

01;07

## Пространственная фильтрация временного шума при реализации преобразования Адамара на фотоприемной матрице

© Б.Г. Подласкин

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,  
194021 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: bgp@holo.ioffe.rssi.ru

(Поступило в Редакцию 20 сентября 2006 г.)

Обоснована концепция пространственной фильтрации временного шума при преобразовании изображений в базисе Уолша–Адамара с интегрированием сигнала непосредственно на фотоприемнике. Приведены результаты, доказывающие, что изменение системы упорядочивания строк и столбцов матрицы исходного преобразования влияет на локализацию и концентрацию шумов в различных областях поля изображения.

PACS: 02.10.Yn, 02.50.Ey

### Введение

Развитие многопиксельных фотоприемников на основе приборов с зарядовой связью позволяет успешно решать многие задачи, связанные с регистрацией, передачей и частотной фильтрацией электрических сигналов при их передаче по каналу связи в рамках последовательного растрового разложения изображения. При этом проблема фильтрации различных шумов решается, как правило, с помощью использования частотных фильтров, что приводит к искажениям полосы пропускания канала связи и тем самым к нарушению полноты восстановленного изображения.

В качестве альтернативного направления могут быть предложены методы интегральной обработки изображений с передачей по каналу связи спектральных коэффициентов, соответствующих различным системам базисных функций, используемых для преобразования исходных изображений.

В ряде работ нами развивались идеи интегральной обработки оптических сигналов и разрабатывались фотоприемники нового типа [1–3], реализующие интегральный подход к выделению различных признаков изображений. В частности, была предложена основанная на наборе встречно-включенных фотодиодов структура фотоприемной матрицы, предназначенная для реализации над изображением  $\mathbf{F}$  спектрального преобразования Уолша–Адамара  $\mathbf{H}$  [4].

При изучении особенностей преобразования Уолша–Адамара с интегрированием оптических сигналов непосредственно на фотодиодной матрице нами была сформулирована задача исследования возможности пространственной фильтрации временных шумов из счет перестановки базисных функций Уолша при восстановлении изображения [5].

Исследованию случайных процессов в бинарных ортогональных базисах посвящено большое количество работ. Работы Оливера С.И., Эндрюса Х.С. и Прэтта В.К., ежегодные труды Международного симпозиума по функ-

циям Уолша, труды Всесоюзного симпозиума „Методы представления и аппаратный анализ случайных процессов и полей“ посвящены особенностям преобразования шумов и их спектров в различных интегральных базисах. Большой вклад в изучение этих вопросов внесли Пойда В.Н., Чеголин П.М., Ахмед Н. [6,7].

Однако проблема пространственной фильтрации временного шума ранее не ставилась.

### Обоснование метода пространственной фильтрации шума и расчет распределения дисперсий для различного вида упорядочивания базиса

Такая задача возникает при последовательной передаче по каналу связи элементов матрицы спектральных коэффициентов  $\mathbf{W} = \mathbf{HF}$ , полученных в результате двумерного преобразования Адамара  $\mathbf{H}$  над изображением  $\mathbf{F}$ .

В этом случае образуется вектор  $\mathbf{L}(\mathbf{HF})$  длиной  $2^{2n}$  ( $\mathbf{L}$  — операция построчной развертки), на который в канале связи накладывается аддитивный шум  $\psi$ . При обратном преобразовании восстанавливается новое изображение  $\mathbf{F}'$ , представляющее собой сумму исходного изображения  $\mathbf{F}$  и аддитивного члена  $\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{L}^{-1}\psi)$ , который является изображением спектра шума  $\psi$  в базисе  $\mathbf{H}$ , т. е.

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} + \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{L}^{-1}\psi). \quad (1)$$

Нами была высказана гипотеза о том, что изменение организации системы базисных функций путем перестановки строк в матрице Адамара (т. е. изменение порядка передачи спектральных компонент) влияет на распределение спектра шума в пространстве изображения. При этом можно добиться сосредоточения максимальных шумовых искажений изображения в различных зонах

экрана. Иначе говоря, можно производить пространственную фильтрацию временного шума, концентрируя основную его часть в наименее информативных участках восстановленного изображения.

Математическое обоснование выдвинутой нами гипотезы было проведено П.П. Каргаевым и С.В. Фоминым в работе [8], где был проведен математический анализ влияния перестановки строк преобразования Адамара на распределение дисперсии шума в поле восстановленного изображения. Было показано, что при переходе от классического упорядочения функций Уолша по Пэли [9] к секвентному упорядочиванию (т.е. упорядочиванию расположения строк по числу перемены знака) с помощью преобразования Грея [10] происходит концентрация дисперсии шума в различных участках экрана.

