01;05

# Эффективные упругие свойства двухфазных композитов

© В.И. Алешин

Научно-исследовательский институт физики при Ростовском государственном университете,
344090 Ростов-на-Дону, Россия
e-mail: aleshin@rsu.ru

(Поступило в Редакцию 22 декабря 2006 г.)

Проанализированы выражения для эффективных упругих констант двухфазных композитов в виде рядов, полученных на основе преобразований Фурье. Показано, что в некоторых случаях можно провести полное суммирование таких рядов, что позволяет, например, непосредственно получить точные выражения для эффективного объемного модуля композита. Установлено, что симметрия коэффициентов в рядах для модуля сдвига и модуля Юнга, а также соответствующих обратных величин позволяет связать эти ряды между собой. Таким образом, удается получить все известные точные соотношения для эффективных упругих констант. Предложена система уравнений, позволяющая провести вычисление эффективных констант двумерного изотропного симметричного композита с произвольными свойствами фаз.

PACS: 62.20.-x

## Введение

Известно относительно небольшое количество микроструктур, допускающих точное решение задачи о вычислении эффективных упругих характеристик неоднородных материалов (композитов). Вместе с тем точно решаемые задачи представляют большой интерес, так как позволяют делать общие заключения относительно связи эффективных свойств композита с геометрией распределения компонент (фаз) в нем. Далее будут рассматриваться двухфазные композиты с однородными изотропными фазами.

Автор [1] на основе представлений о гравитационном потенциале двух распределенных масс получил точное выражение для объемного модуля $K^*$ произвольного трехмерного двухфазного композита с объемными модулями фаз $K_1$, $K_2$ при условии, что сдвиговые модули фаз равны $G_1 = G_2$. При выводе этого выражения не делалось практически никаких ограничений на геометрию распределения компонент в системе. К сожалению, этим тривиальным примером и ограничивается список точно решаемых трехмерных задач (точные границы для эффективных констант мы здесь рассматривать не будем).

Несколько дальше удалось продвинуться в двумерном случае. Это оказалось возможным потому, что базовая система уравнений для локальных полей в двумерном случае допускает преобразования симметрии, не изменяющие макроскопических характеристик среды. Основополагающая работа в этом направлении была проделана Дыхне [2] для случая электрической задачи. В этой работе было показано, что эффективные проводимости произвольного исходного двумерного композита и композита, в котором фазы переставлены местами, связаны между собой некоторым простым соотношением взаимности. Эта работа послужила толчком для целой серии других исследований, связанных с поиском новых соотношений взаимности, в частности и для упругой задачи.

Соотношение, аналогичное [2], было получено автором [3] для эффективного модуля сдвига $G^*$ двумерного двухфазного несжимаемого $(K_1 = K_2 \to \infty)$ композита. Позже, в серии работ авторов [4,5], этот результат был представлен в более общем виде. Кроме того, в этих работах был рассмотрен случай трехмерного композита с цилиндрическим распределением фаз. Авторы [5], используя симметрию локальных полевых уравнений в двумерном случае, показали: если тензор локальной упругой податливости подвергается некоторому линейному преобразованию, то тензор эффективной податливости композита подвергается точно такому же преобразованию. В [4] на основании этого результата было показано, что если выполняется соотношение взаимности [3] для модуля сдвига $G^*$ несжимаемого композита, то должно выполняться точно такое же соотношение для эффективного модуля Юнга $E^*$ композита с произвольным $K = K_1 = K_2$.

Одно из направлений в теории гетерогенных систем связано с возможностью представить выражения для эффективных констант композита в виде формальных рядов, члены которых определяются некоторыми параметрами, характеризующими локальную микроструктуру материала (например, коэффициентами Фурье, корреляционными функциями).

В настоящей работе анализируются ряды, полученные на основе преобразований Фурье. Общая схема расчета была предложена Херрингом [6] для случая эффективной проводимости композита и использована авторами [7] для решения соответствующей упругой задачи. В дальнейшем это направление практически не имело развития. Ниже показано, что все известные точные выражения для эффективных упругих констант композита удается получить на основе анализа таких формальных рядов.

## Общие выражения для эффективных упругих констант

Исходная система уравнений, описывающих упругие свойства произвольного линейного неоднородного материала, имеет вид

$$\sigma_{ik}(\mathbf{r}) = c_{iklm}(\mathbf{r})\varepsilon_{lm}(\mathbf{r}), \quad \varepsilon_{ik}(\mathbf{r}) = s_{iklm}(\mathbf{r})\sigma_{lm}(\mathbf{r}), \qquad (1)$$

$$\varepsilon_{lm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l}\right), \quad \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0. \qquad (2)$$

Здесь $u_i(\mathbf{r})$, $\sigma_{ik}(\mathbf{r})$, $\varepsilon_{lm}(\mathbf{r})$, $c_{iklm}(\mathbf{r})$, $s_{iklm}(\mathbf{r})$ — локальные смещения, напряжения, деформации и упругие константы соответственно. Для эффективных констант материала имеем

$$\langle \sigma_{ik} \rangle = c^*_{iklm}\langle \varepsilon_{lm} \rangle, \qquad \langle \varepsilon_{ik} \rangle = s^*_{iklm}\langle \sigma_{lm} \rangle, \qquad (3)$$

где угловые скобки означают усреднение соответствующих величин по представительному объему.

