

01;05

## Самоподобные магнитные структуры и „гигантский“ крип магнитного потока

© И.Б. Краснюк

Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина НАН Украины,  
83114 Донецк, Украина

(Поступило в Редакцию 30 марта 2006 г.)

Рассмотрен процесс проникновения магнитного потока в высокотемпературный сверхпроводник второго рода, который занимает полупространство  $x > 0$ . На границе сверхпроводника амплитуда магнитного поля возрастает по закону  $b(0, t) = b_0(1+t)^m$  в безразмерных переменных, где  $m > 0$ . Скорость проникновения вихрей определяется в режиме термоактивационного движения магнитного потока:  $v = v_0 \exp\{-(U_0/T)(1 - b\partial b/\partial x)\}$ , где  $U_0$  — эффективная энергия пиннинга,  $T$  — тепловая энергия возбужденных вихревых нитей (или их связок). Рассмотрен „гигантский“ крип магнитного потока, когда  $U_0/T \ll 1$ . Получено модельное уравнение Навье–Стокса с нелинейной „вязкостью“  $\nu \propto U_0/T$  и скоростью конвекции  $v_f \propto (1 - U_0/T)$ . Показано, что при  $j \rightarrow 0$  ( $j$  — плотность тока), движение вихрей является диффузионным. При конечных плотностях  $0 < j < j_c$  возникает конвекция магнитного потока, которая приводит к увеличению амплитуды и глубины проникновения магнитного поля в сверхпроводник. Показано, что решение модельного уравнения в каждый момент времени является финитным, т.е. магнитный поток проникает на конечную глубину. Определены глубина проникновения  $x_{\text{eff}}^A(t) \propto (1+t)^{(1+m/2)/2}$  магнитного поля в сверхпроводник и скорость движения фронта волны, которая возрастает линейно по показателю  $m$ , степенным образом по температуре  $T$  и уменьшается с увеличением эффективного барьера пиннинга. Отличительной особенностью решений является их самоподобность, т.е. возникающие при „гигантском“ крипе диссипативные магнитные структуры являются инвариантными относительно преобразований  $b(x, t) = \beta^m b(t/\beta, x/\beta^{(1+m/2)/2})$ , где  $\beta > 0$ .

PACS: 74.25.Na

### Введение

В настоящей работе рассматривается процесс проникновения магнитного поля в высокотемпературный сверхпроводник второго рода, который занимает полупространство  $x \geq 0$ . Параллельно поверхности сверхпроводника приложено внешнее магнитное поле, проникающее в сверхпроводник со скоростью

$$\frac{\partial b}{\partial t}(0, t) = \lambda, \quad \lambda > 0, \quad (1)$$

где  $b = B/B_{c2}$ ,  $B_{c2}$  — второе критическое поле. При  $\lambda = 1$  граничное условие (1) рассматривалось при крипе потока в [1] для низкотемпературных сверхпроводников. При  $\lambda = 0$  аналогичная задача при термоактивационном движении магнитного потока в режиме вихревого стекла рассматривалась в [2] для высокотемпературных (оксидных) сверхпроводников.

Можно проинтегрировать граничное условие (1) и показать, что оно равносильно линейному возрастанию магнитного поля со временем, что отвечает реальному эксперименту [3]. Оказывается, что при „гигантском“ крипе амплитуда магнитного поля на границе сверхпроводника не может возрастать быстрее, чем  $\sqrt{t}$ . Это условие устойчивости магнитного потока: под устойчивостью мы понимаем требование, когда значение градиента магнитной индукции таково, что  $0 < j < 1$ , где  $j = J/J_c$ ,  $J_c$  — критический ток.

Утверждения данной работы качественно совпадают с результатами [1,2], но получены в режиме термоактива-

ционного движения потока при „гигантском“ крипе. Требование более слабого возрастания по времени магнитного поля на границе сверхпроводника объясняется тем, что в низкотемпературных сверхпроводниках скорость движения вихрей по крайней мере на два порядка меньше, чем соответствующие скорости при „гигантском“ крипе в высокотемпературных сверхпроводниках.

