

01;03

# Неосесимметричные осцилляции заряженной струи вязкой жидкости конечной проводимости

© А.И. Григорьев, Н.В. Воронина, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
150000 Ярославль, Россия  
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 16 октября 2006 г. В окончательной редакции 18 июля 2007 г.)

Введено дисперсионное уравнение для неосесимметричных осцилляций заряженной струи вязкой несжимаемой электропроводной жидкости с конечной электропроводностью. В асимптотике малой вязкости, когда дисперсионное уравнение можно свести к степенному алгебраическому уравнению, найдены аналитические выражения для его корней и проанализированы их зависимости от электропроводности жидкости и подвижности носителей заряда. Учет эффекта конечности скорости переноса электрического заряда приводит к появлению дополнительного затухания и некоторому снижению инкрементов неустойчивости.

PACS: 47.1p-g

## Введение

Изучение осцилляции и устойчивости (капиллярного распада) заряженных струй жидкости представляет интерес в связи с многочисленными приложениями в различных направлениях техники и химической технологии, потому эта тема неоднократно становилась предметом как экспериментальных, так и теоретических исследований. Тем не менее некоторые аспекты проблемы пока остаются неясными. Сказанное относится, в частности, к изучению влияния конечности скорости выравнивания электрического потенциала струи (эффекта релаксации заряда) на закономерности реализации ее осцилляций и распада на капли. Попытки исследования влияния эффекта релаксации электрического заряда на струе на ее устойчивость предпринимались неоднократно (см., например, [1–6]). Однако во всех перечисленных работах уравнение баланса заряда на поверхности струи выписывалось неверно на основе механического переноса уравнения баланса вещества, выписанного для плоской поверхности (см., например, [7–8]), на цилиндрическую поверхность невозмущенной струи, в итоге пропадало слагаемое, связанное со средней кривизной поверхности струи, на что и было указано в [9]. Сказанное делает актуальным проведение корректного аналитического учета влияния эффекта релаксации на закономерности осцилляций заряженной струи вязкой жидкости. Из соображений общности весь анализ проводится для неосесимметричных мод, как это делалось ранее в [10–13].

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечную цилиндрическую струю радиусом  $R$  вязкой несжимаемой жидкости с массовой плотностью  $\rho$ , кинематической вязкостью  $\nu$  и коэффициентом поверхностного натяжения  $\gamma$ , движущуюся вдоль оси симметрии с постоянной скоростью  $U_0$ . Будем

считать, что жидкость имеет удельную проводимость  $\sigma$  и диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_d$ , а электрический заряд по цилиндрической, в отсутствие возмущений, поверхности струи распределен с постоянной поверхностной плотностью  $\kappa_0$ . Характеристики окружающей среды:  $\sigma = 0$ ,  $\epsilon_d = 1$ .

Поскольку мы рассматриваем бесконечную струю, то для упрощения задачи перейдем в инерциальную систему координат, движущуюся вместе со струей с такой же скоростью  $U_0$ . Очевидно, что в такой системе отсчета поле скоростей течения жидкости в струе  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$  полностью определяется возможными (имеющими, например, тепловую природу) капиллярными осцилляциями ее поверхности и при обезразмеривании на  $R, \gamma, \rho$  является величиной того же порядка малости, что и амплитуда тепловых осцилляций, которая принимается весьма малой по сравнению с радиусом  $R$ .

Примем, что при осцилляциях струи ее электрический потенциал выравнивается вдоль свободной поверхности за счет трех механизмов [9]:

1) нормального к свободной поверхности тока проводимости, приводящего к выравниванию потенциала за характерное время максвелловской релаксации  $\tau \sim 1/\sigma\epsilon_d$ ;

2) переноса носителей заряда (ионов обоих знаков) касательными к поверхности течениями жидкости, связанными с волновым движением в струе, выравнивающего потенциал поверхности за время порядка периода волны;

3) направленного переноса иона вдоль свободной поверхности струи касательной к поверхности компонентой напряженности электрического поля  $(\mathbf{E}\boldsymbol{\tau})$  со скоростью движения ионов по поверхности  $\mathbf{v}$ , определяемой соотношением

$$\mathbf{v} = b(\mathbf{E}\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau},$$

где  $b$  подвижность ионов, принимаемая для нижеследующих оценок одинаковой для ионов разных знаков,

$\boldsymbol{\tau}$  — орт касательной к поверхности струи. В итоге поверхностная плотность заряда  $\kappa$  оказывается функцией координат и времени  $\kappa = \kappa(\mathbf{r}, t)$ .

Будем исследовать закономерности реализации капиллярных осцилляций струи и условия реализации неустойчивости ее поверхности (в смысле дробления струи на отдельные капли). Все расчеты проведем в цилиндрической системе координат  $r, \phi, z$ , орт  $\mathbf{e}_z$  которой совпадает по направлению с осью симметрии струи. Тогда уравнение цилиндрической поверхности струи, возмущенной тепловым капиллярным волновым движением, запишется в виде

$$r(\phi, z, t) = R + \xi(\phi, z, t), \quad |\xi| \ll R,$$

где  $\xi(\phi, z, t)$  — возмущение поверхности струи, вызванное ее осцилляциями.

Математическая формулировка задачи состоит из уравнений гидродинамики и электростатики (полагаем, что скорость движения жидкости много меньше релятивистской)

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{U}, \quad \operatorname{div} \mathbf{U} = 0,$$

$$\Delta \Phi^{\text{ex}} = 0, \quad \Delta \Phi^{\text{in}} = 0,$$

условий ограниченности

$$r \rightarrow 0: \quad |\mathbf{U}| < \infty, \quad |\nabla \Phi^{\text{in}}| < \infty,$$

$$r \rightarrow \infty: \quad |\nabla \Phi^{\text{ex}}| < 0,$$

гидродинамических граничных условий на свободной поверхности струи — кинематического

$$r = R + \xi: \quad -\frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla [r - (R + \xi(\phi, z, t))] = 0$$

и динамического для касательных

$$r = R + \xi: \quad \Pi_{\tau\phi}^{\text{ex}} - \Pi_{\tau\phi}^{\text{in}} - \nu \left( \frac{\partial U_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} U_\phi \right) = 0,$$

$$\Pi_{\tau z}^{\text{ex}} - \Pi_{\tau z}^{\text{in}} - \nu \left( \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial z} \right) = 0,$$

и нормальной

$$r = R + \xi: \quad -P(\mathbf{r}, t) + P_0 + 2\rho\nu \frac{\partial U_r}{\partial r} + P_\gamma - P_\kappa = 0,$$

компонент тензора напряжений.

