

01;05

## Эволюция объемных солитонов деформации в полимерных волноводах на больших расстояниях

© Г.В. Дрейден, А.М. Самсонов, И.В. Семенова

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,  
194021 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: Samsonov@math.ioffe.ru

(Поступило в Редакцию 28 июня 2007 г.)

Обсуждаются результаты экспериментов по распространению солитонов продольной деформации в волноводах, выполненных из полистирола и плексигласа, настолько длинных, чтобы вызвать заметные изменения формы волны и амплитуды. На основе новых данных получены оценки декремента затухания для нелинейных волн в этих материалах, впервые показано существование аномально слабого затухания солитона в полимерах, характеризующихся сильной диссипацией линейных волн.

PACS: 61.82.Pv, 62.20.-x, 62.30.+d, 62.50.+p, 42.40.Kw, 46.40.Cd

### Введение

Полимерные материалы широко используются для защиты от вибраций и ударных волн благодаря свойству значительно уменьшать амплитуду упругих волн. Однако свойство полимеров эффективно гасить упругие волны, как правило, демонстрируется только для линейных волн. С другой стороны, согласно общей теории, уединенные волны деформации (солитоны, для краткости) не испытывают затухания на огромных расстояниях в сравнении с характерным размером волновода (его поперечным сечением); напомним лишь классический натуральный эксперимент Дж. Скотта Рассела по наблюдению движения солитона по поверхности воды на расстоянии в несколько миль. Теория нелинейных волн (например, солитона) продольной деформации также указывает на отсутствие затухания и возможность распространения таких импульсов в упругих волноводах, имеющих соответствующие характеристики, на достаточно большие расстояния (см., например, [1]).

В работе [2] были представлены предварительные экспериментальные результаты по эволюции солитонов продольной деформации в длинных волноводах. Оценки, которые были приведены в [2], основывались на экспериментах по распространению солитонов в прямоугольных стержнях из полистирола (ПС). Анализ экспериментальных результатов позволил сделать заключение о пренебрежимо малом изменении амплитуды солитона и его формы. Однако последующие успешные эксперименты с прямоугольными стержнями из плексигласа (ПММА) показали, что при распространении в этих стержнях солитоны претерпевают некоторые изменения своей амплитуды и формы. Эти новые данные потребовали уточняющих дополнительных экспериментов и более строгого анализа. В результате было показано, что солитон в полистироле также испытывает некоторые изменения амплитуды и формы, однако они значительно меньше, чем в стержнях из ПММА.

Основной принцип формирования солитона деформации аналогичен принципу возникновения солитонов

любого другого вида — оптических, поверхностных и т.д. Для возникновения солитона необходимы наличие волноведущей структуры и обеспечение баланса ее нелинейных и дисперсионных характеристик, а также начальный импульс, имеющий подходящие параметры. Генерация солитона продольной деформации в нелинейно упругом волноводе может быть инициирована короткой и сильной волной упругой деформации, распространяющейся вдоль него. При преобладании нелинейной упругости над дисперсией крутизна фронта волны может резко возрасти, вплоть до возникновения необратимой деформации волновода. С другой стороны, при преобладании дисперсии над нелинейностью первоначальный импульс очень быстро затухает. Баланс этих свойств нелинейной упругости и дисперсии волновода обеспечивает генерацию солитона продольной деформации — волны, устойчивой к основным линейным механизмам затухания упругой энергии и сохраняющей постоянную форму при движении вдоль волновода на значительные расстояния. Таким образом, солитоны должны обладать физической способностью переносить упругую энергию почти без потерь на большие расстояния.

Следующие свойства позволяют считать наблюдаемые нами волны солитонами продольной деформации:

- форма солитона продольной деформации теоретически постоянна и сохраняется почти неизменной в экспериментах по распространению солитона по однородному волноводу;

- за солитоном не наблюдается упругой волны противоположного знака;

- амплитуда и ширина импульса (солитона) пропорциональны его скорости в отличие от любых линейных волн;

- солитоны продольной деформации фокусируются в сужающемся стержне.

Резонно предположить, что „наихудшие“ с точки зрения распространения *линейных* упругих волн материалы (ПС и ПММА) будут удобны для наблюдения за поведением *нелинейных* упругих волн в волноводах.