По определению, преобразование Грея представляет собой функцию ( $G$ ), сопоставляющую каждому  $i \in [0, 1)$  число  $g(i) \in [0, 1)$ ,  $k$ -я двоичная цифра которого равна  $(i_k + i_{k-1}) \bmod 2$ ;  $k = 1, 2, \dots$ ;  $i_0 = 0$ . При этом имеется в виду, что  $i$  — номер функции Уолша в упорядочивании Пэли. В результате можно представить перестановочную матрицу  $G$

$$G \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{g^{-1}(0)} \\ x_{g^{-1}(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{g^{-1}(N-1)} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

с помощью которой координата  $x_k$  переводится на  $g(k)$ -е место, а на ее место становится координата  $x_{g^{-1}(k)}$ . Поскольку  $\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{H}$  и  $\mathbf{H}\mathbf{G}\mathbf{H} = \mathbf{H}$ , то в результате применения преобразования Грея на выходе декодирующего устройства будем иметь

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} + \mathbf{H}\mathbf{G}^{-1}\psi, \quad (3)$$

т.е. тождественно восстановленное изображение  $\mathbf{F}$  и спектр шума в базисе Адамара, упорядоченному по Грею.

В настоящей работе для иллюстрации возможности пространственной фильтрации временного шума с помощью описанной процедуры нами было проведено расчетное моделирование этих процессов при различной спектральной плотности шума и при различной организации строк матрицы Адамара. Размерность преобразования и исходного изображения была выбрана  $8 \times 8$ . В качестве спектральной плотности аддитивного шума была выбрана функция Фейера [11] при различных параметрах  $r$ :

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{rt}{2}\right)}{r \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}. \quad (4)$$

Рассматривая помеху  $\psi$  как случайный вектор, поставим вопрос об определении вероятностных характеристик погрешности

$$\Delta\mathbf{F} = \mathbf{F}' - \mathbf{F} = \mathbf{H}\psi. \quad (5)$$

Поскольку  $\psi$  — стационарный в широком смысле вещественный случайный процесс, централизованный математическим ожиданием, то

$$\mathbf{M}[\psi_i] = 0, \quad \mathbf{M}[\psi_i\psi_j] = K(i - j) = K(m), \quad (6)$$

где  $K(m)$  — корреляционная функция, которая является положительно определенной и допускает спектральное представление

$$K(m) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imt} p(t) dt, \quad (7)$$

где  $p(t)$  — спектральная плотность шума.

На основе корреляционной функции  $K(m)$  могут быть вычислены дисперсии компонент вектора  $\mathbf{H}\psi$ , которые определяются диагональными элементами ковариационной матрицы

$$\sigma^2((\mathbf{H}\psi)_i) = K(0) + \frac{2}{N} \sum_{m=1}^{N-1} K(m) \sum_{k=0}^{N-m-1} h_{i,k} h_{i,k+m}, \quad (8)$$

где  $i$  принимает значения от 1 до  $N$ .

Поскольку каждая дисперсия выражается через элементы, соответствующие ей по номеру строки матрицы Адамара, изменение порядка расположения строк в матрице Адамара изменяет порядок следования компонент векторов дисперсии. Таким образом, после преобразования векторов дисперсии в матрицу дисперсии будут по-другому располагаться в пространстве изображений.

В связи с этим важным вопросом становится способ упорядочивания функций Уолша, образующих строки (и столбцы) матрицы  $\mathbf{H}$ .

Классический способ упорядочивания, называемый схемой Пэли [9], образуется при формировании матрицы Адамара порядка  $2N$  при помощи следующей операции:

