01;03

Неустойчивости тангенциального разрыва

© В.Г. Кирцхалия, А.А. Рухадзе

Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН,
119991 Москва, Россия
e-mail: rukh@fpl.ru

(Поступило в Редакцию 31 октября 2006 г. В окончательной редакции 1 марта 2007 г.)

Дан критический анализ результатов по неустойчивости тангенциального разрыва в сжимаемой жидкости, изложенных Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшицем. Рассмотрен простейший случай, когда разрыв терпит лишь скорость течения жидкости. Исследовано влияние сильного поперечного поля тяжести на устойчивость тангенциального разрыва.

PACS: 02.30.Yy, 41.60.Bq

Неустойчивость тангенциального разрыва в сжимаемой жидкости

Постановка и решение задачи устойчивости тангенциального разрыва в несжимаемой жидкости принадлежат Г. Гельмгольцу (H. Helmholtz, 1868) и У. Кельвину (W. Kelvin, 1871), поэтому открытая ими неустойчивость была названа „неустойчивость Кельвина–Гельмгольца“. Инкремент развития неустойчивости Кельвина–Гельмгольца увеличивается с ростом скачка скорости, а следовательно, при больших скоростях разрыва, сравнимых со скоростью звука в жидкости, развитая Кельвином и Гельмгольцем теория неприменима, поскольку существенным становится учет сжимаемой жидкости.

На необходимость учета сжимаемой жидкости при больших скоростях разрыва впервые обратил внимание Л.Д. Ландау в 1944 г. [см. 1, § 84, з. 1][1]. Уравнения движения жидкости запишем в виде:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\mathrm{div}\,(\rho_0\mathbf{v} + \rho\mathbf{V}_0), \\ &\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + V_0\,\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x} = -\frac{\nabla p}{\rho_0},\ \ p = U^2\rho, \\ &\Delta p = \frac{1}{U^2}\left[\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2V_0\,\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial t} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Следуя [1], решения системы (1) ищем в виде поверхностной волны, бегущей вдоль скорости и затухающей по обе стороны поверхности разрыва, т. е.

$$p = \exp[i(kx - \omega t)]\begin{cases} C_1\exp(-\chi_1 z), & z > 0, \\ C_2\exp(\chi_2 z), & z < 0, \end{cases} \tag{2}$$

причем считается, что $\mathrm{Re}\,\chi_{1,2} > 0$.

[1] В [1, § 84, з. 1 и 2] рассмотрен случай распространения поверхностных волн под произвольным углом к скорости течения. Нами рассматриваются только одномерные возмущения, распространяющиеся вдоль разрыва. Однако все формулы (8)–(14) при этом сохраняются, если под V_0 понимать $V_0\cos\theta$, где θ — угол между волновым вектором и скоростью течения. Поэтому ниже этот угол не вводится.

Граничные условия на поверхности разрыва при $z = 0$ получаются из самих уравнений (1) и имеют вид

$$\left\{\frac{\frac{\partial p}{\partial x}}{\omega - kV_0}\right\}_{z=0} = 0, \quad \{p\}_{z=0}. \tag{3}$$

Символ $\{A\}_{z=0}$ означает скачок величины A на поверхности $z = 0$. Решение системы (1)–(3) сводится следующему дисперсионному уравнению [1, § 84]:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\chi_1}{(\omega - kV_0)^2} = -\frac{\chi_2}{\omega^2}, \\ &\chi_1^2 = k^2 - \frac{(\omega - kV_0)^2}{U^2}, \\ &\chi_2^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{U^2}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

В пределе $U \to \infty$ (несжимаемая жидкость) уравнение (4) переходит в уравнение, исследованное в [1, § 29].

Следует особо обратить внимание на то, что уравнение (4) является уравнением для поверхностной волны, для которой должны удовлетворяться условия

$$\mathrm{Re}\,\chi_{1,2} > 0. \tag{5}$$

Именно это обстоятельство не было учтено Л.Д. Ландау в 1944 г. (что сохранилось и в [1]), когда он выписал общее решение (4) в виде

$$\omega = \frac{k}{2}\left[V_0 \pm i\sqrt{4U\left(U^2 + V_0^2\right)^{1/2} - V_0^2 - 4U^2}\right]. \tag{6}$$

Согласно этому решению, инкремент неустойчивости растет с увеличением V_0, достигает максимума при $V_0 = \sqrt{3}\,U$

$$\mathrm{Im}\,\omega_{\max} = \frac{kU}{2} = \frac{kV_0}{2\sqrt{3}} \tag{7}$$

и дальше падает с ростом V_0, обращаясь в нуль при

$$V_{0c} = 2\sqrt{2}\,U. \tag{8}$$

Однако такой анализ неверен, поскольку не учитывает условий (5), которые определяют область применимости уравнения (4). Действительно, при $V = V_{0c}$ частота действительна и равна $\omega = \sqrt{2}\,kU$, поэтому $\chi_{1,2}^2 = -k^2 < 0$, что противоречит (5). Таким образом, по крайней мере, вывод о стабилизации неустойчивости разрыва при скорости, превышающей критическую (8), неверен!