Чтобы учесть эффект релаксации электрического заряда, граничные условия необходимо дополнить уравнением баланса электрического заряда на поверхности струи

$$r = R + \xi: \quad \frac{\partial \kappa}{\partial t} + \sigma \cdot \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi^{\text{in}} + \nabla_S (\kappa \mathbf{U} + \kappa b E_\tau \cdot \boldsymbol{\tau}) + \kappa \frac{U_r}{r} = 0,$$

$$\operatorname{div}_S \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z,$$

условием непрерывности на свободной поверхности струи нормальной компоненты вектора электрического смещения

$$r = R + \xi: \quad 4\pi\kappa = \mathbf{n} \cdot (\epsilon_d \nabla \Phi^{\text{in}} - \nabla \Phi^{\text{ex}})$$

и условием равенства на поверхности струи потенциалов электрического поля внутри и вне струи

$$r = R + \xi: \quad \Phi^{\text{in}} = \Phi^{\text{ex}}.$$

Вкладом в уравнение баланса заряда феномена диффузии заряда по поверхности струи, пропорционального градиенту поверхностной плотности заряда, пренебрегаем в силу его малости.

В выписанной математической формулировке задачи  $U_r(\mathbf{r}, t)$ ,  $U_\phi(\mathbf{r}, t)$ ,  $U_z(\mathbf{r}, t)$  — проекции поля скоростей на орты цилиндрической системы координат;  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\tau}$  — орты нормали и касательной к свободной поверхности струи (см. Приложение);  $P(\mathbf{r}, t)$  — гидродинамическое давление;  $P_\kappa(\mathbf{r}, t)$  — давление электрического поля,  $P_\gamma(\mathbf{r}, t)$  — давление сил поверхностного натяжения;  $P_0$  — постоянное давление внешней среды;  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  — электростатический потенциал,

$$\Pi_\tau = \frac{\epsilon_d}{4\pi} E_n E_\tau,$$

$E_n(\mathbf{r}, t)$  и  $E_\tau(\mathbf{r}, t)$  — нормальная и касательная компоненты вектора напряженности электрического поля; верхние индексы „ex“ и „in“ характеризуют внешнее поле в поле внутри струи соответственно.

Решение сформулированной задачи проведем в безразмерных переменных (в которых  $R = \gamma = \rho = 1$ ), сохраняя за всеми величинами их прежние обозначения.

## 2. Формулировка задачи первого порядка малости

Решение сформулированной задачи будем искать в линейном приближении по отношению амплитуды осцилляций к радиусу невозмущенной струи.

В нулевом приближении получим неподвижный (в движущейся системе координат) однородно поверхностно заряженный цилиндрический столб жидкости, распределение электрического поля в окрестности бесконечно протяженного однородно поверхностно заряженного цилиндра, а также равновесный перепад давлений на цилиндрической поверхности.

В линейном приближении по  $|\xi|$  математическая формулировка задачи примет вид

$$r(\phi, z, t) = 1 + \xi(\phi, z, t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{U}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad (3)$$

$$\Delta \Phi^{\text{ex}} = 0, \quad \Delta \Phi^{\text{in}} = 0, \quad (4)$$

$$r \rightarrow 0: \quad |\mathbf{U}| < \infty, \quad |\nabla \varphi^{\text{in}}| < \infty, \quad (5)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad |\nabla \varphi^{\text{ex}}| \rightarrow 0, \quad (6)$$

$$r = 1: \quad -\frac{\partial \xi}{\partial t} + U_r = 0, \quad (7)$$

$$4\pi\kappa_0^2(1-\xi)\frac{\partial \xi}{\partial \phi} - \kappa_0 \left[ (1-\xi)\frac{\partial \varphi^{\text{ex}}}{\partial \phi} + \frac{\partial \xi}{\partial \phi} \frac{\partial \varphi^{\text{ex}}}{\partial r} \right] - \nu \left( \frac{\partial U_\phi}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial \phi} - U_\phi \right) = 0, \quad (8)$$

$$-4\pi\kappa_0^2(1-\xi)\frac{\partial \xi}{\partial z} + \kappa_0 \left[ (1-\xi)\frac{\partial \varphi^{\text{ex}}}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \varphi^{\text{ex}}}{\partial r} \right] - \nu \left( \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial z} \right) = 0, \quad (9)$$

$$-p + 2\nu \frac{\partial U_r}{\partial r} + p_\gamma - p_x = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \kappa_*}{\partial t} + \sigma \frac{\partial \varphi^{\text{in}}}{\partial r} + \kappa_0 \left( \frac{\partial U_\phi}{\partial \phi} - \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) - \kappa_0 b \left( \frac{\partial E_r}{\partial \phi} - \frac{\partial E_r}{\partial z} \right) + \kappa_0 U_r = 0, \quad (11)$$

$$4\pi\kappa_* = \xi + \frac{\partial}{\partial r} (\varepsilon_d \varphi^{\text{in}} - \varphi^{\text{ex}}), \quad (12)$$

$$\varphi^{\text{ex}} - \varphi^{\text{in}} - 4\pi\kappa_0 \xi = 0. \quad (13)$$

В уравнениях (1)–(13)  $\varphi^{\text{ex}}$ ,  $\varphi^{\text{in}}$ ,  $\kappa_*$ ,  $p$ ,  $p_x$ ,  $p_\gamma$  — вызванные капиллярными осцилляциями поверхности струи добавки первого по  $|\xi|$  порядка малости к внешнему и внутреннему электрическим потенциалам, поверхностной плотности электрического заряда, гидродинамическому давлению, давлению электрических сил и сил поверхностного натяжения, соответственно имеющие первый порядок малости.

Разложив по  $|\xi|$  аналитические выражения для лапласовского давления и давления электрического поля на поверхность струи (см. Приложение), для входящих в (10) величин  $p_x$  и  $p_\gamma$  несложно получить в первом порядке малости по  $|\xi|$  следующие выражения:

$$p_\gamma = -\left( \xi + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right), \quad (14)$$

$$p_x = -4\pi\kappa_0^2 \xi - \kappa_0 \frac{\partial \varphi^{\text{ex}}}{\partial r}. \quad (15)$$

### 3. Описание процедуры скаляризации задачи

Задачу (1)–(13) будем решать методом операторной скаляризации [14], раскладывая поле скоростей  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$  на сумму трех ортогональных векторных полей при помощи векторных дифференциальных операторов  $\hat{\mathbf{N}}_j$ :

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^3 \hat{\mathbf{N}}_j \psi_j(\mathbf{r}, t) \quad (j = 1, 2, 3), \quad (16)$$

удовлетворяющих условиям ортогональности

$$\hat{\mathbf{N}}_j^+ \hat{\mathbf{N}}_i = 0 \quad (i \neq j; \quad i, j = 1, 2, 3) \quad (17)$$

и условиям коммутативности с оператором Лапласа

$$\Delta \hat{\mathbf{N}}_i = \hat{\mathbf{N}}_i \Delta. \quad (18)$$

В выражениях (16), (17)  $\psi_i(\mathbf{r}, t)$  — неизвестные скалярные функции,  $\hat{\mathbf{N}}_j^+$  — операторы, эрмитово-сопряженные к операторам  $\hat{\mathbf{N}}_j$ .