Если механизм затухания солитонов похож на тот, что заставляет диссипировать линейные волны, то увеличение расстояния наблюдения в 2–3 раза позволит показать, как вязкость аморфных пластиков разрушает и нелинейные волны деформации. В противном случае необходимо будет признать, что физический механизм нелинейного затухания кардинально отличается от известных и требует детального изучения.

В качестве материалов для волноводов были выбраны прозрачные полимеры полистирол и плексиглас, обладающие уникальной комбинацией нелинейной упругости, сильного затухания линейных волн и оптических свойств, позволяющих выполнять регистрацию волновой картины в видимом свете.

### О затухании упругих волн в полимерах

Как теоретическая, так и физическая концентрация затухания упругих волн в прозрачных стеклообразных полимерах представляются неудовлетворительными. Количество работ в этой области очень ограничено, а большая часть современных исследований посвящена изучению затухания ударных волн в полимерах на очень малых расстояниях — от сотен микрометров до миллиметра [3,4]. В работе [5] полимеры рассматриваются как материалы, наиболее подходящие для гашения вибраций, благодаря их высокой демпфирующей способности. ПММА отмечен в [5] как материал, имеющий наибольший модуль потерь (по сравнению с другими полимерами) и очень высокий коэффициент затухания, которые обусловлены параметрами микроструктуры, такими как дислокации, зерна, фазовые границы и т.д. (очевидно, что все они не играют большой роли при распространении длинных пологих волн). Это означает [6], что даже для изотропных материалов простейшая теоретическая формула для коэффициентов затухания как продольной, так и поперечной волны очень часто далека от согласования с экспериментом, а при низких частотах частотная зависимость декремента затухания, как правило, незначительна.

Было показано, что затухание ультразвука имеет частотную зависимость, в то время как исследования частотной зависимости затухания ударных волн в полимерах редки. В наших оценках использовались справочные данные из [7], где приведены значения коэффициента (декремента) затухания звуковых волн ( $\alpha$ ) в ПС и ПММА. По этим данным была проведена оценка коэффициента затухания для исходной ударной волны, используемой в экспериментах для генерации солитона. Как было показано в [8], ударная волна, возникающая в воде при лазерном испарении помещенной в нее металлической пленки, представляет собой узкий пик сжатия шириной порядка  $1 \mu\text{m}$ , за которым следует достаточно длинная ( $\sim 1 \text{mm}$ ) зона разрежения небольшой амплитуды. Оценка частоты ( $f$ ), соответствующей такой волне, дает значения порядка 10 MHz и выше. Декремент затухания представляет собой коэффициент в экспоненциальном

законе  $U = U_0 \exp(-\alpha x)$  затухания некоторой величины  $U$ . Согласно [7,9],  $\alpha/f$  для ПС и ПММА равны —  $1.7 \cdot 10^{-5}$  и  $2.5 \cdot 10^{-5} \text{ s/m}$  соответственно, — что для ударной волны приводит к следующим значениям  $\alpha$ :  $17 \text{m}^{-1}$  — для ПС и  $25 \text{m}^{-1}$  для ПММА. Таким образом, в ПС амплитуда ударной волны уменьшается в  $e$  раз на расстоянии 6 см, а в ПММА — на расстоянии 4 см от источника.

### О теории нелинейных уединенных волн

Теория нелинейных уединенных волн деформации в упругих волноводах описывает распространение длинных продольных волн с помощью уравнения с двумя дисперсиями (УДД) вида

$$|u|_{tt} - c^2|u|_{xx} = \frac{1}{2} \left[ \frac{|\beta|}{\rho} u^2 \text{sgn } u \text{sgn } \beta + R^2 v^2 (c^2|u|_{xx} - (1 - \nu)|u|_{tt}) \right]_{xx}, \quad (1)$$

полученного в [10] и хорошо изученного в дальнейшем (см., например, [1,11]). Здесь  $R$  есть радиус стержня,  $c$  — „стержневая“ скорость линейных волн,  $\rho$  — плотность материала,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $U_x = u$  — компонента градиента продольного смещения, для краткости называемая деформацией. Предполагается, что волны распространяются вдоль оси  $x$  во времени  $t$ , нижний индекс означает дифференцирование, а  $\beta \equiv 3E + 2l(1 - 2\nu)^3 + 4m(1 + \nu)^2(1 - 2\nu) + 6nv^2$  есть коэффициент нелинейности, зависящий от модуля Юнга  $E$  и модулей упругости 3-го порядка ( $l, m, n$ ) — модулей Мурнагана. Важно, что как  $\beta$ , так и  $U_x = u$  могут иметь любой знак в зависимости от параметров материала и типа волны.