Для определения границы неустойчивости в соотношении (4) следует подставить решение (6) и потребовать выполнения условий (5). Простой анализ дает новую границу неустойчивости

$$V_0 < 2.2U, \tag{9}$$

причем на верхнем краю этой области

$$\operatorname{Im}\omega \approx 0.4kU \tag{10}$$

(ср. с (7)). На отмеченную выше неприменимость уравнения (4) при скоростях $V_0 > 2.2U$ впервые было обращено внимание в работе [2], которая, однако, осталась незамеченной, поэтому задача вновь подробно была проанализирована в работе [3].

Вынужденное излучение звука при сверхзвуковом тангенциальном разрыве — черенковская неустойчивость

При больших, сверхзвуковых, разрывах следует обратить внимание на возможность развития еще одного типа неустойчивости, а именно на вынужденное черенковское излучение поверхностью разрыва звуковых колебаний в покоящейся жидкости. Собственно это следует уже из § 84 [1], см. задачу 2, в которой решена задача отражения звука от поверхности разрыва при условии

$$V_0 > V_{0c} = 2\sqrt{2}\,U,$$

когда, как ошибочно считается в [1], тангенциальный разрыв устойчив и обнаружено усиление отраженного сигнала по сравнению с падающим. Это явление в [1] было названо излучением звука поверхностью сверхзвукового разрыва, а не вынужденным излучением звука. Более того, оно вообще не связывается с новой излучательной черенковской неустойчивостью, обусловленной вынужденным характером излучения. Ниже, следуя работе [4], мы покажем, что это именно так.[2]

Чтобы быть максимально аккуратными в своем доказательстве, рассмотрим устойчивость тангенциального разрыва в слое сжимаемой жидкости толщиной $2a$, причем слой $0 < z < a$ движется со скоростью $\mathbf{V}_0 \parallel OX$ относительно слоя $-a \le z \le 0$. Уравнения движения при этом сохраняют вид (1); не изменяются и граничные условия на поверхности разрыва (3), но меняется вид решений (2), которые теперь следует писать в виде

$$p = \exp[i(kx - \omega t)] \begin{cases} C_1 \exp(-\chi_1 z) + C_2 \exp(\chi_1 z), & z > 0, \\ C_1' \exp(\chi_2 z) + C_2' \exp(-\chi_2 z), & z < 0. \end{cases} \tag{11}$$

Кроме того, необходимо дополнить граничные условия (3) условиями на ограничивающих слой поверхностях $z = \pm a$. Мы выберем простейшие из граничных условий: равенство нулю нормальных составляющих возмущения скорости, которое сводится к условию

$$\left.\frac{dp}{dz}\right|_{z=\pm a} = 0, \tag{12}$$

и постараемся сделать выводы, слабо зависящие от условий (12). Наконец, соотношения (4) для $\chi_{1,2}$ сохраняются.

Решение сформулированной задачи сводится к дисперсионному уравнению

$$\frac{\chi_1 \operatorname{cth}(\chi_1 a)}{(\omega - kV_0)^2} = -\frac{\chi_2 \operatorname{cth}(\chi_2 a)}{\omega^2}. \tag{13}$$

В условиях (5), когда колебания являются поверхностными, из уравнения (13) в пределе $a \to \infty$ получаем (4). Как уже отмечалось выше, при сверхзвуковой скорости разрыва условия (5) нарушаются и колебания становятся объемными. В результате оказывается возможным возбуждение объемного звука в покоящейся части жидкости при $V_0 > U$. Чтобы убедиться в сказанном, положим

$$x_1^2 > 0, \quad \chi_2^2 < 0, \quad |\chi_2 a| \gg 1 \tag{14}$$

и будем искать решение уравнения (13), считая выполненным резонансное условие черенковского излучения

$$\omega = kV_0 + \delta = \omega_0 + \delta, \tag{15}$$

где $\delta \ll \omega_0$, а ω_0 — частота звуковых колебаний в слое

$$\cos\left[a\sqrt{\frac{\omega^2}{U^2} - k^2}\right] = 0, \quad \omega_0 = U\sqrt{k^2 + \frac{\pi^2}{a^2}\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}. \tag{16}$$