Поскольку равновесная форма струи обладает осевой симметрией, то операторы  $\hat{\mathbf{N}}_j$  удобно выбрать в виде

$$\hat{\mathbf{N}}_1 \equiv \nabla, \quad \hat{\mathbf{N}}_2 \equiv \nabla \times \mathbf{n}_z, \quad \hat{\mathbf{N}}_3 \equiv \nabla \times (\nabla \times \mathbf{n}_z).$$

Поле скоростей  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$  в цилиндрической системе координат будет иметь следующие компоненты, выраженные через скалярные функции  $\psi_i(\mathbf{r}, t)$ ,

$$U_r = \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z \partial r},$$

$$U_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \phi} - \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z \partial \phi},$$

$$U_z = \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi_3}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial \phi^2} \right].$$

Подставив разложение (16) в уравнения (2), (3) и используя свойства операторов (17), (18), получим систему скалярных уравнений

$$\Delta \psi_1 = 0, \quad \Delta \psi_i - \frac{1}{v} \frac{\partial \psi_i}{\partial t} = 0 \quad (i = 2, 3), \quad (20)$$

$$p = -\frac{\partial \psi_1}{\partial t}. \quad (21)$$

Используя (14), (15), (19), (21), граничные условия — кинематическое (7), динамические, для касательных компонент тензора напряжений (8), (9), нормальной компоненты тензора напряжений (10) и уравнения баланса заряда на свободной поверхности струи (11), (12) — преобразуем в граничные условия для неизвестных функций  $\psi_i$ ,  $\varphi^{\text{ex}}$ ,  $\varphi^{\text{in}}$  и  $\xi$

$$r = 1: \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} - \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z \partial r} \right) = 0,$$

$$4\pi\kappa_0^2(1-\xi)\frac{\partial \xi}{\partial \phi} - \kappa_0 \left[ (1-\xi)\frac{\partial \varphi^{\text{ex}}}{\partial \phi} + \frac{\partial \xi}{\partial \phi} \frac{\partial \varphi^{\text{ex}}}{\partial r} \right] - \nu \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \psi_1 \right) + \left( \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r^2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \phi^2} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \phi} \left( \frac{\partial \psi_3}{\partial r} - \psi_3 \right) \right\} = 0,$$

$$\begin{aligned}
& -4\pi\kappa_0^2(1-\xi)\frac{\partial\xi}{\partial z} + \kappa_0\left[(1-\xi)\frac{\partial\varphi^{\text{ex}}}{\partial z} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\frac{\partial\varphi^{\text{ex}}}{\partial r}\right] \\
& -\nu\left\{\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\left(2\psi_3 - \frac{\partial\psi_3}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(2\frac{\partial\psi_1}{\partial r} + \frac{\partial\psi_2}{\partial\phi} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial z\partial r}\right)\right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial r}\left(\psi_3 - r\frac{\partial^2\psi_3}{\partial r^2}\right)\right\} = 0, \\
& \frac{\partial\psi_1}{\partial t} + 2\nu\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{\partial\psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_2}{\partial\phi} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial z\partial r}\right\} + 4\pi\kappa_0^2\xi \\
& + \kappa_0\frac{\partial\varphi^{\text{ex}}}{\partial r} - \left(\xi + \frac{\partial^2\xi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right) = 0, \\
& \sigma\frac{\partial\varphi^{\text{in}}}{\partial r} + \kappa_0\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial r} + \frac{\partial\psi_2}{\partial\phi} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial z\partial r}\right) \\
& + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\xi + \frac{\partial}{\partial r}(\varepsilon_d\varphi^{\text{in}} - \varphi^{\text{ex}})\right] \\
& + \kappa_0\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(\psi_1 - b\varphi^{\text{in}})\right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial^2\psi_3}{\partial r\partial z} - \frac{\partial\psi_2}{\partial\phi}\right) + 2\frac{\partial^3\psi_3}{\partial\phi^2\partial z}\right] = 0. \quad (22)
\end{aligned}$$

Поскольку функции  $\varphi^{\text{ex}}$ ,  $\varphi^{\text{in}}$ ,  $\xi$  и  $\psi_i$  описывают малые отклонения от равновесного состояния, то для того чтобы проследить их эволюцию во времени, примем, что временная зависимость всех малых величин является экспоненциальной

$$\varphi^{\text{ex}}, \varphi^{\text{in}}, \xi, \psi_i \sim \exp(st),$$

где  $s$  — комплексная частота.

Учитывая это, решения уравнений (20) и (4) в цилиндрической системе координат, удовлетворяющие условиям ограниченности (5), (6), будем искать в виде разложений по волнам, бегущим вдоль оси  $OZ$

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty C_1 I_m(kr) \exp(im\phi) \exp(ikz) \exp(st) dk, \\
\psi_i &= \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty C_i I_m(lr) \exp(im\phi) \exp(ikz) \exp(st) \quad (i=2,3), \\
\varphi^{\text{in}} &= \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty B_1 I_m(kr) \exp(im\phi) \exp(ikz) \exp(st) dk, \\
\varphi^{\text{ex}} &= \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty B_2 K_m(kr) \exp(im\phi) \exp(ikz) \exp(st) dk. \quad (24)
\end{aligned}$$

В виде аналогичного разложения представим и функцию  $\xi(z, \phi, t)$

$$\xi(z, \phi, t) = \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty D \exp(im\phi) \exp(ikz) \exp(st) dk. \quad (25)$$

В (23)–(25)  $l^2 \equiv k^2 + s/\nu$ ,  $k$  и  $m$  — волновое и азимутальное числа,  $I_m(x)$ ,  $K_m(x)$  — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода,  $C_i$  ( $i=1,2,3$ ),  $B_j$  ( $j=1,2$ ),  $D$  — коэффициенты разложений, зависящие от  $m$  и  $k$ .

