 = \Phi_3, \quad \left[M_S + \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2} \right] \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2} \frac{\partial \Phi_3}{\partial n}, \quad (4)$$

где $\mu_2 = \mu_0 \mu_{r2}$ и $\mu_{r2} = 1 + \chi_2$ — магнитная проницаемость и относительная магнитная проницаемость материала подложки соответственно, а \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к свободной поверхности

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + R'^2}} (\mathbf{a}_r - R' \mathbf{a}_z). \quad (5)$$

Здесь и далее штрих означает дифференцирование функции $R(z, t)$ по переменной z . Вдали от пленки магнитное поле \mathbf{H}_3 однородно

$$\text{при } \frac{r}{a} \rightarrow \infty : \quad \mathbf{H}_3 \rightarrow \mathbf{H}_0. \quad (6)$$

Движение магнитной жидкости описывается уравнением неразрывности и уравнениями Навье–Стокса, содержащими объемную магнитную силу (1)

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (7)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left(\Delta u - \frac{u}{r^2} \right) + \frac{\mu_0 M_S}{\sqrt{H_{1r}^2 + H_{1z}^2}} \left(H_{1r} \frac{\partial H_{1r}}{\partial r} + H_{1z} \frac{\partial H_{1z}}{\partial r} \right), \quad (8)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \Delta w + \frac{\mu_0 M_S}{\sqrt{H_{1r}^2 + H_{1z}^2}} \left(H_{1r} \frac{\partial H_{1r}}{\partial z} + H_{1z} \frac{\partial H_{1z}}{\partial z} \right). \quad (9)$$

Здесь u и w — проекции вектора скорости $\mathbf{V}(r, z, t)$ на координатные линии r и z ; $p(r, z, t)$ — давление, а ρ, η — плотность и коэффициент динамической вязкости жидкости. При записи уравнений (8), (9) предполагается, что характерные числа Бонда малы и ввиду этого пренебрегается влиянием силы тяжести.

На свободной поверхности пленки должны выполняться кинематическое и динамические условия. Кинематическое условие при $r = R(z, t)$

$$\frac{\partial R}{\partial t} + R'w = u \quad (10)$$

выражает то обстоятельство, что в каждой точке деформирующейся с течением времени свободной поверхности жидкости вектор скорости перемещения этой поверхности в пространстве [9]

$$\mathbf{D}(z, t) = D \mathbf{n}, \quad D = \frac{1}{\sqrt{1 + R'^2}} \frac{\partial R}{\partial t}$$

должен равняться нормальной составляющей вектора скорости $(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$ жидких частиц, образующих поверхность пленки, поскольку в процессе изменения расстояния $R(z, t)$ от оси симметрии до свободной поверхности жидкие частицы не могут ни отставать от свободной поверхности, ни опережать ее.

Динамическое условие выражает равенство по величине взаимно противоположных по направлению поверхностных сил, с которыми воздействуют друг на друга находящиеся по разные стороны от поверхности раздела физические системы, объединяющие в себе материальную среду (магнитную жидкость или газ) и магнитное поле.

С целью получения наиболее простых выражений при записи динамических условий введем зависящий от формы свободной поверхности ортогональный базис $\mathbf{n}, \mathbf{a}_\vartheta, \boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{n} \times \mathbf{a}_\vartheta$ — единичный касательный к свободной поверхности вектор, лежащий в плоскости, проходящей через ось z (см. рис. 1)

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 + R'^2}} (R' \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_z).$$

В случае осесимметричного движения несжимаемой ньютоновской жидкости после разложения по базису $\mathbf{n}, \mathbf{a}_\vartheta, \boldsymbol{\tau}$ вектора напряжений \mathbf{p}_n [9], записанного в

базисе $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\vartheta, \mathbf{z}_z$, с учетом капиллярных сил и магнитного скачка давления [3,4] приходим к следующим равенствам:

при $r = R(z, t)$

$$p - p_a = \alpha \left[\frac{1}{R(1 + R'^2)^{1/2}} - \frac{R''}{(1 + R'^2)^{3/2}} \right] + \frac{2\eta}{1 + R'^2} \left[\frac{\partial u}{\partial r} - R' \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + R'^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right] - \frac{\mu_0 M_S^2}{2(1 + R'^2)} \frac{(H_{1r} - R' H_{1z})^2}{H_{1r}^2 + H_{1z}^2}, \quad (11)$$

при $r = R(z, t)$

$$(1 - R'^2) \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + R' \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0. \quad (12)$$

Здесь p_a — постоянное давление в газовой среде, а α — коэффициент поверхностного натяжения.