Мы исследуем модельную задачу в возрастающем на границе внешним магнитным полем с учетом „гигантского“ крипа, что имеет место при  $U_0/k_B T \ll 1$  ([2], с. 1148), где  $U_0$  — термоактивационный барьер,  $T$  — температура,  $k_B$  — постоянная Стефана–Больцмана. (В дальнейшем будем использовать энергетическую систему единиц  $U \rightarrow U/k_B$ .)

В этом случае скоростью движения вихрей

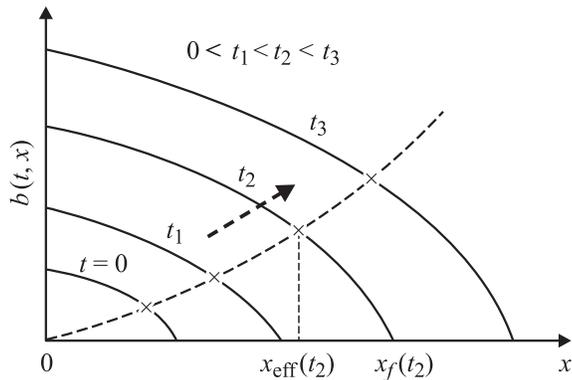
$$v = v_0 e^{-U_0/T} \quad (2)$$

при конвективном члене в диффузионном уравнении движения потока пренебрегать, как это делается для обычных сверхпроводников [4], нельзя. В соотношении (2)

$$U_0 = \lim_{j \rightarrow 0} U(j, b), \quad (3)$$

причем предел (3) имеет место равномерно при всех  $0 < b < 1$  для модели Кима–Андерсона [5,6].

В результате в соответствующем модельном уравнении следует учитывать конвекцию вихрей. Конвекция магнитного потока происходит со скоростью



$v_f \propto (1 - U_0/T)$ . Таким образом, учет „гигантского“ крипа приводит к тому, что вихри движутся в высокотемпературном сверхпроводнике не только диффузионным образом как в низкотемпературных сверхпроводниках, но и с помощью конвективного движения. При этом формально постановка задачи корректна при выполнении неравенства  $U_0 < T$ .

Рассматривается режим термоактивационного движения магнитного потока в потенциале Кима–Андерсона [7] при условии, что выполняется требование существования „гигантского“ крипа магнитного потока [2], что формально обеспечивается неравенством  $U_0/T \ll 1$ . Система уравнений Максвелла, моделирующая проникновением потока в сверхпроводник в режиме термоактивационного движения вихрей (уравнение (9)), при „гигантском“ крипе (уравнение (12)), допускает редукцию к уравнению гидродинамического типа с нелинейной „вязкостью“. Это означает, что „вязкость“ зависит от амплитуды магнитного поля. Задача с граничным условием (1) (или его модификацией) имеет монотонно убывающие решения, которые проникают в сверхпроводник с конечной скоростью (см. рисунок). Краевая задача допускает автомодельные решения, которые удовлетворяют граничной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения (уравнение (23)). Определяются положение фронта магнитного потока в каждый момент времени  $t > 0$  и скорость проникновения магнитного поля в сверхпроводник.

Автомодельные решения типа бегущих волн для уравнения пористой среды с монотонно возрастающими по времени граничными условиями впервые были получены в [8]. Решения являются устойчивыми относительно возмущений начальных функций, краевых условий и нелинейного коэффициента диффузии, что подтверждает численный эксперимент [9,10]. Следствием математической устойчивости таких решений является из реализуемость на эксперименте [2,3].

Объясняется это тем, что решения удовлетворяют условию

$$v(x, t) \leq V(x, t),$$

где  $v$  — общее решение задачи, а  $V$  — решение типа бегущей волны. При их эволюции сохраняется свойство выпуклости решений. Эти фундаментальные результаты доказаны в монографии [11].