Явная зависимость типа продольной волны от знака нелинейности и простой анализ [1] позволяют записать солитонное решение УДД в виде

$$u = A \text{ch}^{-2} \frac{1}{L(A)} [x \pm V(A)t] \quad (2)$$

и соотношения для скорости  $V$  и ширины импульса  $L$ , при выполнении которых солитон деформации существует

$$V^2 = c^2 + \frac{A\beta}{3\rho}; \quad L^2 = 2R^2 v^2 \left( \frac{3E}{A\beta} - \frac{1 - \nu}{\nu} \right). \quad (3)$$

Видно, что при  $\text{sgn } A \neq \text{sgn } \beta$ ,  $\nu > 0$  имеем  $L^2 < 0$ , и солитон не существует, тогда как значение  $\beta < 0$  позволяет, например, получить волну сжатия с  $A < 0$ .

Если вместо прямого кругового цилиндра (стержня) рассмотреть волновод произвольного одноосвязного сечения, то оператор в (1) не изменится, а дисперсионный

коэффициент примет вид

$$|u|_{tt} - c^2|u|_{xx} = \left[ \frac{|\beta|}{\rho} u^2 \operatorname{sgn} u \operatorname{sgn} \beta + \frac{J}{S} v^2 (c^2|u|_{xx} - (1-v)u_{tt}) \right]_{xx}, \quad (4)$$

что приведет к небольшим изменениям в оценке  $L$ :

$$L^2 = 2 \frac{J}{S} v^2 \left( \frac{3E}{A\beta} - \frac{1-v}{v} \right). \quad (5)$$

Вместо радиуса здесь появился однородный момент инерции  $J$  поперечного сечения  $S$ , определяемый обычным образом как

$$J = \int_S (y^2 + z^2) dS, \quad (6)$$

где  $y$  и  $z$  — суть декартовы координаты в плоскости поперечного сечения.

Теперь можно оценить влияние перехода от квадратного к вписанному в него круглому сечению волновода на параметры солитона деформации. Вычислив  $J/S$  для квадрата  $2a \times 2a$ :  $J/S = 2a^2/3$  и для вписанного в него круга радиуса  $R = a$ :  $J/S = a^2/2$ , заключаем, что ширина солитона в цилиндре немного меньше (на  $1/6$ ), чем в бруске при тех же скорости и амплитуде. Эксперименты со стержнем квадратного сечения технически проводить более удобно.

Согласно теории, солитон не подвержен никакому рассеянию [12], появление нечетной производной в (1) как формальная причина диссипации [1] описывает рассеяние, но не позволяет найти константу диссипации в силу отсутствия каких-либо опытных данных по рассеянию объемных продольных уединенных волн деформации в твердотельных волноводах. Найти в литературе каких-либо данных по теоретической или экспериментальной оценке нелинейного затухания в полимерах пока не удалось; оказалось, что даже значения динамических модулей упругости 3-го порядка для полимеров доступны лишь в редких случаях.

## Эксперименты по затуханию солитонов деформации

Экспериментальная установка, предназначенная для генерации и наблюдения солитонов продольной деформации в различных волноводах, была детально описана в наших предыдущих работах ([13–15]). Установка состоит из двух основных частей — канала генерации солитона деформации в твердотельном волноводе и канала регистрации волновой картины.

Солитон возбуждается из первичной ударной волны, возникающей в воде при взрывном испарении металлизированной пленки, расположенной вблизи входного торца волновода. На рис. 1 приведена интерферограмма

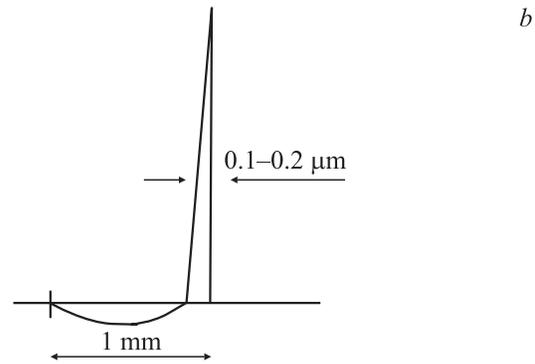


Рис. 1. Интерферограмма ударной волны в воде вблизи мишени (а) и профиль ударной волны в воде (б).