На поверхности подложки должны выполняться условия прилипания при $r = c$

$$u = 0, \quad w = 0. \quad (13)$$

Сформулированная задача (2)–(4), (6)–(13) имеет точное решение

$$R = a = \text{const}, \quad p_0 = p_a + \frac{\alpha}{a}, \quad u = 0, \\ w = 0, \quad \Phi_j^0 = H_0 z, \quad j = 1, 2, 3, \quad (14)$$

описывающее равновесное состояние цилиндрической пленки (толщина $\delta = a - c$) покоящейся магнитной жидкости, находящейся в однородном продольном магнитном поле $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{a}_z$ (рис. 1). При такой конфигурации жидкой пленки в пренебрежении концевыми эффектами объемные магнитные силы и магнитный скачок давления отсутствуют.

Постановка задачи

Созданная в начальный момент времени цилиндрическая пленка покоящейся магнитной жидкости с течением времени неизбежно изменяет форму свободной поверхности, что, в свою очередь, вызывает искажение приложенного магнитного поля $\mathbf{H}_0 = (0, 0, H_0)$. Движение жидкости и неустойчивость цилиндрической пленки возникают под действием капиллярных сил, обязанных своим происхождением кривизне свободной поверхности. В случае цилиндрической пленки характерная кривизна имеет порядок a^{-1} . Учитывая это обстоятельство, заключаем, что наряду с δ в рассматриваемой задаче имеется второй характерный линейный масштаб — величина a . Безразмерный параметр $\gamma = \delta/a$, $0 < \gamma < 1$ представляет относительную толщину пленки.

Обозначим через $\xi(z, t)$ отклонение свободной поверхности магнитной жидкости от исходной цилиндрической формы $r = a$ и положим $R(z, t) = a + \xi(z, t)$, $\Phi_j = \Phi_j^0 + \varphi_j$, где функции $\varphi_j(r, z, t)$, $j = 1, 2, 3$ представляют соответственно возмущения потенциалов маг-

нитных полей в каждой из граничащих друг с другом сред, обладающих различными магнитными свойствами — в жидкой пленке, в твердой подложке и в окружающем пленку газе.

Будем рассматривать случай

$$\frac{|\xi|}{a} \ll 1, \quad \frac{1}{H_0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \ll 1, \quad \frac{1}{H_0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \ll 1, \quad \beta = \frac{M_S}{H_0} \ll 1.$$

При выполнении этих условий в результате линеаризации магнитостатической задачи (2)–(4), (6) с учетом (5) получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z^2} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (15)$$

$$\text{при } r = c: \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \mu_{r2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}, \quad (16)$$

$$\text{при } r = a: \quad \varphi_1 = \varphi_3, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial r} = M_S \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad (17)$$

$$\text{при } r/a \rightarrow \infty: \quad \text{grad } \varphi_3 \rightarrow 0. \quad (18)$$

Поставив целью упрощение гидродинамических уравнений (7)–(9) и краевых (10)–(12) условий, предварительно определим характерные значения фигурирующие в этих уравнениях искомым функций. Следует отметить, что в отличие от краевых условий магнитостатической задачи (3), (4) в гидродинамической задаче линеаризация кинематического (10) и динамических (11), (12) условий на свободной поверхности пленки допустима при более жестком ограничении на величину $|\xi(z, t)|$: вместо $|\xi|/a \ll 1$ требуется выполнение условия $\varepsilon = \xi_0/\delta \ll 1$, где ξ_0 — характерное значение $\xi(z, t)$. Далее это условие считается выполненным.

Для проведения оценок порядков величин в гидродинамической задаче (7)–(13) вместо цилиндрических координатах r, ϑ, z удобнее использовать ортогональную систему координат x, ϑ, z , где x — внутренняя переменная $x = r - a$, причем $-\delta \leq x \leq \xi(z, t)$.