Используя условие равенства потенциалов внешнего и внутреннего электрических полей на поверхности струи (13), решения (24), (25) и учитывая ортонормированность функций  $\exp(im\phi)$  и  $\exp(ikz)$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \exp[i(m_1 - m_2)\phi] d\phi &= \delta_{m_1, m_2}, \\
\int_{-\infty}^\infty \exp[i(k_1 - k_2)z] dz &= \delta(k_1 - k_2), \quad (26)
\end{aligned}$$

где  $\delta_{m_1, m_2}$  — дельта-символ Кронекера,  $\delta(k_1 - k_2)$  — дельта-функция Дирака, несложно получить связь коэффициентов  $B_1$ ,  $B_2$  и  $D$ :

$$B_1 = [K_m(k)B_2 - 4\pi\kappa_0 D]/I_m(k). \quad (27)$$

Подставив решения (23), (24) с учетом (27) и разложение (25) в граничные условия (22) и используя соотношения (26), получим систему однородных уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $D$ ,  $B_2$  и  $C_i$  ( $i=1,2,3$ )

$$\begin{aligned}
-sD + kI'_m(k)C_1 + imI_m(l)C_2 + ikII'_m(l)C_3 &= 0, \\
im4\pi\kappa_0^2 D - im\kappa_0 K_m(k)B_2 - \nu 2imI_m(k)(G_m(k) - 1)C_1 \\
+ \nu I_m(l)(2m^2 + l^2 - 2G_m(l))C_2 + \nu 2mkI_m(l) \\
\times (G_m(l) - 1)C_3 &= 0, \\
ik4\pi\kappa_0^2 D - ik\kappa_0 K_m(k)B_2 + \nu 2ikI_m(k)G_m(k)C_1 \\
+ \nu mkI_m(l)C_2 - \nu I_m(l)G_m(l)(k^2 + l^2)C_3 &= 0, \\
\beta D + \kappa_0 k K'_m(k)B_2 + I_m(k)[s + 2\nu(k^2 + m^2 - G_m(l))]C_1 \\
+ \nu 2imI_m(l)(G_m(l) - 1)C_2 + \nu 2ikI_m(l) \\
\times (l^2 + m^2 - G_m(l))C_3 &= 0, \\
\kappa_0 M_{mk}^{-1} D - K_m(k)\Lambda_{mk}B_2 + \kappa_0 I_m(k)(k^2 - m^2 + 4\pi G_m(k)) \\
\times C_1 + \kappa_0 imI_m(l)(G_m(k) - 4\pi)C_2 + \kappa_0 ikI_m(l) \\
\times (l^2 - m^2 + 4\pi G_m(l))C_3 &= 0, \quad (28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{mk} &= M_{mk}(s, \sigma, \varepsilon_d, \varkappa_0, b) \equiv \varkappa_0 [sg + 4\pi \varkappa_0 d]^{-1}, \\
 g &\equiv 1 - 4\pi \varkappa_0 \varepsilon_d G_m(k), \\
 d &\equiv \varkappa_0 b (k^2 - m^2) - 4\pi \sigma G_m(k), \\
 \beta &\equiv (k^2 + m^2 - 1 + 4\pi \varkappa_0^2), \\
 f &\equiv H_m(k) - \varepsilon_d G_m(k), \\
 \Lambda_{mk} &= \Lambda_{mk}(s, \sigma, \varepsilon_d, \varkappa_0, b) \equiv sf + d,
 \end{aligned}$$

$$G_m(x) \equiv x I'_m(x) / I_m(x), \quad H_m(x) \equiv x K'_m(x) / K_m(x).$$

Штрихами обозначены производные функций Бесселя по их аргументу.

Для дальнейшего анализа решения удобней будет рассматривать систему уравнений относительно коэффициентов  $B_2$  и  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), выразив коэффициент  $D$  из последнего уравнения (28)

$$\begin{aligned}
 D &= \varkappa_0^{-1} K_m(k) \Lambda_{mk} M_{mk} B_2 - I_m(k) (k^2 - m^2 + 4\pi G_m(k)) \\
 &\times M_{mk} C_1 + i I_m(l) M_{mk} [m(G_m(k) \\
 &- 4\pi) C_2 - k(l^2 - m^2 + 4\pi G_m(l)) C_3] = 0. \quad (29)
 \end{aligned}$$

Исключив из (28) с помощью (29) коэффициент  $D$ , получим систему четырех однородных алгебраических уравнений относительно четырех неизвестных коэффициентов  $B_2$  и  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Как известно, система однородных линейных уравнений имеет нетривиальное решение только в случае, если определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, равен нулю. В рассматриваемой ситуации получится определитель, элементы которого  $a_{ij}$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= -s \Lambda_{mk} M_{mk}, \\
 a_{12} &= G_m(k) + s M_{mk} (k^2 - m^2 + 4\pi G_m(k)), \\
 a_{13} &= im [1 + s M_{mk} (4\pi - G_m(l))], \\
 a_{14} &= ik [G_m(l) + s M_{mk} (l^2 - m^2 + 4\pi G_m(l))], \\
 a_{21} &= -imw ((4\pi)^{-1} - \Lambda_{mk} M_{mk}), \\
 a_{22} &= -im [2v (G_m(k) - 1) \\
 &+ w M_{mk} (k^2 - m^2 + 4\pi G_m(k))], \\
 a_{23} &= v (l^2 + 2m^2 - 2G_m(l)) + w m^2 M_{mk} (4\pi - G_m(l)), \\
 a_{24} &= mk [2v (G_m(l) - 1) + w M_{mk} (l^2 - m^2 + 4\pi G_m(l))], \\
 a_{31} &= -ikw ((4\pi)^{-1} - \Lambda_{mk} M_{mk}), \\
 a_{33} &= -mk [v - w M_{mk} (4\pi - G_m(l))], \\
 a_{32} &= ik [2v G_m(k) - w M_{mk} (k^2 - m^2 + 4\pi G_m(k))], \\
 a_{34} &= -v (k^2 + l^2) G_m(l) + w k^2 M_{mk} (l^2 - m^2 + 4\pi G_m(l)), \\
 a_{41} &= (4\pi)^{-1} w H_m(k) + \beta \Lambda_{mk} M_{mk}, \\
 a_{42} &= s + 2v (k^2 + m^2 - G_m(k)) \\
 &- \beta M_{mk} (k^2 - m^2 + 4\pi G_m(k)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{43} &= im [2v (G_m(l) - 1) - \beta M_{mk} (4\pi - G_m(l))], \\
 a_{44} &= ik [2v (l^2 + m^2 - G_m(l)) \\
 &- \beta (l^2 - m^2 + 4\pi G_m(l)) M_{mk}], \quad (30)
 \end{aligned}$$

где параметр  $w$  выражается через поверхностную плотность заряда:

$$w \equiv 4\pi \varkappa_0^2.$$

#### 4. Вывод дисперсионного уравнения

Приравнивая к нулю определитель четвертого порядка с элементами (30), получим дисперсионное уравнение, связывающее частоты  $s$  неосесимметричных колебаний поверхности струи с волновым числом  $k$

$$\det a_{ij} = 0. \quad (31)$$

Несложно осуществить предельный переход к случаю идеально проводящей жидкости ( $\sigma \rightarrow \infty$ ), для которой отсутствует явление релаксации заряда. В этом случае

$$M_{mk} \rightarrow 0, \quad \Lambda_{mk} M_{mk} \rightarrow 1/4\pi, \quad \text{при } \sigma \rightarrow \infty,$$

и выражения (30) полностью совпадут с выведенными ранее [10], а дисперсионное уравнение примет вид, приведенный в [10].