Схема [6] использовалась в [7] для решения упругой задачи. Чтобы получить выражения для эффективных констант $c^*_{iklm}$ и $s^*_{iklm}$, все флуктуирующие величины необходимо разложить в ряды Фурье

$$\sigma_{ik}(\mathbf{r}) = \langle \sigma_{ik} \rangle + \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \sigma^{\mathbf{q}}_{ik} e^{i\mathbf{qr}}, \quad \varepsilon_{lm}(\mathbf{r}) = \langle \varepsilon_{lm} \rangle + \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \varepsilon^{\mathbf{q}}_{lm} e^{i\mathbf{qr}},$$

$$c_{iklm}(\mathbf{r}) = \langle c_{iklm} \rangle + \sum_{\mathbf{q}\neq 0} c^{\mathbf{q}}_{iklm}\, e^{i\mathbf{qr}},$$

$$s_{iklm}(\mathbf{r}) = \langle s_{iklm} \rangle + \sum_{\mathbf{q}\neq 0} s^{\mathbf{q}}_{iklm}\, e^{i\mathbf{qr}}. \qquad (4)$$

Подстановка (4) в одно из уравнений (1) приводит в общем случае к бесконечной системе линейных уравнений относительно коэффициентов Фурье напряжений $\sigma^{\mathbf{q}}_{ik}$ и деформаций $\varepsilon^{\mathbf{q}}_{ik}$. Например, первое уравнение (1) дает

$$\langle \sigma_{ik} \rangle = \langle c_{iklm} \rangle \langle \varepsilon_{lm} \rangle + \sum_{\mathbf{q}\neq 0} c^{-\mathbf{q}}_{iklm} \varepsilon^{\mathbf{q}}_{lm} \quad \text{при} \quad \mathbf{q} = 0,$$

$$\sigma^{\mathbf{q}}_{ik} = \langle c_{iklm} \rangle \varepsilon^{\mathbf{q}}_{lm} + c^{\mathbf{q}}_{iklm}\langle \varepsilon_{lm} \rangle + \sum_{\mathbf{q}_1\neq\mathbf{q}\neq 0} c^{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1}_{iklm}\varepsilon^{\mathbf{q}_1}_{lm} \quad \text{при} \quad \mathbf{q} \neq 0,$$

Решив эту систему с использованием уравнений (2), можно выразить все коэффициенты Фурье $\varepsilon^{\mathbf{q}}_{ik}$ (с $\mathbf{q} \neq 0$) в первом уравнении через средние значения деформаций $\langle \varepsilon_{ik} \rangle$, что с учетом (3) позволяет получить выражение для $c^*_{iklm}$. Достаточно прозрачная процедура, подробно изложенная в [7], приводит к следующим выражениям для эффективных упругих констант:

$$c^*_{iklm} = \langle c_{iklm} \rangle - \sum_{\mathbf{q}\neq 0} c^{-\mathbf{q}}_{ikgh} Q_{ghsn} c^{\mathbf{q}}_{snlm}$$
$$+ \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \sum_{\mathbf{q}_1\neq\mathbf{q}\neq 0} c^{-\mathbf{q}}_{ikuv} Q_{uvsn} c^{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1}_{sngh} Q^{(1)}_{ghrt} c^{\mathbf{q}_1}_{rtlm} - \ldots, \qquad (5)$$

$$s^*_{iklm} = \langle s_{iklm} \rangle - \sum_{\mathbf{q}\neq 0} s^{-\mathbf{q}}_{ikgh} T_{ghsn} s^{\mathbf{q}}_{snlm}$$
$$+ \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \sum_{\mathbf{q}_1\neq\mathbf{q}\neq 0} s^{-\mathbf{q}}_{ikuv} T_{uvsn} s^{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1}_{sngh} T^{(1)}_{ghrt} s^{\mathbf{q}_1}_{rtlm} - \ldots. \qquad (6)$$

Здесь $c^{\mathbf{q}_i}_{rtlm}$, $s^{\mathbf{q}_i}_{rtlm}$ — коэффициенты Фурье соответствующих упругих констант. Значения $Q^{(n)}_{ghsn}$, $T^{(n)}_{ghsn}$ зависят от ориентации векторов $\mathbf{q}_n$. Например, для величин $Q_{iklm}$, $T_{iklm}$, зависящих от компонент вектора $\mathbf{q}$, можно записать

$$Q_{iklm} = q_i Q^{-1}_{kl} q_m, \qquad Q_l = \langle c_{iklm} \rangle q_k q_m, \qquad (7)$$

$$T_{iklm} = \langle s_{iklm} \rangle^{-1} - \langle s_{ikgh} \rangle^{-1} R_{ghuv} \langle s_{uvlm} \rangle^{-1}, \qquad (8)$$
$$R_{iklm} = q_i R^{-1}_{kl} q_m, \qquad R_{il} = \langle s_{iklm} \rangle^{-1} q_k q_m.$$

## Объемный модуль трехмерного композита

Рассмотрим двухфазный композит с изотропными фазами. Для изотропного материала в трехмерном случае имеем

$$c_{ijkl} = K\delta_{ij}\delta_{kl} + G\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right), \qquad (9)$$

где $K$ и $G$ — объемный и сдвиговый модули соответственно, $\delta_{ik}$ — единичная матрица. Будем рассматривать выражение (5) для $c^*_{iklm}$. Компоненты матрицы $Q^{-1}_{ij}$ из (7) с учетом (9) можно представить в виде

$$Q^{-1}_{ii} = \frac{\big(3\langle K \rangle + \langle G \rangle\big)(q^2 - q_i^2) + 3\langle G \rangle q^2}{\big(3\langle K \rangle + 4\langle G \rangle\big)\langle G \rangle q^4}$$

$$Q^{-1}_{ik} = -\frac{\big(3\langle K \rangle + \langle G \rangle\big) q_i q_k}{\big(3\langle K \rangle + 4\langle G \rangle\big)\langle G \rangle q^4}, \quad i \neq k. \qquad (10)$$

Используя выражение (9), представим также $c^{\mathbf{q}}_{ijkl}$ в виде

$$c^{\mathbf{q}}_{ijkl} = K^{\mathbf{q}}\kappa_{ijkl} + G^{\mathbf{q}} g_{ijkl}, \quad \kappa_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl},$$

$$g_{ijkl} = \left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right). \qquad (11)$$

