

Проникновение магнитного поля в тонкую незамкнутую эллипсоидальную оболочку в присутствии проводящей толстостенной сферической оболочки

© В.И. Корзюк,¹ Г.Ч. Шушкевич²

¹ Белорусский государственный университет,
220050 Минск, Белоруссия

² Гродненский государственный университет им. Я. Купалы,
230023 Гродно, Белоруссия
e-mail: g_shu@rambler.ru

(Поступило в Редакцию 21 сентября 2005 г.)

Решение задачи о проникновении магнитного поля в идеально проводящую незамкнутую эллипсоидальную оболочку в присутствии проводящей толстостенной сферической оболочки сведено к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Численно исследовано влияние угла раствора незамкнутой эллипсоидальной оболочки, некоторых геометрических параметров экранов и электрофизических свойств материала сферической оболочки на коэффициент ослабления поля внутри эллипсоидальной оболочки.

PACS: 41.20.-q

В современном мире обостряется проблема формирования электромагнитной обстановки, обеспечивающей нормальное функционирование электронных устройств и экологическую безопасность. Электромагнитная обстановка представляет собой совокупность электромагнитных полей в заданной области пространства, которая может влиять на функционирование конкретных технических устройств и биологических объектов [1–4]. Для создания благоприятной электромагнитной обстановки производится экранирование электромагнитных полей [5–7]. Теоретическое решение задачи экранирования — определение напряженности поля в экранируемой области пространства — в общем случае чрезвычайно сложно, поэтому в зависимости от типа решаемой задачи рассматривают отдельные виды экранирования: электростатическое, магнитостатическое, низкочастотное электромагнитное [8–12]. В данной работе решена задача экранирования части пространства тонкой незамкнутой эллипсоидальной оболочкой в присутствии проводящей толстостенной сферической оболочки. Полученные результаты могут быть использованы при конструировании экранирующих систем.

Постановка задачи

Пусть в однородном изотропном пространстве R^3 с магнитной проницаемостью среды μ_1 находится идеально тонкая вытянутая незамкнутая эллипсоидальная идеально проводящая оболочка S и проводящая толстостенная сферическая оболочка Γ , имеющая внешний радиус d , внутренний d_1 и выполненная из материала, имеющего магнитную проницаемость μ_2 . Оболочка S расположена на вытянутом эллипсоиде вращения S_1 с центром в точке O_1 . Данные тела находятся во внешнем

однородном магнитном поле, напряженность которого направлена вдоль оси Oz_1 : $\mathbf{H}_0 = -H_z \mathbf{e}_{z_1}$.

Для решения задачи свяжем с точкой O , центром сферической оболочки, Γ — сферические координаты $\{r, \theta, \varphi\}$:

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta,$$

где $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, а с точкой O_1 — вытянутые вырожденные эллипсоидальные координаты $\{\alpha, \beta, \varphi\}$:

$$x = c \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \cos \varphi, \quad y = c \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \sin \varphi, \quad z = c \operatorname{ch} \alpha \cos \beta,$$

где $0 \leq \alpha < \infty$, $0 \leq \beta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ — половина межфокусного расстояния, b и a — большая и малая полуоси эллипса соответственно. Оболочка S в системе координат $\{\alpha, \beta, \varphi\}$ описывается следующим образом:

$$S = \left\{ \alpha = \alpha_0 = \operatorname{Arch} \frac{b}{c}, \quad 0 \leq \beta \leq \beta_0 < \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\}.$$

Расстояние между точками O и O_1 обозначим через l . Осевое сечение экранов представлено на рис. 1.

Условно разобьем все пространство R^3 поверхностью эллипсоида S_1 и сферы Γ на четыре области: $D_1 (\alpha < \alpha_0)$, $D_3 (d_1 < r < d)$, $D_4 (r < d_1)$, $D_2 = R^3 \setminus (\bar{D}_1 \cup \bar{D}_3 \cup \bar{D}_4)$.

Ставится задача о рассеянии первичного поля на системе экранов Γ и S с учетом проникновения поля через сферический слой Γ , при этом предполагается непроницаемость оболочки S для поля.

Обозначим через U_0 потенциал первичного поля, U_j — потенциал вторичного поля в области D_j , $j = 1, 2, 3, 4$.

Потенциал первичного поля имеет представление [8]