В общем случае дисперсионное уравнение (31) имеет громоздкий вид и весьма сложно (поскольку  $l$  зависит от  $s$ ) и не может быть решено аналитически; его анализ доступен только численными методами. Поэтому ограничимся рассмотрением предельного случая маловязкой жидкости.

Для струи маловязкой жидкости, когда выполняется условие  $l \gg k$  (при этом  $G_m(l) \approx l$ ), дисперсионное уравнение (31) приводится к более простому виду — уравнению третьей степени относительно комплексной частоты  $s$

$$\alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0, \quad (32)$$

$$\alpha_3 = 4\pi f,$$

$$\alpha_2 = 4\pi d + 2v \alpha_3 (k^2 + m^2 - G_m(k)),$$

$$\alpha_1 = 2\sqrt{\pi w} g G_m(k) H_m(k) + \alpha_3 \beta G_m(k) + w H_m(k)$$

$$\times (k^2 - m^2 + 4\pi G_m(k)) + 8\pi v d (k^2 + m^2 - G_m(k)),$$

$$\alpha_0 = 4\pi d G_m(k) [w H_m(k) + \beta].$$

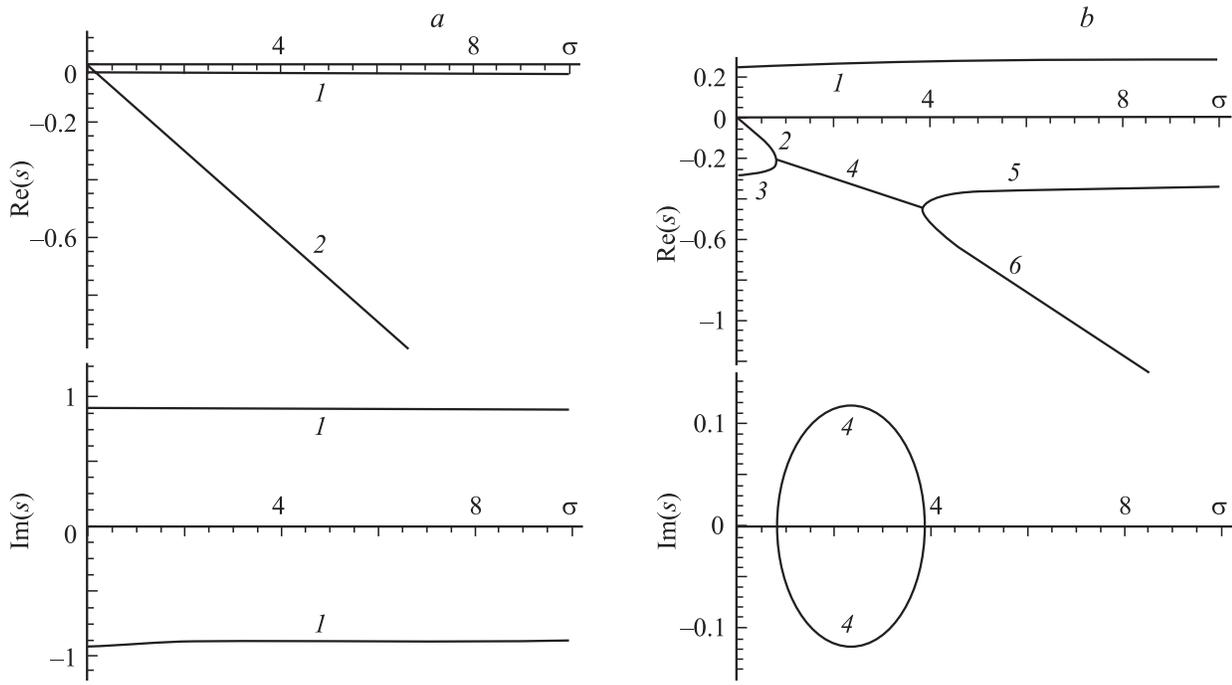
Осуществляя предельный переход, предварительно поделив все коэффициенты на  $\alpha_3$ ,

$$\sigma \rightarrow \infty, \quad \varepsilon_d \rightarrow \infty: \quad \alpha_2/\alpha_3 \rightarrow 2v (k^2 + m^2 - G_m(k)),$$

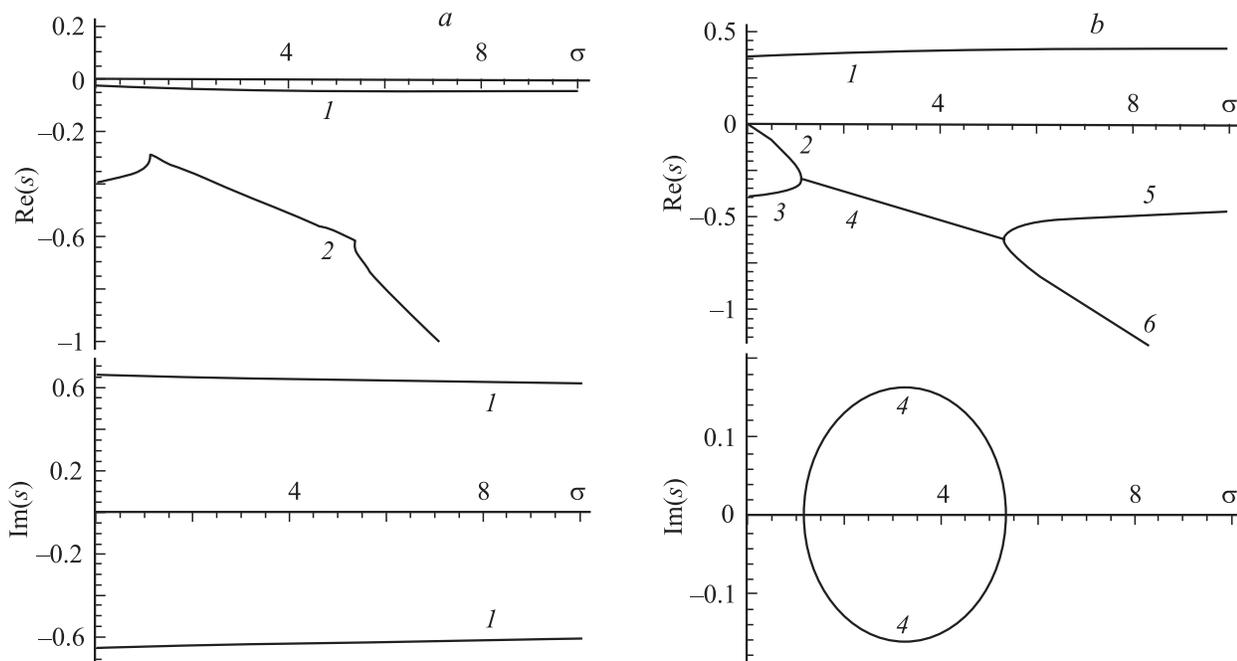
$$\alpha_1/\alpha_3 \rightarrow G_m(k) (\beta + w H_m(k)), \quad \alpha_0/\alpha_3 \rightarrow 0,$$