такой ударной волны вблизи мишени (а) и профиль волны (б), построенный при обработке одновременно зарегистрированных голографической интерферограммы и двухэкспозиционной теневой фотографии волны [8]. Войдя в волновод (стержень), первичная ударная волна преобразуется, и начинается хорошо видимый процесс формирования из нее солитона деформации (см. рис. 2, на котором показаны интерферограммы волновой картины в начале стержня в два последовательных момента времени).

Чтобы избежать возникновения в воде волн, сопровождающих распространение солитона деформации в стержне (см. рис. 2 и работу [16], где описаны так называемые пуассоновы волны, генерируемые в воде при распространении упругой волны по помещенному в нее твердому стержню), только небольшая часть волновода (7 см) была помещена в кювету с водой. На большем расстоянии, где регистрируется волновая картина, волновод находится в воздухе.

**Таблица 1.** Основные параметры материала и размеры волновода

Материал	$E, 10^{10} \text{N/m}^2$	$\nu$	$\rho, \text{g/cm}^3$	$\lambda_0, 10^{-7} \text{m}$	$n_1$	Размеры стержня, mm	
						$h$	Длина
Полистирол	0.37	0.34	1.06	6.94	1.59	10	570
ПММА	0.5	0.34	1.16	6.94	1.49	10	600

Как было показано выше, форма поперечного сечения стержня не оказывает заметного влияния на параметры распространяющегося по нему солитона. Поэтому в экспериментах использовался стержень с квадратным сечением, что позволило увеличить размер области

наблюдения внутри волновода. Только небольшая часть волновода (длиной 7 см), помещенная в кювету с водой, была выполнена в виде цилиндра. Длина цилиндрической части была выбрана исходя из того, что, как показали наши предыдущие эксперименты, на расстоянии около 7 см от входного торца стержня солитон успевает полностью сформироваться. При переходе в волновод с квадратным сечением он претерпевает лишь незначительные изменения. Торец стержня необходимо поместить в кювету с водой для облегчения входа упругой энергии в твердотельный волновод, поскольку волновые сопротивления воды и используемых полимерных материалов близки. Поэтому возникшая в результате лазерного испарения мишени энергия уединенных волн входит в волновод без существенных потерь на отражение от его торца.

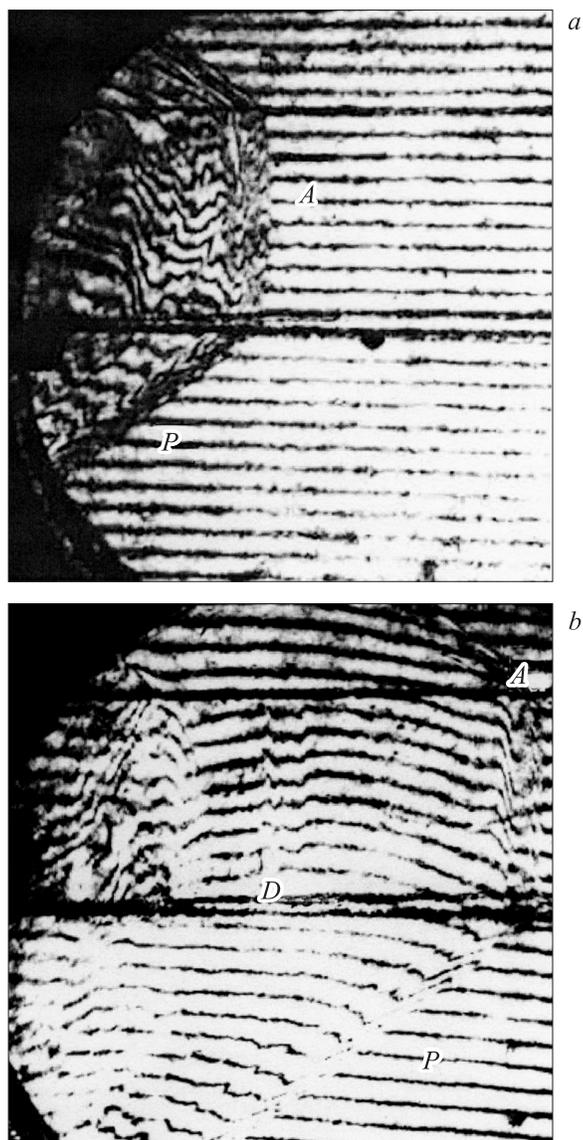
Регистрация волновой картины осуществляется методом голографической интерферометрии. Диаметр поля зрения составляет 50 мм. Установка позволяет регистрировать волновую картину внутри и снаружи прозрачного стержня благодаря возникающим при распространении волн изменениям плотности, которые ведут к соответствующему сдвигу несущих интерференционных полос, образующихся при восстановлении полученной двухэкспозиционной голограммы. Соотношение между зарегистрированным сдвигом интерференционных полос  $\Delta K$  внутри стержня и амплитудой солитона ( $A$ ) можно записать в виде