$$U_0 = H_z z_1. \quad (1)$$

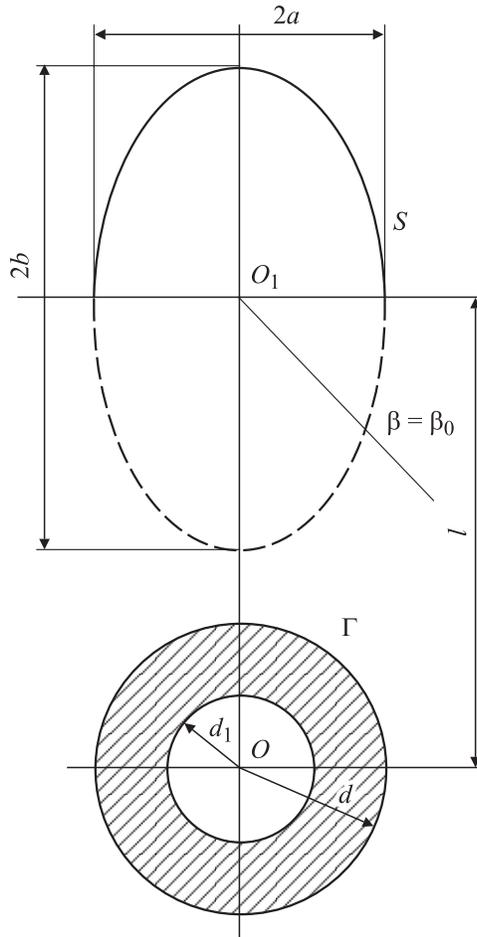


Рис. 1.

Потенциалы магнитного поля U_j должны удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta U_j = 0$, граничному условию на поверхности тонкой незамкнутой эллипсоидальной идеально проводящей оболочки S :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (U_2(M) + U_0(M)) \Big|_{M \in S} = 0, \quad (2)$$

где \mathbf{n} — внешняя нормаль к поверхности S ; граничным условиям на поверхностях толстостенной сферической оболочки Γ :

$$\mu_1 \frac{\partial}{\partial r} (U_0 + U_2) \Big|_{r=d} = \mu_2 \frac{\partial}{\partial r} U_3 \Big|_{r=d}, \quad (3)$$

$$(U_0 + U_2) \Big|_{r=d} = U_3 \Big|_{r=d}, \quad (4)$$

$$\mu_2 \frac{\partial}{\partial r} U_3 \Big|_{r=d_1} = \mu_1 \frac{\partial}{\partial r} U_4 \Big|_{r=d_1}, \quad (5)$$

$$U_3 \Big|_{r=d_1} = U_4 \Big|_{r=d_1}, \quad (6)$$

условию на бесконечности

$$U_2(M) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad M \rightarrow \infty, \quad (7)$$

где M — произвольная точка области D_2 .

Потребуем также выполнения условия непрерывности потенциала в области отверстия эллипсоидальной оболочки и поля на поверхности оболочки

$$U_1 = U_2 + U_0 \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0, \quad \beta_0 < \beta \leq \pi, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} U_1 = \frac{\partial}{\partial r} (U_2 + U_0) \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0, \quad 0 \leq \beta \leq \pi. \quad (9)$$

Решение задачи

Потенциалы U_j вторичного магнитного поля ищем в виде суперпозиции сферических и эллипсоидальных гармонических функций [8,12,13] так, чтобы выполнялось условие на бесконечности (7):

$$U_1(\alpha, \beta) = H_z \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n P_n(\text{ch } \alpha) P_n(\cos \beta) \quad \text{в} \quad D_1, \quad (10)$$

$$U_2 = U_2^{(1)}(r, \theta) + U_2^{(2)}(\alpha, \beta) \quad \text{в} \quad D_2,$$

где

$$U_2^{(2)}(\alpha, \beta) = H_z \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n(\text{ch } \alpha) P_n(\cos \beta), \quad (11)$$

$$U_2^{(1)}(r, \theta) = H_z \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{d}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \theta), \quad r > d, \quad (12)$$

$$U_3(r, \theta) = H_z \sum_{n=0}^{\infty} \left[m_n \left(\frac{r}{d_1}\right)^n + n_n \left(\frac{d}{r}\right)^{n+1} \right] P_n(\cos \theta) \quad \text{в} \quad D_3, \quad (13)$$

$$U_4(r, \theta) = H_z \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{b}_n \left(\frac{r}{d_1}\right)^n P_n(\cos \theta) \quad \text{в} \quad D_4. \quad (14)$$

Здесь $P_n(\cos \beta)$, $P_n(\cos \theta)$ — полиномы Лежандра, $P_n(z)$ и $Q_n(z)$ — функции Лежандра первого и второго рода соответственно [12–15].

Неизвестные коэффициенты a_n , b_n , \tilde{a}_n , \tilde{b}_n , m_n , n_n подлежат определению из граничных условий.

Выполнение граничных условий

Для выполнения граничных условий (2), (8), (9) представим функцию $U_2^{(1)}(r, \theta)$ через эллипсоидальные гармонические функции в системе координат с началом в точке O_1 , используя формулу [8,12] при $m = 0$:

$$\begin{aligned} & r^{-n-1} P_n^m(\cos \theta) \exp(im\varphi) \\ &= \sum_{s=|m|}^{\infty} D_{ms}^n(a, c) P_s^m(\text{ch } \alpha) P_s^m(\cos \beta) \exp(im\varphi), \end{aligned}$$

где

$$D_{ms}^n(a, c) = \frac{(-1)^{n+m+s} (2s+1)(s-m)!}{c(n-m)!(s+m)!(l^2-c^2)^{\frac{s}{2}}} Q_s^n\left(\frac{l}{c}\right), \quad l > c,$$

$P_n^m(x)$, $Q_n^m(x)$ — присоединенные функции Лежандра первого и второго рода соответственно, $n = 0, 1, 2, \dots$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$ [12–15].