Подставим (11) в (5) и выделим ряд, содержащий только коэффициенты Фурье объемного модуля. Для произвольного члена такого ряда можно записать

$$c^{*(n)}_{iklm} = \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \sum_{\mathbf{q}_1\neq\mathbf{q}\neq 0} \cdots \sum_{\mathbf{q}_{n-1}\neq\mathbf{q}_{n-2}\neq 0} K^{-\mathbf{q}} K^{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1} \ldots K^{\mathbf{q}_{n-1}}$$
$$\times \kappa_{ikuv} Q_{uvsn} \kappa_{sngh} \ldots \kappa_{jnfq} Q^{(n-2)}_{fqrt} \kappa_{rtlm}. \qquad (12)$$

Подстановка $\kappa_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl}$ дает

$$\kappa_{ikuv} Q_{uvsn} \kappa_{sngh} \ldots \kappa_{jnfq} Q^{(n-2)}_{fqrt} \kappa_{rtlm} = \delta_{ik}(Q_{nngg})^{n-1}\delta_{lm}, \qquad (13)$$

поскольку свертка

$$Q_{nngg} = Q_{1111} + Q_{2222} + Q_{3333} + 2Q_{1122} + 2Q_{1133} + 2Q_{2233} \tag{14}$$

не зависит от компонент $\mathbf{q}$. Подставив в последнее выражение (7), (10), находим

$$Q = Q_{nngg} = \frac{3}{3\langle K\rangle + 4\langle G\rangle}. \tag{15}$$

С учетом (12), (15) для эффективного объемного модуля получается ряд

$$K^* = \frac{1}{3}\left(c^*_{1111} + 2c^*_{1122}\right) = \langle K\rangle - Q\sum_{\mathbf{q}\neq 0} K^{-\mathbf{q}}K^{\mathbf{q}}$$
$$+ Q^2\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_1\neq\mathbf{q}\neq 0} K^{-\mathbf{q}}K^{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1}K^{\mathbf{q}} + \ldots + f(K^{\mathbf{q}}, G^{\mathbf{q}}). \tag{16}$$

Здесь через $f(K^{\mathbf{q}}, G^{\mathbf{q}})$ обозначена оставшаяся часть ряда, зависящая, в частности, от перекрестных комбинаций коэффициентов Фурье объемного и сдвигового модулей.

В [8] показано, как можно вычислить суммы произведений коэффициентов Фурье, фигурирующие в рядах вида (16). Для произвольного члена ряда можно записать

$$\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_1\neq\mathbf{q}\neq 0}\cdots\sum_{\mathbf{q}_n\neq\mathbf{q}_{n-1}\neq 0} K^{-\mathbf{q}}K^{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1}\ldots K^{\mathbf{q}_{n-1}-\mathbf{q}_n}K^{\mathbf{q}_n} =$$
$$= \left(\langle K'\rangle - \langle K\rangle\right)^n\left\langle\left(K - \langle K\rangle\right)^2\right\rangle$$
$$= \theta(1-\theta)(1-2\theta)^n(K_1 - K_2)^{n+2}, \tag{17}$$

где $\langle K'\rangle = \theta K_2 + (1-\theta)K_1$; $K_1, K_2$ — объемные модули фаз; $\theta$ — концентрация первой фазы (с модулями $K_1, G_1$). С учетом (17) часть ряда (16), зависящую только от коэффициентов Фурье объемного модуля, можно просуммировать. В результате получим

$$K^* = \langle K\rangle - 3\,\frac{\theta(1-\theta)(K_1-K_2)^2}{3\langle K'\rangle + 4\langle G\rangle} + f(K^{\mathbf{q}}, G^{\mathbf{q}}). \tag{18}$$

Выражение (5), которое использовалось для получения (18), вообще говоря, не предполагает, что распределение фаз в композите изотропно. Поэтому, вычислив, скажем, $(c^*_{1111} + 2c^*_{1133})/3$, можно получить другое выражение для $f(K^{\mathbf{q}}, G^{\mathbf{q}})$, что, однако, не отражается на явно полученном в (18) выражении, которое всегда будет одним и тем же. Для того чтобы избавиться от такой неоднозначности для $f(K^{\mathbf{q}}, G^{\mathbf{q}})$, необходимо рассматривать макроскопически изотропный композит. При этом в (5) фактически можно провести усреднение по различным ориентациям внешних воздействий, поскольку в изотропном случае результат не должен зависеть от выбора $\langle\varepsilon_{lm}\rangle$ (либо $\langle\sigma_{ik}\rangle$). Второй поправочный член в (18) для $f(K^{\mathbf{q}}, G^{\mathbf{q}})$ при этом исчезает, а третий член содержит только перекрестную компоненту $(K^{-\mathbf{q}}G^{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1}K^{\mathbf{q}_1})$. Выражение (18) с учетом этого члена можно переписать в виде

$$K^* = \langle K\rangle - 3\,\frac{\theta(1-\theta)(K_1-K_2)^2}{3\langle K'\rangle + 4\langle G\rangle}$$
$$+ 6\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_1\neq\mathbf{q}\neq 0} k_3\,\frac{K^{-\mathbf{q}}G^{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1}K^{\mathbf{q}}}{\left(3\langle K\rangle + 4\langle G\rangle\right)^2} + \ldots, \tag{19}$$

где $k_3 = \left(3(\mathbf{f}\cdot\mathbf{f}_1)^2 - 1\right)$, $\mathbf{f} = \mathbf{q}/|\mathbf{q}|$, $\mathbf{f}_1 = \mathbf{q}_1/|\mathbf{q}_1|$. Таким образом, первый отличный от нуля перекрестный член ряда в изотропном случае представляет собой линейную по $G_1 - G_2$ поправку, которая зависит от геометрического распределения фаз. Отметим, что в выражении (19) отсутствуют члены ряда, зависящие только от сдвиговых коэффициентов Фурье, точно так же как в выражении для сдвигового модуля в изотропном случае отсутствуют члены, содержащие только коэффициенты Фурье объемного модуля.