$$A = \frac{\Delta K \lambda_0}{h(n_1 - 1)(1 - \nu)}, \quad (7)$$

где  $\lambda_0$  — длина волны регистрирующего лазера,  $n_1$  — показатель преломления твердого тела,  $h$  — толщина прямоугольного стержня вдоль регистрирующего пучка света,  $\nu$  — коэффициент Пуассона. В табл. 1 приведены упругие характеристики ПС и ПММА, показатели преломления этих материалов, а также величины параметров, использовавшихся в экспериментах. Во время экспериментов энергия излучения лазера, создающего солитон, контролировалась и поддерживалась постоянной.

## Результаты экспериментов и их обсуждение

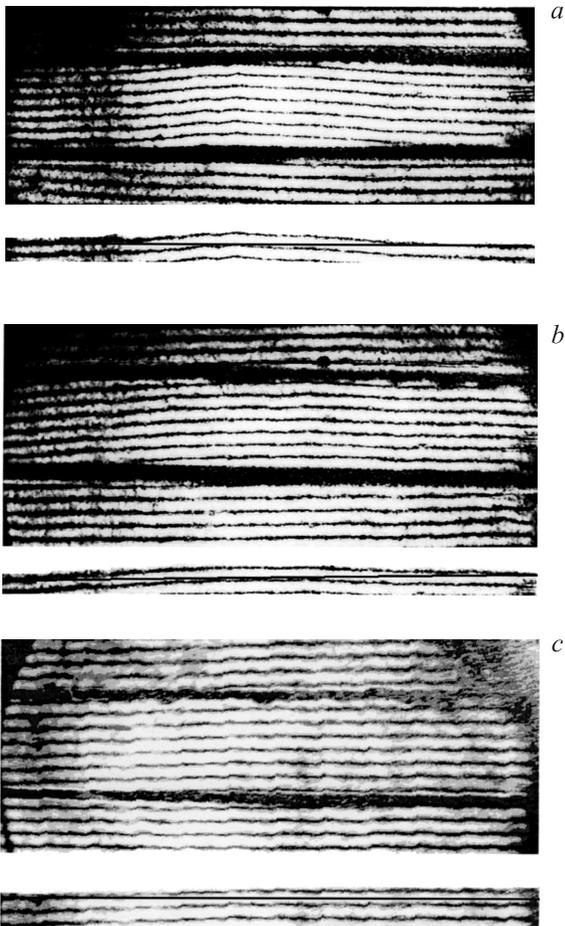
На рис. 3,4 приведены типичные голографические интерферограммы солитонов продольной деформации в стержнях из ПС и ПММА на трех последовательных расстояниях от входного торца волновода. Волна