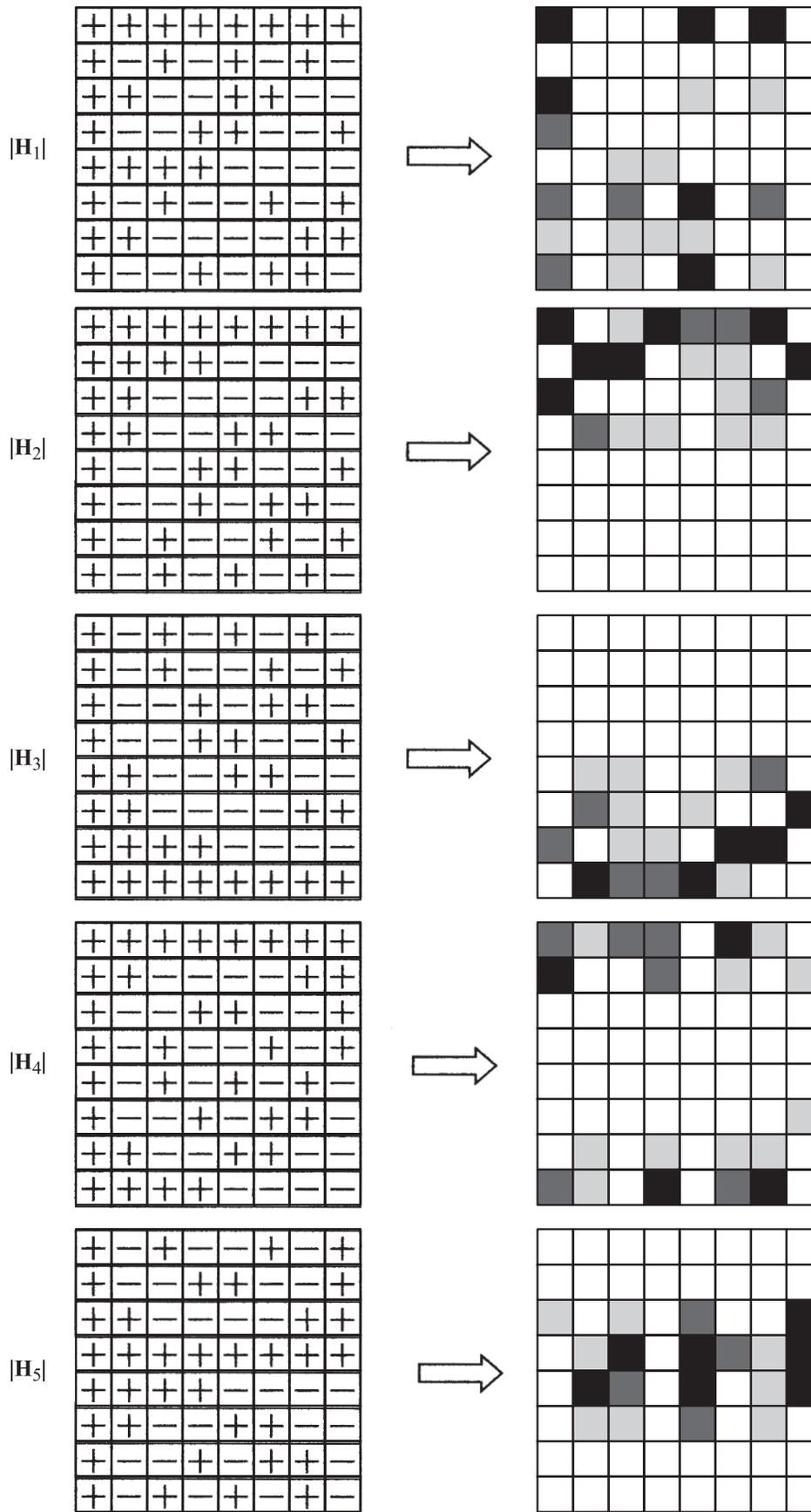
$$H_{2N} = \begin{vmatrix} H_N & H_N \\ H_N & -H_N \end{vmatrix}.$$

При этой схеме распределение дисперсии шума по полю восстановленного изображения крайне нерегулярно.

В ряде работ [12,13] рассматриваются функции Уолша в аспекте их использования для кодирования временных последовательностей сигналов. Система упорядочивания функций в этом случае важна в основном с точки зрения удобства их аппаратного формирования и простоты построения кодирующих и декодирующих устройств. В нашем же случае перестановка строк в матрице  $\mathbf{H}$  становится инструментом для управления распределением дисперсии в поле восстановленного изображения.

Рассмотрим  $i$ -ю строку матрицы Адамара и положим для любого  $m \in [0, N - 1]$

$$\mathfrak{I}_m(i) = \sum_{k=0}^{N-m-1} h_{i,k} h_{i,k+m}. \quad (9)$$



Тогда дисперсии компонент вектора  $\mathbf{H}\psi$  можно записать в виде

— для упорядочения Пэли;

$$\sigma^2((\mathbf{H}\psi)_i) = K(0) + \frac{2}{N} \sum_{m=1}^{N-1} K(m)\mathfrak{J}_m(i), \quad (10)$$

— для случая использования преобразования Грея:

$$\begin{aligned} \sigma^2((\mathbf{H}\mathbf{G}^{-1}\psi)_i) &= K(0) + \frac{2}{N} \sum_{m=1}^{N-1} K(m)\mathfrak{J}_m(g^{-1}(i)) \\ &= \sigma^2((\mathbf{H}\psi)_{g^{-1}(i)}). \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, мы видим, что замена с помощью преобразования Грея  $i$  на  $g(i)$  позволяет изменить расположение компонент вектора шумовых дисперсий и, следовательно, изменить порядок распределения дисперсии на экране.