## Постановка задачи

Рассмотрим задачу о проникновении магнитного поля в полупространство  $x > 0$  для высокотемпературных сверхпроводников в параллельной геометрии  $\mathbf{B} \parallel z$ ,  $\mathbf{E}, \mathbf{j} \parallel y$  и  $\mathbf{v} \parallel x$ , где  $\mathbf{B}$  — индукция магнитного поля,  $\mathbf{E}$  — электрическое поле,  $\mathbf{j}$  — транспортный ток,  $\mathbf{v}$  — скорость движения вихрей. (Поскольку каждая из величин имеет только одну проекцию на соответствующую ось, то в дальнейшем векторные обозначения будем опускать.)

Рассмотрим классическую модель Кима–Андерсона для высокотемпературных сверхпроводников [2]. Тогда вихри движутся в эффективном потенциале пиннинга [7]

$$U = U_0 - |F|Vd, \quad (4)$$

где  $U_0$  — энергия активации в отсутствие градиента потока,  $V$  — активационный объем,  $d$  — характерный линейный масштаб потенциала пиннинга. (В общем случае, как показывает эксперимент [2], эффективная энергия  $U_0$  может зависеть от температуры, плотности тока и магнитного поля.)

Согласно модели критического состояния, вихревые нити (при  $T = 0$ ) могут двигаться в жестком сверхпроводнике при условии, что сила Лоренца  $F > F_p$ , где  $F_p$  — сила пиннинга. В то же время при классическом крипе вихревые нити могут преодолевать барьер пиннинга  $U_0$  даже, если  $F < F_p$ , при  $T = 0$  с помощью тепловых флуктуаций [7].

Если зависимостью от магнитного поля в (4) пренебречь, то для модели критического состояния определение (4) допускает редукцию к модели слабого пиннинга в случайном (усредненном) потенциале пиннинга [2]

$$U(j \rightarrow j_c) = U_c \left[ 1 - \frac{j}{j_{c0}} \right]^\mu, \quad \mu > 0, \quad (5)$$

где  $U_c$  — энергия активации для связки вихревых нитей в некотором элементарном объеме [2],  $j_{c0}$  — критический ток при  $T = 0$ . Параметр  $\mu$  отвечает за энергию взаимодействия вихрей. При  $\mu = 1$  мы имеем модель Андерсона [7]. Если  $j_{c0} \sim 1/B$ , то из (5) вытекает классическая модель (4). (Плотность критического тока  $j_c$  меньше значения  $j_{c0}$ , которое она имела бы в отсутствие тепловой активации.)

Функция  $|F|Vd$  в соотношении (4) является убывающей по  $|F|$  и определяется соотношением

$$F = -\frac{c}{4\pi} B \frac{\partial B}{\partial x}, \quad (6)$$

где мы использовали определение силы Лоренца и уравнение

$$j = -\frac{c}{4\pi} \frac{\partial B}{\partial x}. \quad (7)$$

Из (6), (7) и (4) вытекает соотношение

$$U = U_0 \left[ 1 - j_{c0}^0 B_{c2} k \left| b \frac{\partial b}{\partial x} \right| \frac{Vd}{U_0} \right], \quad (8)$$

где  $k = cB_{c2}/(\lambda j_{c0})$ ,  $c$  — скорость света,  $\lambda$  — лондоновская глубина проникновения магнитного поля;  $j_c^0$  —

нормирующий множитель (в качестве которого можно принять  $j_c^0 = j_{c_0}$ ).

Поскольку плотность нормирующей силы равна  $\alpha = j_c^0 B_{c_2}$ , то сила, действующая на связку потока с поперечным сечением  $L^2$  и длиной  $L$ , равна  $F_c = \alpha L^3$ . Следовательно, работа по перемещению связки вихревых нитей в объеме  $V = L^3$  на расстояние  $d$  равна  $W_c = j_c B_{c_2} V d$  ([4], с. 192).