Непосредственно движение жидкости вызывается градиентом возмущенного давления $p_0 + p$, где p_0 — равновесное давление (14), а $p(r, z, t)$ — малое возмущение. С использованием динамического условия на свободной поверхности (11) находим $p \sim \alpha \xi_0 a^{-2} \sim \alpha \varepsilon \gamma a^{-1}$. Обращаясь к проекции уравнения движения (9) на ось z , из условия баланса градиента давления и вязких сил получаем $w \sim p \delta^2 (\eta a)^{-1} \sim \alpha \varepsilon \gamma^{-3} \eta^{-1}$. Далее из уравнения неразрывности (7) находим $u \sim \gamma w$. В линейной постановке характерное время развития неустойчивости, определяемое из кинематического условия (10), имеет порядок $T \sim \xi_0/u \sim \eta a \alpha^{-1} \gamma^{-3}$. Обращаясь к условию непрерывности нормальной составляющей вектора индукции на границе раздела магнитная жидкость–газ (17), находим $h_{1r} \sim \varepsilon \gamma M_S$. Далее рассматривается случай $\gamma \ll 1$.

Используя найденные характерные значения величин, введем безразмерные переменные и искомые функции

(со звездочками)

$$x_* = \frac{x}{\gamma a}, \quad z_* = \frac{z}{a}, \quad t_* = \frac{\alpha \gamma^3}{\eta a} t, \quad \xi = \varepsilon \gamma a \xi_*(z_*, t_*), \quad (19)$$

$$u = \frac{\varepsilon \gamma^4 \alpha}{\eta} u_*(x_*, z_*, t_*), \quad w = \frac{\varepsilon \gamma^3 \alpha}{\eta} w_*(x_*, z_*, t_*),$$

$$p = \frac{\varepsilon \gamma \alpha}{a} p_*(x_*, z_*, t_*), \quad h_{1r} = \varepsilon \gamma M_S h_{1r}^*(x_*, z_*, t_*),$$

$$h_{1z} = \varepsilon \gamma^2 M_S h_{1z}^*(x_*, z_*, t_*).$$

При этом, очевидно, $-1 \leq x_* \leq \varepsilon \xi_*$. Характерная величина возмущения осевой компоненты поля в пленке $h_{1z} \sim \varepsilon \gamma^2 M_S$ установлена с использованием главных членов разложения (по степеням γ) амплитудной функции нормальной моды возмущения потенциала поля и ее производной, найденными из решения магнитостатической задачи (15)–(18) в неограниченной области, заполненной средами с различными магнитными свойствами.

После перехода в уравнениях (7)–(9) к безразмерным переменным получим (звездочки опущены)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\gamma u}{1 + \gamma x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma^7}{Oh} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &+ \frac{\gamma^3}{1 + \gamma x} \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma^4 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{(1 + \gamma x)^2} \right] + \gamma M_a^2 F_x, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma^5}{Oh} \left[\frac{\partial w}{\partial t} + \varepsilon \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ &+ \frac{\gamma}{1 + \gamma x} \frac{\partial w}{\partial x} + \gamma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \gamma M_a^2 F_z, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$F_x = \frac{\frac{\partial h_{1z}}{\partial x} + \frac{\varepsilon \beta}{2} \left(\frac{\partial h_{1r}^2}{\partial x} + \gamma^2 \frac{\partial h_{1z}^2}{\partial x} \right)}{\left[1 + 2\varepsilon \beta \gamma^2 h_{1z}^2 + \varepsilon^2 \beta^2 \gamma^2 (h_{1r}^2 + \gamma^2 h_{1z}^2) \right]^{1/2}},$$

$$F_z = \frac{\frac{\partial h_{1z}}{\partial z} + \frac{\varepsilon \beta}{2} \left(\frac{\partial h_{1r}^2}{\partial z} + \gamma^2 \frac{\partial h_{1z}^2}{\partial z} \right)}{\left[1 + 2\varepsilon \beta \gamma^2 h_{1z}^2 + \varepsilon^2 \beta^2 \gamma^2 (h_{1r}^2 + \gamma^2 h_{1z}^2) \right]^{1/2}},$$

$Oh = \frac{\eta^2}{\rho \alpha a}$ — число Онезорге, $Ma = \sqrt{\frac{a \mu_0}{\alpha}} M_S$ — безразмерная намагниченность насыщения жидкости.