можно получить выражение для идеально проводящей маловязкой жидкости, совпадающее с полученным ранее [10]:

$$s^2 + s 2v (k^2 + m^2 - G_m(k)) = -G_m(k) (\beta + w H_m(k)).$$



**Рис. 1.** Зависимости вещественной и мнимой компонент безразмерной частоты  $s$  от безразмерной электропроводности  $\sigma$ , рассчитанные при  $\nu = 0.03$ ,  $\varepsilon_d = 81$ ,  $b = 0.01$ ,  $k = 1$ ,  $w = 0.5$ :  $a - m = 1$ ;  $b - m = 0$ .



**Рис. 2.** То же, что на рис. 1 ( $w = 1$ ).

## 5. Анализ полученных результатов

На рис. 1–3 представлены зависимости действительной и мнимой компонент комплексной частоты  $s$  от электропроводности жидкости  $\sigma$  в пределе малой вязкости для двух значений азимутального числа, рас-

считанные при различных значениях параметра  $w$ . На приведенных рисунках ветвь с номером 1 соответствует капиллярным движениям жидкости: медленно затухающим волновым движениям (рис. 1,  $a$  и 2,  $a$ ), инкрементам неустойчивости капиллярных движений жидкости при достаточно больших плотностях поверхностного заряда

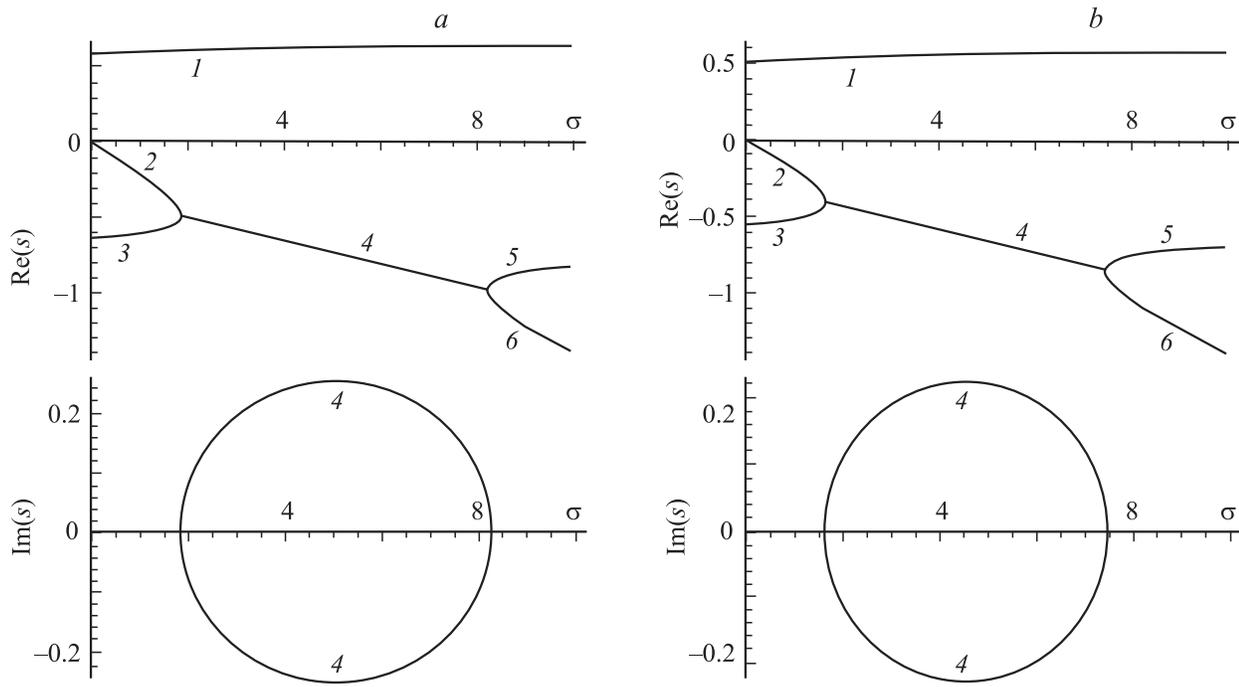


Рис. 3. То же, что на рис. 1 ( $w = 2$ ).

на струе — при достаточно больших для данных волновых и азимутальных чисел значениях параметра  $w$  (рис. 1, *b*, 3, *b* и 3, *a*).

Ветви с номерами, бóльшими  $1$ , соответствуют релаксационным движениям жидкости, т.е. движениям жидкости, порожденным переносом импульса от перемещающихся носителей заряда в жидкости к нейтральным молекулам. Из рис. 1–3 видно, что релаксационные движения жидкости с номерами  $2, 3$  и  $5, 6$  являются аperiodическими, их декремент затухания зависит от электропроводности жидкости. Ветвь с номером  $4$  соответствует квазипериодическому релаксационному движению, характеризуемому частотой и декрементом затухания, но поскольку частота в несколько раз меньше декремента затухания, это выводит обсуждаемые движения за рамки определения периодических движений.

Следует отметить, что в соответствии с общей теорией устойчивости капиллярных струй [15,16] осесимметричные (с  $m = 0$ ) волны на поверхности струи с волновыми числами  $k \leq 1$  даже в отсутствие на поверхности струи электрического заряда неустойчивы, поскольку самопроизвольное разбиение цилиндрической струи на сферические капли переводит систему в состояние с меньшей потенциальной энергией капиллярных сил. Волны с  $m \geq 1$  более устойчивы и претерпевают неустойчивость, ведущую к дроблению струи на отдельные капли, только при достаточно большой плотности поверхностного заряда на струе [10,11]. Именно по этой причине на приведенных рисунках все осесимметричные волны с  $k = 1$  неустойчивы, и капиллярные движения иллюстрируются только инкрементами неустойчивости. Волна с  $k = 1, m = 1$  при  $w = 0.5$

и  $1$  устойчива, поэтому на рис. 1, *a* и 2, *a* ветвь  $1$  иллюстрирует слабозатухающую капиллярную волну на поверхности струи, но при  $w = 2$  (см. рис. 3, *a*) эта волна становится неустойчивой. Ветвь  $2$  на рис. 1, *a* соответствует аperiodически быстрозатухающему релаксационному движению жидкости, величина декремента затухания которого быстро увеличивается с ростом электропроводности жидкости.