Введем обозначение  $k \rightarrow kW_c/U_0$ . В результате соотношение для энергии  $U$  можно записать в виде

$$U = U_0 \left[ 1 - k \left| b \frac{\partial b}{\partial x} \right| \right].$$

Вероятность скачков потока вперед определим из простого соотношения Аррениуса

$$\omega = \omega_0 e^{-(U/T)(1-j/j_{c_0})}, \quad (9)$$

где  $\omega_0$  — характеристическая частота вихрей. Формула (9) определяет так называемое термоактивационное движение магнитного потока в критическом состоянии [8], которое, в отличие от классического крипа, не учитывает плотности вероятности скачков потока назад.

Для модели классического крипа вместо формулы (9) следует рассматривать соотношение

$$v = v_0 e^{-U_0/T} \sinh \left( \frac{W}{T} \right),$$

где  $W = |F|Vd$  — работа, затрачиваемая против силы пиннинга.

Тогда из (8) и (9) вытекает, что скорость термоактивационного движения вихрей можно определить следующим образом:

$$v = v_0 \exp \left\{ -\frac{U_0}{T} \left( 1 - k \left| b \frac{\partial b}{\partial x} \right| \right) \right\},$$

где  $v_0 = d_p f_0$ ;  $d_p$  — характерный масштаб усреднения. Здесь  $d_p = \xi$ , где  $\xi$  — корреляционная длина, для отдельной вихревой нити при  $b < 0.2$  и  $d_p = a_0/2$  для связки вихревых нитей при  $b > 0.2$ , где  $a_0 = a_0(B)$  есть шаг вихревой решетки [12]. Последнее соотношение определяет термоактивационное движение магнитного потока в эффективном потенциале пиннинга, зависящем от индукции магнитного поля.

При „гигантском“ крипе мы можем воспользоваться нулевым приближением  $U_0/T \ll 1$  для скорости движения вихрей:

$$v = v_0 \left( 1 - \frac{U_0}{T} \left( 1 + kb \frac{\partial b}{\partial x} \right) \right), \quad (10)$$

где  $|b \partial b / \partial x| = -b \partial b / \partial x$ , поскольку рассматриваются лишь монотонно убывающие по  $x$  решения. В частности, равенство (10) имеет место в окрестности критической температуры  $T < T_c$  по непрерывности, поскольку  $U(T_c) = 0$ .

Движение вихревых нитей со скоростью  $v$  приводит к возникновению электрического поля

$$\mathbf{E} = [\mathbf{B}, \mathbf{v}] / c, \quad (11)$$

где  $[\cdot, \cdot]$  — векторное произведение.

Уравнение

$$\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial x}$$

с учетом соотношений (10) и (11) можно записать в виде

$$\frac{\partial b}{\partial t} + D_h(1 - \sigma) \frac{\partial b}{\partial t} = D_h k \sigma \frac{\partial}{\partial x} \left( b^2 \left| \frac{\partial b}{\partial x} \right| \right), \quad (12)$$

где  $\sigma = U_0/T$ ;  $t \rightarrow t_h t$ ,  $x \rightarrow \lambda x$ ;  $t_h$  — характерный масштаб изменения магнитного поля; коэффициент диффузии  $D_h = t_h v_0 / \lambda$ , где  $v_0$  — скорость вихрей в отсутствие тепловой активации. (Не ограничивая общности изложения в дальнейшем положим  $D_h = 1$ , что отвечает замене  $t \rightarrow D_h t$ .)

Если рассматривать отклик сверхпроводника на внешние возмущения при малых плотностях тока  $j \rightarrow 0$ , что также представляет теоретический интерес ([2], с. 1148), то конвективным членом в уравнении (12) можно пренебречь. В результате получим известное уравнение пористой среды, решения которого известны для так называемых степенных граничных режимов [8].