Обозначим $N = \gamma M_a^2$. Считая выполненными условия $N \sim 1$, $Oh \gg \gamma^5$, пренебрежем в уравнениях (20)–(22) малыми величинами, в результате получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (p - N h_{1z}) = 0, \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial z} (p - N h_{1z}). \quad (25)$$

После переноса (ввиду малости $\varepsilon \xi_*(z_*, t_*)$) кинематического (10) и динамических (11), (12) условий с возмущенной свободной поверхности на невозмущенную и упрощений, аналогичных упрощениям, проведенным при выводе уравнений (23)–(25), имеем при $x = 0$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = u, \quad p = -\left(\xi + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right), \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (26)$$

Отметим, что вклады вязких напряжений и магнитного скачка давления в динамическое (для p) условие (26) имеют соответственно порядки γ^2 и εN .

В переменных x, z условие прилипания (13) записывается следующим образом при $x = -1$:

$$u = 0, \quad w = 0. \quad (27)$$

С целью дальнейшего упрощения задачи проинтегрируем уравнения (23)–(25) по координате x . Из уравнения (24) с учетом краевого условия (26) для возмущения давления находим

$$p(x, z, t) = -\left\{\xi + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + N[h_{1z}(0, z, t) - h_{1z}(x, z, t)]\right\}. \quad (28)$$

С использованием этого выражения из уравнения (25) легко найти распределение продольной скорости, удовлетворяющее краевым условиям (26), (27) для функции $w(x, z, t)$

$$w(x, z, t) = \frac{1-x^2}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial^3 \xi}{\partial z^3} + N \frac{\partial h_{1z}}{\partial z} \Big|_{x=0} \right). \quad (29)$$

Проинтегрировав далее по x уравнение неразрывности (23), с учетом первого условия (27) находим распределение поперечной скорости

$$u(x, z, t) = \frac{1}{6} [x(x^2 - 3) - 2] \times \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} + N \frac{\partial^2 h_{1z}}{\partial z^2} \Big|_{x=0} \right). \quad (30)$$

В завершение, подставив это выражение в кинематическое условие (26), приходим к уравнению, описывающему развитие возмущения формы свободной поверхности тонкой пленки магнитной жидкости, подверженной воздействию капиллярных и магнитных сил

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} + N \frac{\partial^2 h_{1z}}{\partial z^2} \Big|_{x=0} \right) = 0.$$

Возвращаясь к размерным переменным, имеем

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\alpha \delta^3}{3\eta a^2} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + a^2 \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} + \frac{\mu_0 a^2}{\alpha} M_S \frac{\partial^2 h_{1z}}{\partial z^2} \Big|_{r=a} \right) = 0. \quad (31)$$

Таким образом, линейная стадия развития возмущения формы свободной поверхности пленки и возмущений магнитных полей описывается решением задачи (15)–(18), (31). После решения этой задачи возмущение давления и распределения скоростей определяются выражениями (28)–(30).

Применительно к плоским слоям магнитных жидкостей аналогичные (31) уравнения с учетом силы тяжести ранее были получены при изучении рэлей-тейлоровской неустойчивости тонкого слоя магнитной жидкости в продольном магнитном поле [10] и при исследовании влияния наклонного магнитного поля на пространственные волновые движения в тонком слое магнитной жидкости, покрывающем горизонтальную немагнитную пластину [11].

Далее рассматривается система уравнений (15), (31) и исследуется поведение ее решения, удовлетворяющего краевым условиям (16), (17) и условию на бесконечности (18) в зависимости от времени.

Дисперсионное уравнение и анализ капиллярной неустойчивости пленки

Для анализа поведения функций $\xi(z, t)$, $\varphi_j(r, z, t)$, $j = 1, 2, 3$ с ростом времени представим решение задачи (15)–(18), (31) в виде суперпозиции нормальных мод — частных решений, в которых переменные разделены и зависимость от z, t выбрана в виде экспоненциального сомножителя

$$Z \exp\{i[kz - \omega(k)t]\},$$

$$\theta_j(r) \exp\{i[kz - \omega(k)t]\}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (32)$$

Здесь i — мнимая единица, Z — константа (фурье-образ функции $\xi(z, t)$, рассматриваемой в некоторый фиксированный момент времени), k — вещественный параметр (волновое число), а функция $\omega(k)$ подлежит нахождению в процессе решения задачи.