Если предположить, что сдвиговые модули фаз одинаковы $G_1 = G_2 = G$, то сдвиговые коэффициенты Фурье $G^{\mathbf{q}}$ (с $\mathbf{q}\neq 0$) для такого композита обращаются в нуль, и из (18) имеем

$$K^* = \langle K\rangle - 3\,\frac{\theta(1-\theta)(K_1-K_2)^2}{3\langle K'\rangle + 4\langle G\rangle} = \frac{4\langle K\rangle G + 3K_1K_2}{3\langle K'\rangle + 4G}. \tag{20}$$

Это точная формула, впервые полученная автором [1]. Соотношение (20) при $G_1 = G_2 = G$ выполняется фактически для произвольного, в том числе и любого анизотропного, распределения фаз, т.е. двухфазный композит при $G_1 = G_2 = G$ становится полностью изотропным по своим упругим свойствам.

## Объемный модуль двумерного композита

Соотношения (5), (6) для эффективных упругих констант справедливы также в двумерном случае. Для изотропного двумерного материала можно записать

$$c_{ijkl} = K\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ij}\delta_{kl}). \tag{21}$$

Здесь $K$ и $G$ — двумерные объемный и сдвиговый модули. Как и раньше, $Q_{iklm} = q_iQ^{-1}_{kl}q_m$. Компоненты обратной матрицы $Q^{-1}_{kl}$ имеют вид

$$Q^{-1}_{ii} = \frac{\langle K\rangle(q^2 - q_i^2) + \langle G\rangle q^2}{\left(\langle K\rangle + \langle G\rangle\right)\langle G\rangle q^4},$$
$$Q^{-1}_{ik} = -\frac{\langle K\rangle q_iq_k}{\left(\langle K\rangle + \langle G\rangle\right)\langle G\rangle q^4}, \quad i\neq k. \tag{22}$$

Процедура, аналогичная той, которая использовалась при выводе (18), приводит к следующему выражению для эффективного объемного модуля двумерного двухфазного изотропного композита с учетом первого отличного от нуля перекрестного члена:

$$K^* = \frac{\langle K\rangle\langle G\rangle + K_1K_2}{\langle K'\rangle + \langle G\rangle} + \sum_{\mathbf{q}\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_1\neq\mathbf{q}\neq 0} k_3 \frac{K^{-\mathbf{q}}G^{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1}K^{\mathbf{q}}}{\big(\langle K\rangle + \langle G\rangle\big)^2} + \dots, \tag{23}$$

где

$$\langle K'\rangle = \theta K_2 + (1-\theta)K_1, \quad k_3 = \big(2(\mathbf{f}\cdot\mathbf{f}_1)^2 - 1\big);$$

причем оставшиеся члены ряда содержат только перекрестные комбинации коэффициентов Фурье. При одинаковых сдвиговых модулях фаз $G_1 = G_2 = G$ ($G^{\mathbf{q}} = 0$ при любых $\mathbf{q} \neq 0$) имеем

$$K^* = \frac{\langle K\rangle G + K_1K_2}{\langle K'\rangle + G}. \tag{24}$$

Эта формула впервые была получена в [9].

## Сдвиговый модуль двумерного композита

Рассмотрим теперь выражение для эффективной сдвиговой компоненты двумерного двухфазного композита при условии, что объемные модули фаз равны $K_1 = K_2 = K$. В этом случае все коэффициенты Фурье $\mathbf{K}^{\mathbf{q}} = 0$ (при любых $\mathbf{q} \neq 0$), и для коэффициентов Фурье в (5) с учетом (21) можно записать

$$c^{\mathbf{q}}_{ijkl} = G^{\mathbf{q}} g_{ijkl}, \quad g_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ij}\delta_{kl}). \tag{25}$$

Подставив (25) в (5), получим

$$c^*_{iklm} = \langle c_{iklm}\rangle - \sum_{\mathbf{q}\neq 0} G^{-\mathbf{q}}G^{\mathbf{q}} g_{ikgn}Q_{ghsn}\,g_{snlm} + \sum_{\mathbf{q}\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_1\neq\mathbf{q}\neq 0} G^{-\mathbf{q}}G^{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1}G^{\mathbf{q}_1} g_{ikuv}Q_{uvsn}g_{sngh}Q^{(1)}_{ghrt}g_{rtlm} - \dots. \tag{26}$$

Будем рассматривать изотропный случай. При этом, переходя в (26) к произвольной системе координат и усредняя по различным ориентациям, для сдвигового модуля $G^* = c^*_{1212}$ получим выражение

$$G^* = \langle G\rangle - \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0} k_2 \frac{G^{-\mathbf{q}}G^{\mathbf{q}}}{\langle G\rangle\big(\langle G\rangle + K\big)} + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_1\neq\mathbf{q}\neq 0} k_3 \frac{G^{-\mathbf{q}}G^{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1}G^{\mathbf{q}_1}}{\langle G\rangle^2\big(\langle G\rangle + K\big)^2} - \dots, \tag{27}$$

где коэффициенты $k_i$ могут быть представлены в виде

$$k_2 = 2\langle G\rangle + K,\ \ k_3 = \big[2(\mathbf{f}\cdot\mathbf{f}_1)^2 - 1\big]^2K^2 + 2K\langle G\rangle + 2\langle G\rangle^2,$$
$$k_4 = \alpha K^3 + (1+2\alpha)\langle G\rangle K^2 + 3K\langle G\rangle^2 + 2\langle G\rangle^3,\ \dots, \tag{28}$$
$$\alpha = \big[2(\mathbf{f}\cdot\mathbf{f}_1)^2 - 1\big]\big[2(\mathbf{f}_1\cdot\mathbf{f}_2)^2 - 1\big]\big[2(\mathbf{f}\cdot\mathbf{f}_2)^2 - 1\big].$$