При конечных  $0 < j < j_c$  для определения качественного поведения решений мы можем воспользоваться теоремой сравнения из ([8], с. 20), которая в приложении к уравнению (12) приводит к следующему утверждению: пусть выполняются условия

$$b_-(x, 0) \leq b_0(x) \leq b_+(x, 0)$$

и

$$b_-(0, t) \leq b_1(0, t) \leq b_+(0, t),$$

где  $b_-$  — решение уравнения пористой среды (без конвекции), а  $b_+$  — решение уравнения (12) с конвекцией.

Пусть выполняются неравенства

$$\partial b_+ / \partial t = B(b_+), \quad \partial b_- / \partial t \leq B(b_0),$$

где оператор

$$B(b) = k \sigma \frac{\partial}{\partial x} \left( b^2 \frac{\partial b}{\partial x} \right) - (1 - \sigma) \frac{\partial b}{\partial x},$$

где  $\sigma = U_0/T$ , тогда

$$b_- \leq b \leq b_+$$

всюду в области  $x \geq 0$ ,  $t > 0$ .

В результате мы получаем, что учет конвекции в уравнении (12) приводит к увеличению амплитуды решения (и, следовательно, глубины проникновения магнитного поля) при заданном барьере пиннинга, что имеет простой физический смысл, поскольку с увеличением плотности тока увеличивается соответственно действующая на вихри сила Лоренца.

Из уравнения (9) можно определить критическую плотность тока

$$j_c = j_{c0} [1 - (T/U_0) \ln(\omega_0/\omega)]. \quad (13)$$

Вследствие того что вклад потока в (13) пропорционален  $T/U_0$ , в материалах с низкой энергией пиннинга и высокой критической температурой  $T_c$  может наблюдаться „гигантский“ крип, на несколько порядков превосходящий крип в обычных сверхпроводниках второго рода с очень сильным пиннингом. Известно, что из-за высокой температуры и низких барьеров для пиннинга крип в этих материалах может осуществляться со значительно большей скоростью, чем в обычных сверхпроводниках.

Если в обычных сверхпроводниках  $T/U_c \sim 10^{-3}$ , то для оксидных сверхпроводников эта величина на несколько порядков выше, что является следствием малой длины когерентности и высокой анизотропии. Типичное значение  $U_0 \sim 0.02$ , что на один или два порядка меньше значений для обычных низкотемпературных сверхпроводников.

### Конечная скорость распространения возмущений при „гигантском“ крипе магнитного потока

Введем обозначение  $\sigma = U_0/T$  и рассмотрим уравнение (12). Построим его частное автомодельное решение типа бегущей волны:

$$b(x, t) = f(\xi), \quad \xi = x - \lambda t, \quad (14)$$

где  $\lambda > 0$  — скорость движения магнитной волны. Подставив выражение (14) в (12), получим для  $f(\xi) > 0$

$$k\sigma \frac{d}{d\xi} \left( f^2 \frac{df}{d\xi} \right) + \lambda \frac{df}{d\xi} - (1 - \sigma) \frac{df}{d\xi} = 0$$

и, что то же самое,

$$k\sigma f^2 \frac{df}{d\xi} + \Lambda f = C, \quad (15)$$

где  $\Lambda = \lambda - 1 + \sigma$ , причем  $\Lambda > 0$ ;  $C = 0$  (чему это соответствует, будет ясно из дальнейшего). Интегрирование этого уравнения приводит к соотношению

$$f^2(\xi) - f^2(\xi_0) = \alpha(\xi - \xi_0),$$

где  $\alpha = \Lambda/k\sigma$ .

Пусть  $\xi_0 = 0$ ; тогда продолжим  $f$  в область  $\xi > 0$  тождественным нулем ([8], с. 31). Непрерывность магнитного потока  $f^2 df/d\xi$ , как следует из (15), при  $C = 0$  при этом не нарушается. В результате получаем следующее автомодельное решение:

$$b(x, t) = \sqrt{b_0 + \alpha(\lambda t - x)_+}, \quad (16)$$

где  $b_0 = f^2(0)$  — значение магнитного поля при  $t = 0$  в точке  $x = 0$ . Если сверхпроводник находится в смешанном состоянии, то можно положить  $b_0 = (H_{c1}/H_{c2})^2$ , поскольку магнитный поток начинает проникать в сверхпроводник при  $B > H_{c1}$ . Соответствующее решение (16) изображено на рисунке.