С целью нахождения неизвестных амплитудных функций $\theta_j(r)$ подставим представления (32) в уравнения Лапласа (15) и в условия сопряжения (16), (17) потенциалов возмущений магнитных полей на поверхностях раздела сред с различными магнитными свойствами. В результате получим

$$\frac{\partial^2 \theta_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_j}{\partial r} - k^2 \theta_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (33)$$

$$r = c: \quad \theta_1 = \theta_2, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial r} = \mu_{r2} \frac{\partial \theta_2}{\partial r}, \quad (34)$$

$$r = a: \quad \theta_1 = \theta_3, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial r} - \frac{\partial \theta_3}{\partial r} = ikZM_S. \quad (35)$$

Ограниченные при $r = 0$, $r \rightarrow \infty$ решения уравнений (33) записываются следующим образом:

$$\theta_1 = A_1 I_0(kr) + B_1 K_0(kr),$$

$$\theta_2 = A_2 I_0(kr), \quad \theta_3 = B_2 K_0(kr). \quad (36)$$

Здесь $I_0(kr)$, $K_0(kr)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода [12], а A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные константы. При подстановке решений (36) в краевые условия (34), (35) получим систему линейных

однородных алгебраических уравнений относительно A_1 , A_2 , B_1 , B_2 :

$$\begin{aligned} I_0(kc)A_1 - I_0(kc)A_2 + K_0(kc)B_1 &= 0, \\ I_1(kc)A_1 - \mu_{r2}I_1(kc)A_2 - K_1(kc)B_1 &= 0, \\ I_0(ka)A_1 + K_0(ka)B_1 - K_0(ka)B_2 &= 0, \\ I_1(ka)A_1 - K_1(ka)B_1 + K_1(ka)B_2 &= iZM_S. \end{aligned} \quad (37)$$

По известному правилу высшей алгебры отсюда находим

$$A_1 = \frac{d_1}{d}, \quad B_1 = \frac{d_2}{d},$$

где d — определитель системы (37), а d_1, d_2 — определители, получающиеся из определителя d после замены в нем соответственно первого и третьего столбцов столбцом из свободных членов системы уравнений (37). В общем случае представления определителей d, d_1, d_2 в развернутой форме весьма громоздки.

Далее рассматривается легко реализуемый на практике случай, когда относительная магнитная проницаемость материала подложки велика: $\mu_{r2} \gg 1$. В такой ситуации легко найти главные члены разложений определителей d, d_1, d_2 по малому параметру μ_{r2}^{-1} и выразить A_1, B_1 через Z . В результате после подстановки найденных A_1, B_1 в первое выражение (36) имеем

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{ikaK_0(ka)}{K_0(kc)} ZM_S [K_0(kc)I_0(kr) - I_0(kc)K_0(kr)], \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial r} &= \frac{ik^2aK_0(ka)}{K_0(kc)} ZM_S [K_0(kc)I_1(kr) + I_0(kc)K_1(kr)]. \end{aligned} \quad (38)$$

Второе выражение (38) представляет амплитудную функцию радиальной составляющей возмущения магнитного поля в пленке.

Следует отметить, что выражения (38) получены без каких-либо ограничений на величину относительной толщины пленки $\gamma = \delta/a$, в то время как уравнение (31), описывающее развитие возмущения формы свободной поверхности, применимо лишь в случае тонкой ($\gamma \ll 1$) пленки. Ввиду этого при использовании уравнения (31) для анализа нормальных мод $Z \exp[i(kz - \omega t)]$ требуется (с принятой при записи (31) точностью) учитывать лишь линейный по малому параметру γ член разложения амплитудной функции $ik\theta_1$ осевой составляющей возмущения магнитного поля h_{1z} .

Принимая во внимание известное [12] соотношение

$$I_0(x)K_1(x) + I_1(x)K_0(x) = \frac{1}{x}$$

и учитывая равенства

$$kc = ka(1 - \gamma), \quad kr = ka(1 + \gamma x_*), \quad x_* = \frac{r - a}{\gamma a},$$