При $V_0 \gg U$ волновое число $n \gg 1$. Это означает, что спектр (16) слабо зависит от граничных условий при $z = \pm a$ и в этом его ценность. Решение (16), однако, пригодно и при $V_0 \to U$, когда происходит смена режима поверхностной апериодической неустойчивости на объемную излучательную. Из формул (15) и (13) находим инкремент нарастания колебаний со спектром (16)

$$\frac{\delta}{\omega_0} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{U^2 ka}{a^2\omega_0^2}\operatorname{cth}(ka)\right)^{1/3}. \tag{17}$$

[2] См. также работу [6], в которой проанализирован случай череноковской излучательной неустойчивости поверхности разрыва в цилиндрической геометрии.

В пределе $ka \gg 1$ отсюда имеем соотношение

$$\frac{\delta}{\omega_0} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{U^2}{aV_0\omega}\right)^{1/3}, \tag{18}$$

которое можно получить из результатов задачи 2, § 84 [1], как это показано в [6].

Рассмотренная неустойчивость есть вынужденное резонансное черенковское излучение объемных звуковых волн в покоящейся части жидкости от поверхности сверхзвукового разрыва скорости. Следует заметить, что инкремент черенковской неустойчивости (17) намного меньше инкремента неустойчивости тангенциального разрыва на поверхностной волне (7) (в условиях их одновременной применимости). Их отношение порядка $(ka)^2 \gg 1$, поэтому при $V_0 < 2.2U$ черенковская неустойчивость будет подавлена неустойчивостью на поверхностной волне. Важно, однако, что эти неустойчивости имеют разную природу и разные области применимости, что черенковская неустойчивость развивается и при больших скоростях, когда неустойчивость на поверхностной волне стабилизирована.

Влияние поля тяжести на неустойчивость тангенциального разрыва

Рассмотрим вопрос о воздействии сильного гравитационного поля на характер развития резонансной черенковской неустойчивости тангенциального разрыва. Впервые в такой постановке задача для случая несжимаемой жидкости была рассмотрена У. Кельвином (W. Kelvin, 1871) при наличии скачка плотности на поверхности разрыва. Ее решение изложено в [1, § 12, з. 2 и 3]. Влияние гравитационного поля при этом проявилось в неустойчивости разрыва в условиях, когда более тяжелая жидкость находится над легкой. Аналогичная задача для тангенциального разрыва на мелкой воде была рассмотрена С.В. Бездниковым и О.П. Погуце в 1983 г., ее решение также изложено в ([1], § 108, з. 1). Но и они рассматривали случай несжимаемой жидкости. Кратко изложим результаты недавней работы [5], в которой исследовалось влияние поля тяжести на развитие неустойчивости тангенциального разрыва в сжимаемой жидкости. Оказалось, что эта задача имеет свои особенности.

Как и выше, рассмотрим разрыв скорости течения жидкости, считая $V_0(z) = V_0$ при $z > 0$ и $V_0 = 0$ при $z \le 0$, причем скорость V_0 направим вдоль оси OX, а поле тяжести направим вдоль оси OZ, т.е. перпендикулярно поверхности разрыва. Уравнения движения жидкости в этом случае записываются в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{v} + \rho \mathbf{V}_0) = 0, \\ &\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + V_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \frac{\rho \nabla p_0}{\rho_0^2} + \mathbf{g}. \end{aligned} \tag{19}$$

Они должны быть дополнены уравнениями состояния и равновесия

$$p = U^2\rho, \qquad \frac{dp_0}{dz} + \rho_0 g = 0. \tag{20}$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением изотермического предела, считая $U = \text{const}$. В этом пределе линеаризованная система (19) сводится к уравнениям с постоянными коэффициентами и допускает простое решение в областях $z > 0$ и $z \le 0$, причем сшивать решения следует с учетом граничных условий (ср. с (3))

$$\{p\}_{z=0} = 0, \qquad \left\{\frac{\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{g}{U^2}p}{(\omega - kV_0)^2}\right\}_{z=0} = 0. \tag{21}$$

Следует отметить, что при наличии внешнего поля тяжести система оказывается открытой. Как было показано в работе [7], в этом случае традиционное приближение нулевой толщины разрыва без учета смещений поверхности раздела сред при выводе граничных условий является неверным. Это утверждение, однако, не относится к рассматриваемому случаю разрыва без скачка плотности, а поэтому можно пользоваться граничными условиями (21).