Как и следовало ожидать, коэффициент $k_2$ не зависит от ориентации вектора $\mathbf{f}$ и, соответственно, квадратичный член ряда вычисляется явно уже только при условии изотропности системы. Любопытно отметить, что в линейном приближении по $K$ от ориентаций векторов $\mathbf{f}_i$ не зависят и остальные коэффициенты $k_n$. Выражение (27) в этом случае преобразуется к виду

$$G^* = \langle G\rangle - \sum_{\mathbf{q}\neq 0} a_2 G^{-\mathbf{q}}G^{\mathbf{q}} + \sum_{\mathbf{q}\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_1\neq\mathbf{q}\neq 0} a_3 G^{-\mathbf{q}}G^{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1}G^{\mathbf{q}_1} - \dots, \tag{29}$$

где

$$a_n = \frac{1}{\langle G\rangle^{n-1}} - \frac{n-1}{2}\frac{K}{\langle G\rangle^n}, \quad n = 2, 3, \dots. \tag{30}$$

Ряд (29) с коэффициентами (30) суммируется и приводит к выражению

$$G^* = \frac{G_1G_2}{(1-\theta)G_1 + \theta G_2} - \frac{1}{2}\frac{\theta(1-\theta)(G_1-G_2)^2}{2\big[(1-\theta)G_1 + \theta G_2\big]}K, \tag{31}$$

где $\theta$ — концентрация первой фазы. Отметим, что разложение в ряд по $K$ выражения для $G^*$, которое дает метод эффективной среды [10,11], приводит к (31) для первых двух членов ряда.

Рассмотрим теперь ряд для эффективной податливости. Для двумерного изотропного материала можно записать

$$s_{ijkl} = \frac{1}{4K}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{4G}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ij}\delta_{kl}). \tag{32}$$

Введем обозначения

$$\kappa = 2(s_{1111} + s_{1122}) = \frac{1}{K}, \qquad g = 4s_{1212} = \frac{1}{G}. \tag{33}$$

Для компонент тензора $\langle s_{lm\mu\nu}\rangle^{-1}$ с учетом (33) находим

$$\langle s_{1111}\rangle^{-1} = \frac{\langle\kappa\rangle + \langle g\rangle}{\langle\kappa\rangle\langle g\rangle}, \quad \langle s_{1122}\rangle^{-1} = \frac{\langle\kappa\rangle - \langle g\rangle}{\langle\kappa\rangle\langle g\rangle},$$
$$\langle s_{1212}\rangle^{-1} = \frac{1}{\langle g\rangle}. \tag{34}$$

Матрица $R_{ij}$ (8) имеет такую же структуру, как и матрица $Q_{ij}$ (7). С учетом (34) имеем

$$R^{-1}_{ii} = \frac{\big[\langle g\rangle(q^2 - q_i^2) + \langle\kappa\rangle q^2\big]\langle g\rangle}{\big(\langle\kappa\rangle + \langle g\rangle\big)q^4},$$
$$R^{-1}_{ik} = -\frac{\langle g\rangle^2 q_i q_k}{\big(\langle\kappa\rangle + \langle g\rangle\big)q^4}, \quad i \neq k. \tag{35}$$

Используя (32) и обозначения (33), коэффициенты Фурье в (6) можно переписать в виде

$$s^{\mathbf{q}}_{ijkl} = \frac{1}{4}\kappa^{\mathbf{q}}\kappa_{ijkl} + \frac{1}{4}g^{\mathbf{q}}g_{ijkl}, \quad \kappa_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl},$$
$$g_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ij}\delta_{kl}). \tag{36}$$

Снова будем полагать, что объемные сжимаемости фаз равны $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$. Тогда все $\kappa^{\mathbf{q}} = 0$ (при $\mathbf{q} \neq 0$), и из (6), с учетом (36), получим ряд

$$s^*_{iklm} = \langle s_{iklm} \rangle - \left(\frac{1}{4}\right)^2 \sum_{\mathbf{q}\neq 0} g^{-\mathbf{q}} g^{\mathbf{q}} g_{ikgh} T_{ghsn} g_{snlm}$$

$$+ \left(\frac{1}{4}\right)^3 \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \sum_{\mathbf{q}_1\neq\mathbf{q}\neq 0} g^{-\mathbf{q}} g^{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1} g^{-\mathbf{q}_1} g_{ikuv}$$

$$\times T_{uvsn} g_{sngh} T^{(1)}_{ghrt} g_{rtlm} - \dots . \quad (37)$$

Вычисления показывают, что в изотропном случае для сдвиговой компоненты податливости $g^* = 4s^*_{1212}$ ряд (37) может быть представлен в виде

$$g^* = \frac{1}{G^*} = \langle g \rangle - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \frac{g^{-\mathbf{q}} g^{\mathbf{q}}}{\langle g \rangle + \kappa}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \sum_{\mathbf{q}_1\neq\mathbf{q}\neq 0} k_3 \frac{g^{-\mathbf{q}} g^{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1} g^{\mathbf{q}_1}}{\big(\langle g \rangle + \kappa\big)^2} - \dots , \quad (38)$$

где

$$k_3 = \big[2(\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}_1)^2 - 1\big]^2,$$

$$k_4 = \big[2(\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}_1)^2 - 1\big] \big[2(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2)^2 - 1\big] \big[2(\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}_2)^2 - 1\big], \dots . \quad (39)$$

Можно заметить, что в предельном случае $\kappa \to 0$ ($K \to \infty$) выражения (27) и (38) преобразуются к виду

$$G^* = \langle G \rangle - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \frac{G^{-\mathbf{q}} G^{\mathbf{q}}}{\langle G \rangle}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \sum_{\mathbf{q}_1\neq\mathbf{q}\neq 0} k_3 \frac{G^{-\mathbf{q}} G^{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1} G^{\mathbf{q}_1}}{\langle G \rangle^2} - \dots ,$$

$$g^* = \langle g \rangle - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \frac{g^{-\mathbf{q}} g^{\mathbf{q}}}{\langle g \rangle}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \sum_{\mathbf{q}_1\neq\mathbf{q}\neq 0} k_3 \frac{g^{-\mathbf{q}} g^{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1} g^{\mathbf{q}_1}}{\langle g \rangle^2} - \dots \quad (40)$$