Это решение первой краевой задачи для уравнения (12) с условиями

$$b(x, 0) = b_0, \quad x > 0;$$

$$b(0, t) = \sqrt{b_0 + \lambda \Lambda t}, \quad 0 < t < t_0. \quad (17)$$

Таким образом, задача (12), (17) имеет решение с всюду непрерывным магнитным потоком, которое при каждом  $t \in (0, t_0)$  является финитным

$$b(x, t) = 0, \quad x > \lambda t, \quad 0 < t < t_0.$$

Поэтому уравнение (12) описывает процессы с конечной скоростью распространения возмущений. В точках фронта волны  $x_f(t) = \lambda t$  решение обращается в нуль. В силу принципа сравнения [8] решения, которые возрастают быстрее  $\sqrt{t}$ , имеют структуру, изображенную на рисунке. При этом уменьшаются лишь их амплитуда и глубина проникновения магнитного поля в каждый момент времени  $t > 0$ .

### Автомодельные диссипативные магнитные структуры

На эксперименте обычно реализуется линейное возрастание магнитного поля на границе сверхпроводника на некотором начальном интервале времени, а затем магнитное поле полагается постоянным [3]. Представляют интерес и другие режимы возрастания внешнего магнитного поля. Ниже мы ограничимся исследованием краевой задачи со степенным граничным режимом.

Тогда уравнение (12) имеет автомодельные решения следующего вида:

$$b(x, t) = t^\alpha v(\eta, t), \quad \eta = x t^{-\delta}, \quad (18)$$

где  $v(\eta, t)$  ограничена при  $t \rightarrow \infty$ ,  $\eta = 0(1)$ . Подстановка соотношения (18) в уравнение (12) приводит к уравнению [13]:

$$\begin{aligned} \alpha t^{2(\delta-\alpha)-1} v + \alpha t^{2(\delta-\alpha)} \frac{\partial v}{\partial t} - \delta \eta t^{2(\delta-\alpha)-1} \frac{\partial v}{\partial \eta} \\ = k\sigma \frac{\partial}{\partial \eta} \left( v^2 \frac{\partial v}{\partial \eta} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Выберем в уравнении (19)  $\delta = \alpha$ . Тогда при  $t \rightarrow \infty$  его решения будут близки к решениям уравнения пористой среды

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\sigma \left( v^2 \frac{\partial v}{\partial \eta} \right). \quad (20)$$

Выполним замену  $t \rightarrow (k\sigma)t$  и запишем уравнение (20) в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \left( v^2 \frac{\partial v}{\partial \eta} \right). \quad (21)$$

Пусть задан граничный режим

$$v(0, t) = (1 + t)^m, \quad t > 0; \quad m > 0.$$

Тогда уравнение (21) имеет автомодельное решение следующего вида:

$$v(x, t) = (1 + t)^m \theta_A(\tilde{\xi}), \quad \tilde{\xi} = x/(1 + t)^{(1+m\sigma/2)}. \quad (22)$$

Функция  $\theta_A \geq 0$  в (22) удовлетворяет следующему обыкновенному дифференциальному уравнению, которое получается после подстановки выражения (22) в (21):

$$(\theta_A \theta'_A)' + \frac{1 + 2m}{2} \theta'_A \tilde{\xi} - m \theta_A = 0, \quad \tilde{\xi} > 0, \quad (23)$$