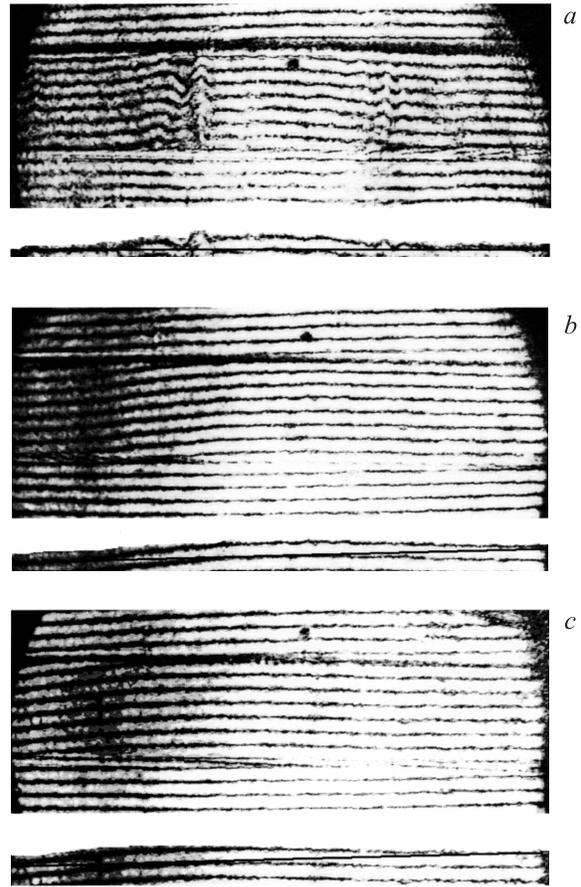
**Рис. 2.** Волновая картина в стержне и окружающей жидкости при входе в него ударной волны (а) и процесс формирования из ударной волны солитона деформации (б).  $A$  — первичная ударная волна,  $P$  — пуассоновы волны в воде, окружающей стержень,  $D$  — процесс формирования солитона деформации.

движется слева направо; на сноске под каждой интерферограммой показан сдвиг полосы, возникающий в результате прохождения солитона. Зарегистрированные интерферограммы солитонов продольной деформации в различных частях стержня позволяют проследить эволюцию волновой картины по мере продвижения волны по стержню. Солитон выглядит как довольно протяженная „корытообразная“ объемная волна, за которой отсутствует какая-либо волна разрежения. Необходимо отметить, что на рис. 3, *c* показана только задняя часть солитона. В связи с затуханием ширина солитона в ПММА увеличивается и становится равной размеру кадра. Поэтому расчеты ширины солитона в ПММА были сделаны при использовании двух интерферограмм, зарегистрированных в последовательные моменты времени.

Для получения надежных результатов было обработано большое число интерферограмм, зарегистрированных на одном и том же расстоянии от входного торца стержня. Осредненные результаты обработки этих интерферограмм приведены на рис. 5, 6, где представлена форма и амплитуда солитона на трех различных расстояниях при его распространении вдоль волновода.



**Рис. 3.** Солитон продольной деформации в ПММА на расстояниях 70–120 (*a*), 340–390 (*b*) и 550–600 mm (*c*) от входного торца стержня.



**Рис. 4.** Солитон продольной деформации в полистироле на расстояниях 70–120 (*a*), 340–390 (*b*) и 520–570 mm (*c*) от входного торца стержня.

Видно, что в обоих материалах солитоны претерпевают аналогичные изменения: их амплитуда уменьшается, в то время как ширина увеличивается. Однако „масса“ солитона, вычисленная путем интегрирования кривой, в пределах ошибки измерений остается постоянной (табл. 2). „Энергия“, полученная интегрированием кривой  $A^2$ , наоборот, уменьшается. Эти данные показывают, что реально наблюдаемая волна демонстрирует свойства уединенной волны (постоянство „массы“), хотя при распространении вдоль волновода она испытывает диссипацию (потерю энергии).

Найдем логарифмический декремент затухания для нелинейной объемной волны по обычной формуле

$$\alpha = [1/(x_2 - x_1)] \ln(\Delta K_1/\Delta K_2), \quad (8)$$

где  $x_1, x_2$  — точки измерений (обычно в области, где амплитуда солитона приближается к максимуму),  $\Delta K_i$  — сдвиг полос, измеренный на интерферограммах, полученных на различных расстояниях (рис. 3).

В табл. 2 приведены полученные данные по значениям сдвига полос и ширины солитона, измеренные по интерферограммам, соответствующая амплитуда солитона, вычисленная по (7), рассчитанные величины „массы“ и „энергии“ солитона и декремента затухания  $\alpha$ .