с одинаковыми коэффициентами в форме (39). Далее рассмотрим композит, полученный из исходного путем перестановки фаз (без изменения геометрической структуры). Для коэффициентов Фурье $g^{\mathbf{q}}$ исходного материала и материала с переставленными фазами $G'^{\mathbf{q}}$ можно записать [8]

$$g^{\mathbf{q}} = \frac{G'^{\mathbf{q}}}{G_1 G_2} \quad (41)$$

для любых $\mathbf{q}$ (в частности, $\langle g \rangle = \langle G' \rangle / G_1 G_2$ при $\mathbf{q} = 0$). Из (40) и (41) следует соотношение

$$G^* G'^* = G_1 G_2, \quad (42)$$

которое связывает между собой эффективные сдвиговые модули $G^*$ и $G'^*$ взаимных изотропных несжимаемых композитов. Соотношение (42) впервые было получено в [3].

## Модуль Юнга двумерного композита

Обращает на себя внимание тот факт, что ряд (38) для $1/G^*$ при одинаковых объемных модулях фаз $K_1 = K_2 = K$ легко преобразуется в более простой ряд для обратной величины модуля Юнга $1/E^*$. Для модуля Юнга двумерного изотропного материала имеем

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{4K} + \frac{1}{4G}. \quad (43)$$

Введя обозначение $w = 1/E$, с учетом (33) получим

$$w = \frac{1}{4}(\kappa + g), \qquad \langle w \rangle = \frac{1}{4}\big(\langle g \rangle + \kappa\big),$$

$$w^{\mathbf{q}} = \frac{1}{4} g^{\mathbf{q}}. \quad (44)$$

Соотношения (44) позволяют представить ряд (38) в виде

$$w^* = \frac{1}{E^*} = \langle w \rangle - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \frac{w^{-\mathbf{q}} w^{\mathbf{q}}}{\langle w \rangle}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \sum_{\mathbf{q}_1\neq\mathbf{q}\neq 0} k_3 \frac{w^{-\mathbf{q}} w^{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1} w^{\mathbf{q}_1}}{\langle w \rangle^2} - \dots \quad (45)$$

с коэффициентами (39). Как видно из (45), ряд для $1/E^*$ вообще не зависит от объемного модуля композита. В связи с этим существенный интерес представляло бы также рассмотрение соответствующего выражения для $E^*$.

К сожалению, ряд для $E^*$ непосредственно из (5) получить не удается. Поэтому поступим следующим образом. Перепишем локальные линейные уравнения (1) для композита, составленного из изотропных материалов в симметричном виде

$$E_{ijkl}(\mathbf{r}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{r}) = \nu_{ijmn}(\mathbf{r}) \sigma_{mn}(\mathbf{r}), \quad (46)$$

введя новые тензоры

$$E_{ijkl}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) E(\mathbf{r}),$$

$$\nu_{ijkl}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\Big\{\big[1 - \nu(\mathbf{r})\big]\delta_{ij}\delta_{kl}$$

$$+ \big[1 + \nu(\mathbf{r})\big](\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ij}\delta_{kl})\Big\}, \quad (47)$$

где $E(\mathbf{r})$, $\nu(\mathbf{r})$ — локальный модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно. Процедуру, используемую при выводе (4), (5), без особых проблем можно применить и к уравнению (46). Разложение всех флуктуирующих величин в (46) в ряды Фурье приводит к следующей системе линейных уравнений:
при $\mathbf{q} = 0$

$$\langle E_{ijkl} \rangle \langle \varepsilon_{kl} \rangle + \sum_{\mathbf{q}\neq 0} E^{-\mathbf{q}}_{ijkl} \varepsilon^{\mathbf{q}}_{kl} = \langle \nu_{ijmn} \rangle \langle \sigma_{mn} \rangle + \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \nu^{-\mathbf{q}}_{ijmn} \sigma^{\mathbf{q}}_{mn}, \quad (48)$$

при $\mathbf{q} \neq 0$

$$E^{\mathbf{q}}_{ijkl}\langle\varepsilon_{kl}\rangle + \langle E_{ijkl}\rangle\varepsilon^{\mathbf{q}}_{kl} + \sum_{\mathbf{q}_1\neq\mathbf{q}\neq 0} E^{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1}_{ijkl}\varepsilon^{\mathbf{q}}_{kl} = \langle\nu_{ijmn}\rangle\sigma^{\mathbf{q}}_{mn}$$

$$+ \nu^{\mathbf{q}}_{ijmn}\langle\sigma_{mn}\rangle + \sum_{\mathbf{q}_1\neq\mathbf{q}\neq 0}\nu^{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1}_{ijmn}\sigma^{\mathbf{q}_1}_{mn}. \tag{49}$$

Последовательно решив (49) с учетом (2) относительно $\varepsilon^{\mathbf{q}}_{kl}$, $\sigma^{\mathbf{q}}_{mn}$ и подставив эти выражения в (48), можно получить соотношение

$$E^*_{ijkl}\langle\varepsilon_{kl}\rangle = \nu^*_{ijmn}\langle\sigma_{mn}\rangle \tag{50}$$

для эффективных упругих констант $E^*_{ijkl}$, $\nu^*_{ijmn}$ композита с произвольным геометрическим распределением изотропных фаз.