Решение сформулированной задачи приводит к следующему дисперсионному уравнению (ср. с (4)):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\chi_1 + \frac{g}{U^2}}{(\omega - kV_0)^2} = -\frac{\chi_2 - \frac{g}{U^2}}{\omega^2}, \\ &\chi_1 = -\frac{g}{2U^2} + \sqrt{\frac{g^2}{4U^4} + k^2 - \frac{(\omega - kV_0)^2}{U^2}}, \\ &\chi_2 = -\frac{g}{2U^2} - \sqrt{\frac{g^2}{4U^4} + k^2 - \frac{\omega^2}{U^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

В слабом поле тяжести, т. е. когда

$$g^2 \ll 4k^2U^4, \tag{23}$$

полем тяжести можно пренебречь, и из (22) получается исследованное выше уравнение (4). В обратном пределе сильного поля тяжести из (22) находим

$$(\omega - kV_0)^2 = -\frac{\omega^2 U^2[k^2U^2 - (\omega - kV_0)^2]}{g^2}. \tag{24}$$

Согласно обратному условию (23), правая часть этого соотношения мала по сравнению с левой. Это дает возможность найти неустойчивое решение уравнения (24)

$$\omega = kV_0\left(1 + i\,\frac{kU^2}{g}\right). \tag{25}$$

Найденную неустойчивость можно интерпретировать как резонансную черенковскую раскачку (вынужденным излучением) потоковых колебаний сильным полем тяжести. В этом смысле она аналогична вынужденному черенковскому излучению звука поверхностью разрыва.

Рассмотренная неустойчивость так же как и звуковая, является конвективной и сносится потоком.

В заключение заметим, что рассмотренная неустойчивость в лабораторных условиях может иметь место только в очень сильных эффективных полях тяжести порядка $10^8 - 10^{10}$ cm/s^2, что на много порядков превосходит поле тяжести Земли.

Заключение

Подводя итог проведенному выше анализу, хотелось бы подчеркнуть, что при исследовании устойчивости поверхностного разрыва в сжимаемой жидкости в [1] допущена досадная элементарная ошибка при определении границы неустойчивости. Несмотря на элементарность ошибки, она многими до сих пор не признается. Именно по этой причине этому вопросу мы уделили так много внимания. При сверхзвуковом разрыве в сжимаемой жидкости возникает новая, так называемая резонансная черенковская, неустойчивость с возбуждением потоком объемной звуковой волны в покоящейся части жидкости. Следует отметить, что в обзоре [8] и в монографиях [9,10] уже относительно давно были рассмотрены неустойчивости сдвиговых течений и их физическая природа. При этом, однако, авторы ограничивались рассмотрением неустойчивостей в несжимаемой жидкости и связывали их с появлением волн с отрицательной энергией в таких течениях. Такая трактовка удобна, в лучшем случае, при рассмотрении возбуждения собственных колебаний движущимся потоком, но не волн. Еще в 1945 г. П.С. Стрелковым было обнаружено возбуждение собственных колебаний крыльев самолета обдувающим потоком воздуха при больших скоростях полета и дано объяснение этому явлению (см. монографию [10]).

Список литературы

[1] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
[2] *Kirtskhalia V.* // Planet Space Ski. 1994. Vol. 42. N 6. P. 513.
[3] *Жвания И.А., Кирцхалия В.Г., Рухадзе А.А.* // Кр. сообщ. по физике ФИАН. 2002. № 10. С. 35.
[4] *Кирцхалия В.Г., Рухадзе А.А.* // Кр. сообщ. по физике ФИАН. 2003. № 4. С. 42.
[5] *Кирцхалия В.Г., Рухадзе А.А.* // Кр. сообщ. по физике ФИАН. 2006. № 4. С. 34.
[6] *Жвания И.А., Кирцхалия В.Г., Рухадзе А.А.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 11. С. 132.
[7] *Фридман А.М., Хоружий О.В.* // УФН. 1993. Т. 163. Вып. 3. С. 79.
[8] *Островский Л.А., Рыбак С.А., Цимран Л.Ш.* // УФН. 1986. Т. 150. Вып. 3. С. 417.
[9] *Степанянц Ю.А., Фабрикант А.Л.* Распространение волн в сдвиговых потоках. М.: Наука, 1996.
[10] *Бетчов Р., Климанаде В.* Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1966.
[11] *Стрелков П.С.* Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1964.