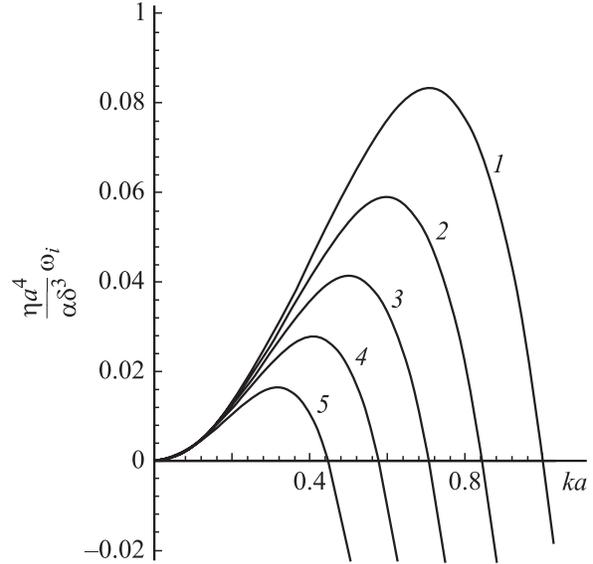


Рис. 2. Дисперсионные зависимости (40) при различных значениях N : 1 — 0, 2 — 0.4, 3 — 1, 4 — 2, 5 — 4.

после разложения функции $\theta_1(kr)$ и ее производной (38) в ряд Тейлора по γ , получим

$$\begin{aligned} \theta_1 &= i\gamma ka ZM_S \left(1 + \frac{r - a}{\gamma a} \right), \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial z} &= ik ZM_S \left\{ 1 - \gamma \left[\frac{r - a}{\gamma a} + \frac{kaK_1(ka)}{K_0(ka)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (39)$$

Выражения для главных членов этих разложений дают основание полагать, что при $h_{1r} \sim \varepsilon \gamma M_S$ имеет место оценка $h_{1z} \sim \gamma h_{1r}$, использованная в (19) при обезразмеривании h_{1z} .

Подстановка выражений (32), (39) в уравнение (31) приводит к дисперсионному уравнению

$$\omega = \frac{i\alpha\delta^3}{3\eta a^2} k^2 [1 - (ka)^2(1 + N)]. \quad (40)$$

Поскольку при всех действительных k значения функции $\omega(k)$ являются чисто мнимыми, то в зависимости от величины k решения (32) имеют либо экспоненциальный рост по времени (при $\text{Im } \omega(k) > 0$), либо экспоненциальное затухание (при $\text{Im } \omega(k) < 0$).

Ввиду четности функции $\omega_i(k) = \text{Im } \omega(k)$ при исследовании эволюции нормальных мод с ростом времени достаточно ограничиться исследованием области волновых чисел $k > 0$. Легко видеть, что $\omega_i(k) > 0$ при $k < k_c$ и $\omega_i(k) < 0$ при $k > k_c$, где $k_c = a^{-1}(1 + N)^{-1/2}$ — пороговое волновое число. В безразмерных переменных дисперсионные зависимости (40) при различных значениях N представлены на рис. 2.

В отсутствие магнитного поля $k_c = a^{-1}$, т.е. неустойчивыми являются моды с длинами волн, превышающими длину внешней границы кольца, представляющего поперечное сечение невозмущенной цилиндрической пленки. В этой связи следует отметить аналогию задачи

о капиллярной неустойчивости цилиндрической пленки ньютоновской немагнитной жидкости и классической задачи о капиллярной неустойчивости цилиндрического столба идеальной жидкости, окруженной покоящимся газом [13].

Из представленных на рис. 2 графиков следует, что магнитные силы стабилизируют некоторый диапазон неустойчивых в отсутствие поля мод. С ростом N (при фиксированных α, γ, a это означает выбор жидкости с большим значением M_S) диапазон неустойчивых мод сужается, однако полная стабилизация цилиндрической свободной поверхности пленки за счет действия магнитных сил невозможна — при любом N моды с волновыми числами $0 < k < a^{-1}(1 + N)^{-1/2}$ неустойчивы.

Наряду со сдвигом области неустойчивости в сторону малых волновых чисел (рис. 2) эффект намагниченности жидкости влияет на длину волны $\lambda_m = 2\pi k_m^{-1}$ наиболее быстро растущей моды. При заданном N безразмерное волновое число $k_m a$ этой моды реализует максимум соответствующей дисперсионной кривой (рис. 2). Экспериментальные данные по капиллярному распаду цилиндрических пленок немагнитных жидкостей свидетельствуют [14], что мода с волновым числом k_m определяет (в пренебрежении сугубо нелинейным эффектом — формированием сателлитов) характерный объем капель, образующихся на финальной стадии капиллярного распада сплошной цилиндрической пленки. Обращаясь к дисперсионному уравнению (40), легко найти $k_m = k_c / \sqrt{2}$, $\lambda_m = 2\sqrt{2} \pi a \sqrt{1 + N}$. Таким образом, при фиксированных α, γ, a с увеличением M_S характерный объем капель $V = \pi \lambda_m \delta (a + c)$ увеличивается. При этом увеличивается также характерное время $\omega_i^{-1}(k_m) = 12\alpha^{-1} \eta^2 a^4 c^3 (1 + N)$ линейной стадии развития неустойчивости.