Поскольку значение  $g(i)$  совпадает со значением секвенты  $i$ -й строки матрицы Адамара, можно сделать вывод, что преобразование Грея, примененное к упорядочиванию Пэли, располагает строки матрицы Адамара в порядке возрастания их секвент, т.е. в соответствии с увеличением в строке числа перемены знака.

Отметим, что к перестановке функций Уолша приводит любая замена переменной  $x \leftarrow \mathfrak{X}(x)$ , которая может быть интерпретирована как линейное невырожденное преобразование вектора  $(x_1 x_2 \dots x_k)$ . Исследование оператора  $\mathfrak{X}(x)$  применительно к шумам с различной спектральной плотностью является перспективной задачей дальнейшего исследования пространственной фильтрации временного шума.

На рисунке приведены результаты моделирования перестановок дисперсии при различных вариантах перестановки строк. Расчеты пространственного распределения дисперсии произведены для пространственной плотности шума, определенной функцией Фейера при величинах параметра  $r = 3, 7, 9, 24$ .

Для каждого значения параметра  $r$  спектральной плотности шума производилось вычисление дисперсий, их среднего значения и распределения по полю дисперсий, превышающих среднее значение для пяти случаев упорядочивания функций Уолша:  $\mathbf{H}_1$  — упорядочивание по Пэли;  $\mathbf{H}_2$  — упорядочивание по нарастанию секвенты;  $\mathbf{H}_3$  — упорядочивание по убыванию секвенты;  $\mathbf{H}_4$  — упорядочивание по убыванию нечетной и нарастанию четной секвент;  $\mathbf{H}_5$  — упорядочивание по нарастанию нечетной и убыванию четной секвент. При этом наглядно прослеживается концентрация шума по пространству экрана. Видно, что в случае упорядочивания Пэли распределение больших дисперсий по полю носит хаотический характер. В случае же секвентивного упорядочивания шумы концентрируются в области больших значений секвент в соответствии с последовательностью нарастания секвенты. Интенсивность цвета соответствует величине дисперсии.

## Заключение

Таким образом, доказана возможность пространственной фильтрации временного аддитивного шума при изменении порядка передачи спектральных коэффициентов исходных изображений за счет концентрации шума в различных участках восстановленного изображения. Расчет распределения дисперсии по полю изображений при различных схемах упорядочивания базиса и различной спектральной плотности шума подтверждает возможность локализации помехи в различных областях поля изображения и тем самым проведения пространственной фильтрации временного шума.

## Список литературы

- [1] Подласкин Б.Г., Гук Е.Г. // Измерительная техника. 2005. № 8. С. 31–34.
- [2] Подласкин Б.Г., Гук Е.Г. // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 8. С. 93–98.
- [3] Лифшиц Б.А., Подласкин Б.Г., Чекулаев Е.А. // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. Вып. 3. С. 12–17.
- [4] Подласкин Б.Г. // Тр. Всесоюз. конф. „Координаточувствительные фотоприемники“. Барнаул, 1982. С. 85–87.
- [5] Подласкин Б.Г. // Тр. III Междунар. конф. по голографии. Ульяновск, 1978. С. 223–224.
- [6] Пойда В.Н. Анализ случайных процессов в бинарных ортогональных базисах. Минск, 1983. 316 с.
- [7] Ahmed N., Rao K.R. // Electronics Letters. 1993. Vol. 6. N 2. P. 117–121.
- [8] Каргаев П.П., Фомин С.В. // Теория вероятностей и ее применение. 1990. Т. 35. Вып. 2. С. 271–281.
- [9] Andrews H.C. Introduction to Mathematical Techniques in Pattern Recognition. N.Y.: Wiley, 1972. 374 p.
- [10] Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970. 424 с.
- [11] Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. М.: Мир, 1985. 260 с.
- [12] Хармут Х. Теория секвентного анализа. М.: Мир, 1980. С. 148.
- [13] Трахтман В.А. // Радиотехника и электроника. 1973. Т. 18. № 2. С. 2521–2528.