Вычисления приводят к следующему выражению для $E^*_{ijkl}$:

$$E^*_{ijkl} = \langle E_{ijkl}\rangle - \sum_{\mathbf{q}\neq 0}\left(\frac{F_{ijkl}}{\langle E\rangle} - \frac{H_{ijkl}}{4K}\right)E^{-\mathbf{q}}E^{\mathbf{q}}$$

$$+ \sum_{\mathbf{q}\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_1\neq\mathbf{q}\neq 0}\left(\frac{H_{ijmn}H^{(1)}_{mnkl}}{16K^2} + \frac{F_{ijmn}F^{(1)}_{mnkl}}{\langle E\rangle^2}\right.$$

$$\left. - \frac{H_{ijmn}F^{(1)}_{mnkl} + F_{ijmn}H^{(1)}_{mnkl}}{4K\langle E\rangle}\right)E^{-\mathbf{q}}E^{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1}E^{\mathbf{q}_1} - \ldots, \tag{51}$$

где $F_{ijkl}$, $H_{ijkl}$ выражаются через $R_{ijmn}$, $T_{mnkl}$ (8) и имеют вид

$$F_{ijkl} = R_{ijmn}\langle\nu_{mnkl}\rangle^{-1}, \quad H_{ijkl} = \lambda_{ijmn}T_{mnkl},$$

$$\lambda_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - 2\delta_{ij}\delta_{kl}). \tag{52}$$

Отметим, что даже при изотропном распределении фаз тензор $E^*_{ijkl}$ нельзя привести к форме (47) и, следовательно, выразить все компоненты $E^*_{ijkl}$ через эффективный модуль Юнга $E^*$ композита. Однако можно заметить, что для сдвиговых компонент $\langle\varepsilon_{12}\rangle$, $\langle\sigma_{12}\rangle$ в изотропном случае выполняется уравнение

$$E^*_{1212}\big(\langle\varepsilon_{12}\rangle + \langle\varepsilon_{21}\rangle\big) = \nu^*_{1212}\big(\langle\sigma_{12}\rangle + \langle\sigma_{21}\rangle\big),$$

которое может быть переписано в виде

$$E^*\langle\varepsilon_{12}\rangle = (1+\nu^*)\langle\sigma_{12}\rangle.$$

Можно показать, что для модуля Юнга $E^*$ и коэффициента Пуассона $\nu^*$ изотропного композита с одинаковыми объемными модулями фаз имеют место соотношения

$$E^* = 2E^*_{1212}, \qquad \nu^* = 2\nu^*_{1212} - 1. \tag{53}$$

Достаточно громоздкие вычисления приводят к следующему выражению для модуля Юнга изотропного композита, составленного из изотропных материалов с одинаковыми объемными модулями:

$$E^* = \langle E\rangle - \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{E^{-\mathbf{q}}E^{\mathbf{q}}}{\langle E\rangle}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_1\neq\mathbf{q}\neq 0}k_3\frac{E^{-\mathbf{q}}E^{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1}E^{\mathbf{q}_1}}{\langle E\rangle^2} - \ldots, \tag{54}$$

где $k_n$ определяются соотношениями (39). При выводе (51), (54) были использованы следующие соотношения между коэффициентами Фурье и средними значениями модуля Юнга и коэффициента Пуассона, которые выполняются при $K_1 = K_2 = K$:

$$E^{\mathbf{q}} = -2K\nu^{\mathbf{q}}, \qquad \langle E\rangle = 2(1-\langle\nu\rangle)K. \tag{55}$$

Как видно из (54), ряд для $E^*$, так же как и ряд для $1/E^*$ (45), зависит только от параметров, связанных с модулем Юнга, причем оба ряда имеют одинаковую структуру. Из (45) и (54) непосредственно следует соотношение для модулей Юнга взаимных систем

$$E^*E'^* = E_1E_2, \tag{56}$$

которое выполняется уже при произвольном объемном модуле $K$. С учетом (43) последнее выражение можно переписать в виде

$$\left(\frac{1}{G^*} + \frac{1}{K}\right)\left(\frac{1}{G'^*} + \frac{1}{K}\right) = \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{K}\right)\left(\frac{1}{G_2} + \frac{1}{K}\right). \tag{57}$$

Соотношения (56), (57) были получены в [4].

Для компонент тензора $\nu^*_{ijmn}$, фигурирующего в (50), было получено выражение

$$\nu^*_{ijmn} = \langle\nu_{ijmn}\rangle - \sum_{\mathbf{q}\neq 0}\left(\frac{1}{4}H_{ijkl} - \frac{F_{ijkl}}{2(1-\langle\nu\rangle)}\right)\lambda_{klmn}\nu^{-\mathbf{q}}\nu^{\mathbf{q}}$$

$$+ \sum_{\mathbf{q}\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_1\neq\mathbf{q}\neq 0}\left(\frac{1}{8}H_{ijkl}H_{klvu} + \frac{F_{ijkl}F_{klvu}}{2\big(1-\langle\nu\rangle\big)^2}\right.$$

$$\left. - \frac{H_{ijkl}F_{klvu} + F_{ijkl}H_{klvu}}{4\big(1-\langle\nu\rangle\big)}\right)\lambda_{vumn}\nu^{-\mathbf{q}}\nu^{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1}\nu^{\mathbf{q}_1}. \tag{58}$$

После преобразований с учетом (53) для коэффициента Пуассона получается ряд

$$\nu^* = \langle\nu\rangle - \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\nu^{-\mathbf{q}}\nu^{\mathbf{q}}}{\langle\nu\rangle - 1}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_1\neq\mathbf{q}\neq 0}k_3\frac{\nu^{-\mathbf{q}}\nu^{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1}\nu^{\mathbf{q}_1}}{\big(\langle\nu\rangle - 1\big)^2} - \ldots \tag{59}$$

с коэффициентами (39). Любопытно, что это выражение также определяется собственными параметрами, связанными только с коэффициентом Пуассона. При $K \to \infty$ (несжимаемый композит) $\nu_1 \to 1$, $\nu_2 \to 1$, $\langle\nu\rangle \to 1$.

Может показаться, что (59) дает неправильный результат. Однако при рассмотрении такого предела необходимо учесть, что $\nu^{\mathbf{q}} \sim (\nu_1 - \nu_2) \to 0$, и, следовательно, $\nu^* \to 1$, как и должно быть.