**Таблица 2.** Изменение параметров солитона, обусловленное затуханием в стержнях из ПС и ПММА

Расстояние, mm	Сдвиг полос ( $\Delta K$ )	Максимальная амплитуда деформации, $10^{-4}$	Ширина, mm	$\alpha \cdot 10^{-3}$ , $\text{cm}^{-1}$ (расстояние затухания в $e$ раз)	„Масса“ ( $\int A dx$ )	„Энергия“ ( $\int A^2 dx$ )
Стержень из ПС						
70–125	1.00	1.78	34.2	4.3 (232.56)	20.8	15.84
340–395	0.89	1.58	41.4	4.8 (208.33)	21.2	14.05
520–575	0.81	1.44	45.0	5.5 (181.82)	21.3	12.52
Среднее				4.9 (204.08)		
Стержень из ПММА						
70–125	1.00	2.15	38.4	4.9 (204.1)	18.9	12.23
345–400	0.88	1.89	43.2	8.6 (116.3)	19.1	11.26
545–600	0.65	1.39	54.4	12.6 (79.4)	19.6	10.07
Среднее				8.7 (114.94)		

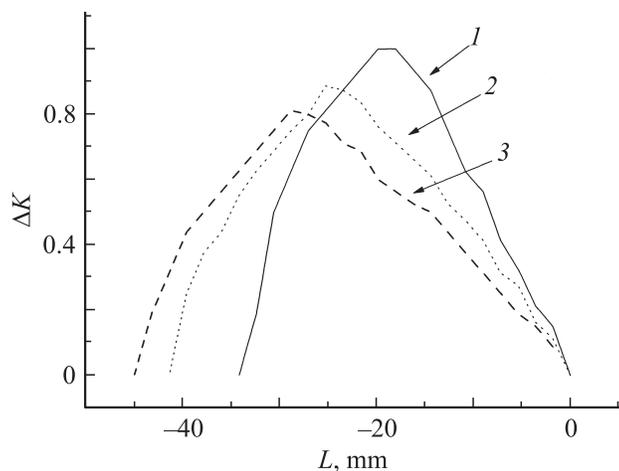
**Таблица 3.** Коэффициент затухания для линейных и нелинейных объемных упругих волн в ПС и ПММА

Материал	$\alpha_0$ (линейные волны), $\text{cm}^{-1}$	$\alpha$ (уединенные волны), $\text{cm}^{-1}$	$\alpha_0/\alpha$
ПС	0.17 (затухание в $e$ раз на 6 cm)	0.005	34
ПММА	0.25 (затухание в $e$ раз на 4 cm)	0.009	28

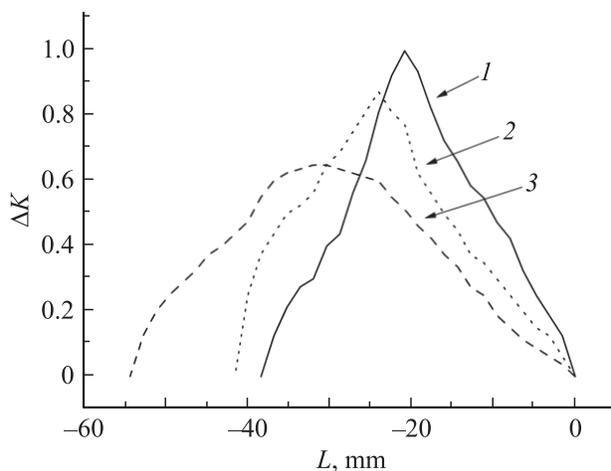
Отметим, что, согласно полученным результатам, величина декремента затухания не остается постоянной, а существенно изменяется (возрастает) при распространении солитона вдоль стержня. Можно предположить, что эти изменения могут быть вызваны нелинейным характером диссипации нелинейных волн в этих материалах. К сожалению, в литературе не удалось найти ни теоретических оценок, ни экспериментальных данных по затуханию нелинейных волн в полимерах. Для сравнения в табл. 3 приведены оценки  $\alpha$  для линейных волн (по материалам [7,9]) и нелинейных объемных

солитонов. Как видно, они различаются приблизительно в 30 раз.

Другое интересное свойство солитона, которое можно наблюдать на рис. 5, 6, состоит в изменении его формы. На первом расстоянии (сплошная кривая) в обоих материалах солитон имеет относительно симметричную форму, однако при распространении вдоль прямоугольного стержня его передний фронт сглаживается, а задний — становится круче. Это может быть вызвано не вполне пока ясными нелинейными диссипативными свойствами волновода.



**Рис. 5.** Изменение формы солитона продольной деформации при его распространении вдоль стержня из полистирола. Направление движения волны — слева направо. Солитон зарегистрирован на расстояниях: 70–120 (кривая 1), 340–390 (кривая 2) и 520–570 mm (кривая 3) от входного торца волновода.