Заключение

Исследовано влияние эффекта намагниченности жидкости на капиллярную неустойчивость жидкой пленки, покрывающей тонкий намагничивающийся цилиндр. Жидкость намагничена до величины насыщения M_S внешним продольным магнитным полем, напряженность которого много больше M_S . Наружная поверхность пленки граничит с покоящимся газом.

Применительно к случаю капиллярного распада пленки при малых числах Бонда проведены оценки порядков величин в уравнениях движения. Для пленки малой относительной толщины система гидродинамических уравнений, рассматриваемая совместно с граничными условиями на свободной поверхности пленки, после упрощения сведена к уравнению в частных производных четвертого порядка, связывающему возмущение формы поверхности пленки, подверженной воздействию нестационарных капиллярных и магнитных сил, с возмущением магнитного поля внутри пленки. Расчет возмущений магнитного поля, вызываемых деформацией первоначально цилиндрической свободной поверхности

пленки, проводится на базе уравнений и граничных условий магнитостатики. Возмущение давления и распределения продольной и поперечной скоростей явным образом выражаются через возмущение формы пленки и возмущение магнитного поля в области, занятой жидкостью. Предложенная постановка задачи о капиллярной неустойчивости намагниченной пленки существенно упрощает вывод и анализ дисперсионного уравнения.

Показано, что магнитные силы стабилизируют некоторый диапазон неустойчивости в отсутствие поля нормальных мод с длинами волн, превышающими длину внешней границы кольца, представляющего поперечное сечение исходной цилиндрической пленки. Аналитически найдено зависящее от M_S пороговое волновое число, разделяющее области неустойчивости и устойчивости. С увеличением намагниченности насыщения жидкости M_S величина наибольшего (на всем интервале волновых чисел неустойчивых мод при фиксированном M_S) показателя экспоненциального роста нормальных мод уменьшается.

Получена простая формула, связывающая длину волны наиболее быстро растущей моды с физическими параметрами рассматриваемой системы. Проведенный анализ показывает, что с ростом M_S происходит увеличение характерного объема капель, образующихся на финальной стадии капиллярного распада цилиндрической пленки.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 05-01-00839, 08-01-00026).

Список литературы

- [1] *Quére D.* // Ann. Rev. Fluid Mech. 1999. Vol. 31. P. 347–384.
- [2] *Архипенко В.И., Барков Ю.Д., Баштовой В.Г.* и др. // ДАН БССР. 1979. Т. 23. С. 341–343.
- [3] *Розенцвейг Р.* Феррогидродинамика. М.: Мир, 1989. 357 с.
- [4] *Берковский Б.М., Медведев В.Ф., Краков М.С.* Магнитные жидкости. М.: Химия, 1989. 239 с.
- [5] *Архипенко В.И., Барков Ю.Д.* // ПМТФ. 1980. № 3. С. 98–105.
- [6] *Коровин В.М.* // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 10. С. 14–22.
- [7] *Bacri J.-C., Perzynski R., Salin D.* et al. // Europhys. Lett. 1988. Vol. 5. N 6. P. 547–552.
- [8] *Bacri J.-C., Frenois C., Perzynski R.* et al. // Rev. Phys. Appl. 1988. Vol. 23. P. 1017–1022.
- [9] *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1983. 528 с.
- [10] *Korovin V.M., Kubasov A.A.* // JMMM. 1999. Vol. 202. P. 547–553.
- [11] *Коровин В.М.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 8. С. 1–8.
- [12] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. М.: Мир, 1979. 830 с.
- [13] *Стретт Дж.В.* Теория звука. Т. 2. М.: ГИТТЛ, 1955. 475 с.
- [14] *Goren S.* // J. Colloid Sci. 1964. Vol. 19. P. 81–86.