## Обсуждение результатов

Соотношения (20), (24), (42), (56), (57) представляют полный набор известных точных решений задачи о вычислении эффективных упругих констант двухфазных композитов, полученных в [1,3,4,9] различными способами. Выше было показано, что все такие решения могут быть получены на основе единого подхода, связанного с представлением выражений для эффективных констант в виде рядов Херринга, и являются простым следствием симметрии коэффициентов в этих рядах.

Все эти решения инвариантны относительно геометрической структуры материала, т. е. выполняются либо для произвольных геометрических распределений фаз, либо при минимальном (но особенно интересном) ограничении, что такие распределения изотропны. Наибольший интерес представляют соотношения (42), (56), (57), связывающие эффективные константы взаимных систем, поскольку они позволяют сделать некоторые довольно общие заключения (к сожалению, только для двумерного случая).

Прежде всего, из (57) следует общий точный результат при $\theta = 1/2$ и геометрически симметричном распределении фаз

$$E^* = \sqrt{E_1 E_2}.$$

Данное соотношение интересно тем, что вполне четко указаны ограничения на геометрическую структуру материала, для которых оно выполняется, — симметричное распределение фаз. С другой стороны, заметим, что такое распределение можно реализовать далеко не единственным способом.

Заметим, что все точные формулы для упругих констант получены при одном дополнительном симметричном условии, существенно ограничивающем область их применения: формулы (20), (24) для эффективного объемного модуля $K^*$ получены в предположении, что сдвиговые модули фаз имеют произвольное, но одинаковое значение $G = G_1 = G_2$; с другой стороны, общая формула (57) для сдвигового модуля $G^*$ предполагает, что одинаковы объемные модули фаз — $K = K_1 = K_2$. Будем полагать, что фазы имеют одинаковые концентрации $\theta = 1/2$ и распределены в композите геометрически симметрично. Тогда (57) можно переписать в виде

$$\left(\frac{1}{G^*} + \frac{1}{K}\right)^2 = \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{K}\right)\left(\frac{1}{G_2} + \frac{1}{K}\right). \qquad (60)$$

Подставив в (24) $G = G^*$, а в (60) $K = K^*$, мы получим некоторую самосогласованную систему уравнений

$$K^* = \frac{\langle K \rangle G^* + K_1 K_2}{\langle K' \rangle + G^*},$$

$$\left(\frac{1}{G^*} + \frac{1}{K}\right)^2 = \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{K^*}\right)\left(\frac{1}{G_2} + \frac{1}{K^*}\right), \qquad (61)$$

которая позволяет рассчитать $G^*$ и $K^*$ для произвольного набора констант $K_1, G_1, K_2, G_2$. Отметим, что реально мы имеем три композита: первый (исходный) — с фазами, характеризуемыми набором констант $K_1, G_1, K_2, G_2$, эффективные свойства которого неизвестны; второй — с набором констант $K_1, G^*, K_2, G^*$, эффективный объемный модуль $K^*$ которого определяется из первого уравнения (61), а $G^*$ является решением этой же системы уравнений; третий — с набором констант $K^*, G_1, K^*, G_2$, эффективным сдвиговым модулем $G^*$, определяемым из второго уравнения (61), и $K^*$, являющимся решением системы (61). Можно предположить, что для некоторых структур все три композита обладают одинаковыми эффективными свойствами. Если такое предположение верно, система уравнений (61) позволяет рассчитать эффективные параметры симметричного двухфазного композита с произвольным набором констант $K_1, G_1, K_2, G_2$. В пользу такого предположения говорит, например, выполнение для произвольного изотропного композита (с $K_2 \geq K_1$ и $G_2 \geq G_1$) строгого неравенства

$$\frac{\langle K \rangle G_1 + K_1 K_2}{\langle K' \rangle + G_1} \leq K^* \leq \frac{\langle K \rangle G_2 + K_1 K_2}{\langle K' \rangle + G_2} \qquad (62)$$

(двумерный аналог [12]), указывающего, в частности, на то, что всегда можно подобрать некоторое $G_1 \leq G \leq G_2$, для которого (62) переходит в равенство. Логично предположить, что это происходит, когда $G$ совпадает с эффективным сдвиговым модулем соответствующего композита $G^*$, т. е. композиты с модулями фаз $K_1, G_1, K_2, G_2$ и $K_1, G^*, K_2, G^*$ характеризуются одним и тем же эффективным объемным модулем $K^*$.

Любопытно, что уравнения (61) совпадают с уравнениями, которые дает метод эффективной среды [10,11].

## Список литературы


[1] *Hill R.* // J. Mech. Phys. Solids. 1963. Vol. 11. N 5. P. 357–372.
[2] *Дыхне А.М.* // ЖЭТФ. 1970. Т. 59. № 1. С. 110–115.
[3] *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 250 с.
[4] *Helsing J., Milton G.W., Movchan A.B.* // J. Mech. Phys. Solids. 1997. Vol. 45. N 4. P. 565–590.
[5] *Cherkaev A., Lurie K., Milton G.W.* // Proc. Roy. Soc. Lond. 1992. Vol. A438. P. 519–529.
[6] *Herring C.* // J. Appl. Phys. 1960. Vol. 31. N 11. P. 1939–1953.
[7] *Кудинов В.А., Мойжес Б.Я., О-Гым-Ден В.* // ЖТФ. 1975. Т. 45. Вып. 4. С. 759–765.
[8] *Алешин В.И.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 1. С. 9–14.
[9] *Hill R.* // J. Mech. Phys. Solids. 1964. Vol. 12. P. 199–212.
[10] *Hill R.* // J. Mech. Phys. Solids. 1965. Vol. 13. P. 213–222.
[11] *Budiansky B.* // J. Mech. Phys. Solids. 1965. Vol. 13. P. 223–227.
[12] *Hashin Z., Shtrikman S.* // J. Mech. Phys. Solids. 1963. Vol. 11. P. 127–140.