**Рис. 6.** Изменение формы солитона продольной деформации при его распространении вдоль стержня из ПММА. Направление движения волны — слева направо. Солитон зарегистрирован на расстояниях: 70–120 (кривая 1), 340–390 (кривая 2) и 550–600 mm (кривая 3) от входного торца волновода.

## Заключение

Таким образом, показано, что при распространении вдоль тонкого прямоугольного стержня на расстояния более полуметра объемный солитон упругой деформации не испытывает значительного затухания ни по амплитуде, ни по форме, что хорошо согласуется с общей теорией солитонов. Наличие небольшого затухания и его количественный анализ позволяют дать простейшую оценку декремента затухания для нелинейных волн (объемных солитонов) в длинных волноводах, выполненных из полимерных материалов ПС и ПММА. Величина декремента затухания  $\alpha$  меняется по мере продвижения солитона вдоль прямоугольного стержня, эти результаты приведены выше с точностью погрешности измерений. Можно предположить, что эти изменения могут быть вызваны нелинейным характером затухания солитонов в полимерных волноводах, что требует дальнейших теоретических и экспериментальных исследований процесса затухания нелинейных объемных волн плотности в полимерах. Распространение солитонов в полимерных прямоугольных стержнях необычно стабильно по сравнению с любыми другими упругими волнами. Длинные нелинейные уединенные волны испытывают аномально слабое (в 30 раз меньше, чем у линейных звуковых волн) затухание, оцененное в результате наших экспериментов, которое может быть использовано для изучения времени развития упругих напряжений, определения нелинейных упругих характеристик материалов и т. п.

Возможность существования и распространения на большие расстояния такого типа волн в полимерных материалах весьма важна при расчетах вибростойкости и динамики упругих конструкций, а также для оценки порога разрушения и эффективности неразрушающего контроля материалов.

## Список литературы

- [1] *Samsonov A.M.* Strain solitons in solids and how to construct them. Chapman&Hall/CRC Press, 2001. 248 p.
- [2] *Semenova I.V., Dreiden G.V., Samsonov A.M.* // Proc. SPIE. 2004. Vol. 5532. P. 308–315.
- [3] *Newlander C.D., Cherest J.A., Lilly M.C., Eisler R.D.* Wave propagation in polymers. Part II. Shock Compression of Condensed Matter — 1999 / Ed. by M.D. Furnish, L.C. Chabildas, R.S. Hixson. 2000. P. 523–526.
- [4] *Esposito E., Scalise L., Tornari V.* // Opt. Laser. Eng. 2002. Vol. 38. P. 207–215.
- [5] *Chung D.D.I.* // J. Mater. Sci. 2001. Vol. 36. P. 5733–5737.
- [6] *Красильников В.А., Крылов В.В.* Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984. 400 с.
- [7] *Григорьев И.С., Мелихов Е.З.* Физические величины. Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
- [8] *Harith M.A., Salvetti A., Singh D.P., Pallesci V., Vaselli M., Dreiden G.V., Ostrovsky Yu.I., Semenova I.V.* // J. Appl. Phys. 1989. Vol. 66. N 11. P. 5194–5197.
- [9] *Peselnick L., Zietz I.* // Geophysics. 1959. Vol. 24. P. 285–296.
- [10] *Самсонов А.М.* // Оптимизация конструкций при динамических нагрузках / Под ред. Ю. Лепик. Тарту: ТГУ, 1982. С. 71–72.
- [11] *Самсонов А.М.* // ДАН СССР. 1984. Т. 277. № 2. С. 332–335.
- [12] *Додд Р.* и др. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.
- [13] *Дрейден Г.В., Порубов А.В., Самсонов А.М., Семенова И.В., Сокуринская Е.В.* // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21. Вып. 11. С. 42–46.
- [14] *Самсонов А.М., Дрейден Г.В., Порубов А.В., Семенова И.В.* // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. Вып. 11. С. 61–68.
- [15] *Samsonov A.M., Dreiden G.V., Porubov A.V., Semenova I.V.* // Phys. Rev. B. 1998. Vol. 57. N 10. P. 5778–5787.
- [16] *Дрейден Г.В., Островский Ю.И., Самсонов А.М., Семенова И.В., Сокуринская Е.В.* // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. Вып. 4. С. 310–313.