Качественное сходство ветвей дисперсионного уравнения, приведенных на всех рисунках, кроме рис. 1, *a*, 2, *a*, указывает на то, что все релаксационные движения для неустойчивых волн порождаются при взаимодействии чисто релаксационного движения, представленного ветвью  $2$  на рис. 1, *a*, с ветвью затухающих капиллярно-волновых движений (здесь следует отметить, что две затухающие капиллярные волны, бегущие по поверхности струи в противоположных направлениях, обозначенные номером  $1$  на рис. 1, *a*, при потере устойчивости при достаточно большом  $w$  образуют два капиллярно-волновых движения: одно неустойчивое, амплитуда которого экспоненциально нарастает со временем, а другое — аperiodически затухающее [17,18]).

Из рис. 1–3 следует, что с ростом электропроводности  $\sigma$  величины инкрементов неустойчивости (ветви с номером  $1$ ) весьма слабо растут. Декременты затухания ветвей  $2, 4, 6$ , порожденных чисто релаксационной ветвью  $2$  на рис. 1, *a* с ростом электропроводности  $\sigma$  увеличиваются быстро, а декременты ветвей  $3$  и  $5$  изменяются слабо. Диапазон электропроводностей  $\sigma$ , в котором существует квазипериодическое релаксационное движение  $4$ , расширяется и смещается в сторону

больших  $\sigma$  с увеличением поверхностной плотности заряда на струе (с увеличением параметра  $w$ ). Увеличение поверхностной плотности заряда на струе приводит к увеличению инкремента неустойчивости капиллярных движений жидкости и снижению частот капиллярных волн, а также к увеличению декремента затухания квазипериодического релаксационного движения 4.

Зависимости параметров движения жидкости в струе от величины подвижности носителей заряда  $b$  показывают, что в диапазоне изменения безразмерной подвижности от 0 до 1 инкременты неустойчивых движений и частоты волн от  $b$  зависят пренебрежимо слабо.

Проведенный анализ (см. также [19,20]) показывает, что релаксационные движения жидкости заметно проявляются лишь для слабо проводящих жидкостей (для малых  $\sigma$ ), приводя к снижению инкрементов неустойчивости и увеличению декрементов затухания капиллярных движений по сравнению с идеально проводящей жидкостью.

Интересно, что, как и в случае идеально проводящей жидкости, величина инкремента неустойчивости неосесимметричной волны с  $m = 1$  заметно превышает инкремент осесимметричной волны ( $m = 0$ ) при прочих равных условиях, что было ранее отмечено в [10].

## Заключение

Впервые корректно выведено дисперсионное уравнение для неосесимметричных осцилляций заряженной струи вязкой несжимаемой электропроводной жидкости с конечной электропроводностью. Выяснилось, что релаксационные движения жидкости имеют аperiодический характер и приводят к дополнительному (по сравнению с идеально электропроводной жидкостью) рассеиванию энергии в струе, приводя к увеличению декрементов затухания и снижению инкрементов неустойчивости. Влияние эффекта релаксации заряда наиболее заметно сказывается на капиллярных движениях в струях слабопроводящих жидкостей.

## Приложение

### 1. Касательные и нормальный орты к возмущенной свободной поверхности струи

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_\phi &= \mathbf{e}_\phi + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \phi} \mathbf{e}_r, & \boldsymbol{\tau}_z &= -\mathbf{e}_z - \frac{\partial \xi}{\partial z} \mathbf{e}_r, \\ \mathbf{n} &= \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi - \frac{\partial \xi}{\partial z} \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

### 2. Вывод выражения для давления электрического поля на поверхность струи

Вычислим давление электрического поля на заряженную поверхность цилиндрической струи вязкой несжимаемой жидкости с конечной удельной проводимостью

$\sigma$  и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_d$ , помещенную в окружающую среду с характеристиками  $\sigma = 0$ ,  $\epsilon_d = 1$ . Будем считать, что электрический заряд распределен по цилиндрической, в отсутствие возмущений, поверхности струи с постоянной поверхностной плотностью  $\kappa_0$ . Учтем, что в процессе осцилляций струи электрический заряд перераспределяется по свободной поверхности жидкости с характерным временем, сравнимым с периодом колебаний, так что поверхностная плотность заряда  $\kappa$  оказывается функцией времени и координат  $\kappa = \kappa(\mathbf{r}, t)$ .

Давление электрического поля на поверхность заряженной струи определяется известным выражением

$$P_x = \frac{1}{8\pi} [(E_n^{\text{ex}})^2 - \epsilon_d (E_n^{\text{in}})^2 + (\epsilon_d - 1)(E_\tau^{\text{ex}})^2],$$

$$E_n^{\text{ex}} = -(\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi^{\text{ex}}),$$

$$E_n^{\text{in}} = -(\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi^{\text{in}}),$$

$$(E_\tau^{\text{ex}})^2 = (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \Phi^{\text{ex}})^2 + (\boldsymbol{\tau}_z \cdot \nabla \Phi^{\text{ex}})^2,$$

где потенциал электрического поля внутри струи  $\Phi^{\text{in}}$  и внешний потенциал  $\Phi^{\text{ex}}$  являются решением краевой задачи

$$\Delta \Phi^{\text{in}} = 0, \quad \Delta \Phi^{\text{ex}} = 0,$$

$$r \rightarrow 0: \quad |\nabla \Phi^{\text{in}}| < \infty, \quad r \rightarrow \infty: \quad |\nabla \Phi^{\text{ex}}| \rightarrow 0,$$

$$r = R + \xi: \quad \Phi^{\text{in}} = \Phi^{\text{ex}}.$$

Представим потенциалы  $\Phi^{\text{in}}$  и  $\Phi^{\text{ex}}$  в виде разложения

$$\Phi^{\text{in}} = \Phi_0^{\text{in}} + \varphi^{\text{in}}, \quad \Phi^{\text{ex}} = \Phi_0^{\text{ex}} + \varphi^{\text{ex}},$$

где  $\Phi_0^{\text{in}}$ ,  $\Phi_0^{\text{ex}}$  — потенциалы электрического поля вблизи невозмущенной поверхности струи,  $\varphi^{\text{in}}$ ,  $\varphi^{\text{ex}}$  — добавки к соответствующим потенциалам, вызванные возмущением поверхности  $\xi(z, \phi, t)$ , имеющие первый порядок малости по  $|\xi|$ .