причем должны быть выполнены краевые условия

$$\theta_A(0) = 1, \quad \theta_A(\infty) = 0. \quad (24)$$

При  $m = 1/2$  задача (23), (24) имеет очевидное обобщенное решение

$$\theta_A(\tilde{\xi}) = \sqrt{(1 - \sqrt{2\tilde{\xi}})_+}. \quad (25)$$

В этом случае

$$v_A = (1 + t)^{1/2} \theta_A(\tilde{\xi}), \quad \tilde{\xi} = x/(1 + t),$$

и, следовательно,

$$b(\tilde{\xi}, t) = t^\alpha (1 + t)^{1/2} \theta_A(\tilde{\xi}), \quad \alpha > 0. \quad (26)$$

Автомодельное решение (25) есть не что иное, как бегущая волна. Поведение решений (26) качественно совпадает с решениями типа простой бегущей волны по переменной  $\xi = x - \lambda t$ , которые рассматривались ранее. Данные примеры показывают, что разные граничные режимы порождают разные пространственно-временные диссипативные магнитные структуры.

Глубина проникновения магнитной волны, описываемой автомодельным решением (25), зависит от времени:

$$x_{\text{eff}}^A(t) = \xi_{\text{eff}} (1 + t)^{(1+m/2)/2}, \quad (27)$$

причем  $\theta_A(\xi_{\text{eff}}) = \theta_A(0) = 1/2$ . Схематически эволюция автомодельного процесса проникновения магнитного поля в сверхпроводник изображена на рисунке. Траектория движения полуширины магнитной волны обозначена штриховой линией.

Из (27) естественно определить скорость проникновения магнитной волны в сверхпроводник

$$v_f^A(t) = \frac{\tilde{\xi}_f}{2} \frac{T}{kU_0} \left( 1 + \frac{m}{2} \right) \left( 1 + \frac{T}{kU_0} t \right)^{1/2(m/2-1)}. \quad (28)$$

Соотношение (28) показывает, что при „гигантском“ крипе мы действительно можем ограничиться исследованием асимптотики  $\bar{t} \rightarrow \infty$ , где  $\bar{t} = k\sigma t$  стремится к нулю при  $U_0 \rightarrow 0$ . Физический смысл формулы (29) достаточно очевиден: с увеличением скорости накачки  $m > 0$  внешним магнитным полем скорость проникновения поля  $v_f^A$  естественно возрастает в точном соответствии с принципом максимума [8]. С увеличением барьера пиннинга (увеличением тепловой энергии  $T$ ) скорость  $v_f^A$  уменьшается. Наконец, при  $T \rightarrow T_c$  скорость  $v_f^A(t) \rightarrow \infty$  при всех  $t > 0$ .

## Список литературы

- [1] Романовский В.Р. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 12. С. 47–57.
- [2] Blatter G., Feigel'man M.V. // Phys. Rev. B. 1993. Vol. 48. N 9. P. 6477–6487.
- [3] Gurevich A., Kupfer H. // Phys. Rev. B. 1993. Vol. 48. N 9. P. 6477–6487.
- [4] Тинкхам М. Введение в сверхпроводимость. М.: Атомиздат, 1980. 310 с.
- [5] Anderson P.W., Kim Y.B. // Rev. Mod. Phys. 1964. Vol. 36. P. 39.
- [6] Anderson P.W. // Phys. Rev. Lett. 1962. N 9. P. 309–317.
- [7] Beasley M.R., Labush R., Webb W.W. // Phys. Rev. 1969. Vol. 181. P. 682–700.
- [8] Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 480 с.
- [9] Краснюк И.Б., Медведев Ю.В. // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. Вып. 10. С. 40–50.
- [10] Медведев Ю.В., Краснюк И.Б. // ФНТ. 2005. Т. 31. № 12. С. 1366–1370.
- [11] Galaktionov V.A. // Geometric Sturmian Theory of Nonlinear Parabolic Equations and Applications. Boca Raton–London–New York–Washington: D.C. 2005. 360 p.
- [12] Fisher K.H., Nattermann T. // Phys. Rev. B. 1991. Vol. 43. N 13. P. 10372–10382.
- [13] Grundy R.E. // IMA J. Appl. Math. 1983. Vol. 31. P. 121–137.