Разделив сформулированную задачу по порядкам малости, получим в нулевом приближении по  $\xi$

$$\Delta \Phi_0^{\text{in}} = 0, \quad \Delta \Phi_0^{\text{ex}} = 0,$$

$$r \rightarrow 0: \quad |\nabla \Phi_0^{\text{in}}| < \infty,$$

$$r \rightarrow \infty: \quad |\nabla \Phi_0^{\text{ex}}| \rightarrow 0,$$

$$r = 1: \quad \Phi_0^{\text{in}} = \Phi_0^{\text{ex}},$$

а в первом порядке

$$\Delta \varphi^{\text{in}} = 0, \quad \Delta \varphi^{\text{ex}} = 0,$$

$$r \rightarrow 0: \quad |\nabla \varphi^{\text{in}}| < \infty, \quad r \rightarrow \infty: \quad |\nabla \varphi^{\text{ex}}| \rightarrow 0,$$

$$r = 1: \quad \varphi^{\text{in}} + \frac{\partial \Phi_0^{\text{in}}}{\partial r} \xi = \varphi^{\text{ex}} + \frac{\partial \Phi_0^{\text{ex}}}{\partial r} \xi.$$

В нулевом порядке малости напряженность электрического поля вблизи невозмущенной цилиндрической поверхности струи имеет вид

$$\mathbf{E}_0^{\text{in}} = -\nabla \Phi_0^{\text{in}} = 0, \quad \mathbf{E}_0^{\text{ex}} = -\nabla \Phi_0^{\text{ex}} = 4\pi \kappa_0 \mathbf{r} / r^2.$$

Выражения для потенциалов  $\varphi^{\text{in}}$  и  $\varphi^{\text{ex}}$  в цилиндрической системе координат, удовлетворяющие соответствующим условиям ограниченности, и выражение для искажения цилиндрической формы струи  $\xi(z, \phi, t)$  запишем в виде разложений по волнам, бегущим вдоль оси  $OZ$  (вдоль оси симметрии струи)

$$\varphi^{\text{in}} = \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty B_1 I_m(kr) \exp(im\phi) \exp(ikz) \exp(st) dk,$$

$$\varphi^{\text{ex}} = \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty B_2 K_m(kr) \exp(im\phi) \exp(ikz) \exp(st) dk,$$

$$\xi(z, \phi, t) = \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty D \exp(im\phi) \exp(ikz) \exp(st) dk,$$

где  $k$  и  $m$  — волновое и азимутальное числа,  $I_m(x)$ ,  $K_m(x)$  — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода,  $B_j$  ( $j = 1, 2$ ) и  $D$  — коэффициенты разложений, зависящие от  $m$  и  $k$ .

На поверхности струи для функций  $\varphi^{\text{in}}$  и  $\varphi^{\text{ex}}$  имеем

$$r = 1: \quad \varphi^{\text{ex}} - \varphi^{\text{in}} - 4\pi\kappa_0\xi = 0.$$

Отсюда легко получить связь коэффициентов  $B_1$ ,  $B_2$  и  $D$

$$B_1 = [K_m(k)B_2 - 4\pi\kappa_0D]/I_m(k).$$

При выводе этого соотношения была учтена линейная независимость функций  $\exp(im\phi)$  при разных  $m$  и функций  $\exp(ikz)$  при различных значениях волнового числа  $k$ .

Искажение равновесной цилиндрической поверхности струи волновым движением  $\xi(z, \phi, t)$  вызывает изменение давления  $P_x$ . Поскольку возмущение  $\xi$  мало, то  $P_x$  может быть разложено в ряд по  $\xi$ . С учетом того, что величины  $(E_n^{\text{in}})^2$  и  $(E_r^{\text{ex}})^2$  имеют второй порядок малости, то выражение для давления  $P_x$  в линейном приближении может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} P_x|_{r=1+\xi} &\approx \frac{1}{8\pi} (\nabla\Phi_0^{\text{ex}} + \nabla\varphi^{\text{ex}})^2|_{r=1+\xi} \\ &\approx \frac{1}{8\pi} \left( (\nabla\Phi_0^{\text{ex}})^2 + 2\xi(\nabla\Phi_0^{\text{ex}}) \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\nabla\Phi_0^{\text{ex}}) \right. \\ &\quad \left. + 2(\nabla\varphi^{\text{ex}}) \cdot (\nabla\Phi_0^{\text{ex}}) \right) \Big|_{r=1}. \end{aligned}$$

Используя выражение для напряженности электрического поля у поверхности невозмущенной цилиндрической струи для линейной по  $|\xi|$  добавки к давлению электрического поля, которую обозначим  $p_x(\xi)$ , получим выражение

$$r = 1: \quad p_x = -4\pi\kappa_0^2\xi - \kappa_0 \frac{\partial\varphi^{\text{ex}}}{\partial r}.$$

Подставив вместо функций  $\xi$  и  $\varphi^{\text{ex}}$  их интегральные представления, получим окончательное выражение для давления электрического поля, связанного с возмущением формы поверхности струи

$$\begin{aligned} p_x(\xi) &= -\kappa_0 \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty (4\pi\kappa_0D + kK'_m(k)B_2) \\ &\quad \times \exp(im\phi) \exp(ikz) \exp(st) dk. \end{aligned}$$

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 05-08-01147-а и 06-01-00066-а.

## Список литературы

- [1] Saville D. // J. Fluid Mech. 1971. Vol. 48. N 4. P. 815–827.
- [2] Гинецкий А.Ф., Мотин А.И. // ИФЖ. 1991. Т. 60. № 4. С. 576–581.
- [3] Mestel A.J. // J. Fluid Mech. 1994. Vol. 274. P. 93–113.
- [4] Mestel A.J. // J. Fluid Mech. 1996. Vol. 312. 2. P. 311–326.
- [5] Шкадов В.Я., Шутов А.А. // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 2. С. 29–40.
- [6] Shkadov V.Ya., Shutov A.A. // Fluid Dynamic Res. 2001. Vol. 28. P. 23–39.
- [7] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
- [8] Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф., Ширяева С.О., Шуккин С.И. // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23. Вып. 16. С. 38–40.
- [9] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 11. С. 22–28.
- [10] Ширяева С.О., Григорьева А.И., Левчук Т.В., Рыбакова М.В. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 4. С. 5–12.
- [11] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 22–30.
- [12] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 8. С. 6–14.
- [13] Ширяева С.О., Воронина Н.В., Григорьева А.И. // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 9. С. 31–41.
- [14] Ширяева С.О., Лазарянец А.Э., Григорьева А.И. и др. Метод скаляризации векторных краевых задач. Препринт ИМРАН № 27. Ярославль, 1994. 126 с.
- [15] Rayleigh, Lord // Proc. Roy. Soc. London. 1879. Vol. 29. N 196. P. 71–97.
- [16] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 700 с.
- [17] Ширяева С.О., Муничев М.И., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 7. С. 1–8.
- [18] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Коромыслов В.А., Белоножко Д.Ф. // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 8. С. 25–31.
- [19] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф. // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 10. С. 34–42.
- [20] Григорьева А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 5. С. 67–72.