В результате получим

$$U_2^{(1)}(\alpha, \beta) = H_z \sum_{n=0}^{\infty} D_n P_n(\operatorname{ch} \alpha) P_n(\cos \beta), \quad \alpha > \alpha_0, \quad (15)$$

где

$$D_n = \frac{2n+1}{c} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+p} d^{p+1}}{p!(l^2 - c^2)^{\frac{p}{2}}} Q_n^p\left(\frac{l}{c}\right) b_p. \quad (16)$$

Потенциал внешнего поля U_0 в эллипсоидальных координатах $\{\alpha, \beta, \varphi\}$ имеет следующее представление:

$$U_0 = H_z c P_1(\operatorname{ch} \alpha) P_1(\cos \beta). \quad (17)$$

Учитывая представления (10), (11), (15), (17), условие ортогональности полиномов Лежандра $P_n(\cos \beta)$ на отрезке $[0, \pi]$ и выполняя условие непрерывности (9), получим

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n \frac{dP_n(\operatorname{ch} \alpha)}{d\alpha} &= a_n \frac{dQ_n(\operatorname{ch} \alpha)}{d\alpha} + D_n \frac{dP_n(\operatorname{ch} \alpha)}{d\alpha} \\ &+ c \frac{dP_n(\operatorname{ch} \alpha)}{d\alpha} \delta_{1n}, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (18)$$

где δ_{nk} — символ Кронекера.

Выполняя граничное условие (2), условие непрерывности (8) и принимая во внимание соотношение (18) и вронскиан [13,15]:

$$W\{P_n(\operatorname{ch} \alpha), Q_n(\operatorname{ch} \alpha)\} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 \alpha},$$

получим парные сумматорные уравнения вида

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \frac{dQ_n(\operatorname{ch} \alpha)}{d\alpha} + D_n \frac{dP_n(\operatorname{ch} \alpha)}{d\alpha} + c \frac{dP_n(\operatorname{ch} \alpha)}{d\alpha} \delta_{1n} \right) \\ \times P_n(\cos \beta) = 0, \quad \alpha = \alpha_0, \quad \beta < \beta_0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\operatorname{sh} \alpha_0 \frac{d}{d\alpha} P_n(\operatorname{ch} \alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_0} \right)^{-1} P_n(\cos \beta) = 0, \quad \beta_0 < \beta. \end{aligned} \quad (19)$$

Введем в рассмотрение новые коэффициенты y_n по формуле

$$a_n = \operatorname{sh} \alpha_0 \frac{d}{d\alpha} P_n(\operatorname{ch} \alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_0} y_n \quad (20)$$

и малый параметр g_n :

$$g_n = 1 + \frac{4 \operatorname{sh} \alpha_0}{2n+1} \frac{d}{d\alpha} P_n(\operatorname{ch} \alpha) \frac{d}{d\alpha} Q_n(\operatorname{ch} \alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_0}. \quad (21)$$

Из асимптотических представлений для функций Лежандра $P_n(z)$ и $Q_n(z)$ при больших n [15] следует, что

$$g_n = O(n^{-2}) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Тогда парные уравнения (19) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(1-g_n)y_n P_n(\cos \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)f_n P_n(\cos \beta), \\ 0 \leq \beta < \beta_0, \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n P_n(\cos \beta) = 0, \quad \beta_0 < \beta \leq \pi, \quad (22)$$

$$f_n = \frac{4D_n}{2n+1} \frac{d}{d\alpha} P_n(\operatorname{ch} \alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_0} + \frac{4c}{3} \operatorname{sh} \alpha_0 \delta_{1n}. \quad (23)$$

Используя формулу, связывающую сферические и эллипсоидальные гармонические функции [8,12], при $m = 0$:

$$\begin{aligned} Q_n^m(\operatorname{ch} \alpha) P_n^m(\cos \beta) \exp(im\varphi) \\ = \sum_{s=|m|}^{\infty} (-1)^{n+s} B_{ms}^n(a; c) r^s P_s^m(\cos \theta) \exp(im\varphi), \end{aligned}$$

где

$$B_{ms}^n(a; c) = \frac{(n+m)!}{(n-m)!(s+m)!(l^2 - c^2)^{\frac{s}{2}}} Q_n^s\left(\frac{l}{c}\right), \quad l > c,$$

получим следующее представление потенциала $U_2^{(2)}(\alpha, \beta)$ через сферические гармонические функции:

$$U_2^{(2)}(r, \theta) = H_z \sum_{n=0}^{\infty} p_n r^n P_n(\cos \theta), \quad (24)$$

где

$$p_n = \frac{1}{n!(l^2 - c^2)^{\frac{n}{2}}} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{n+p} Q_n^p\left(\frac{l}{c}\right) a_p. \quad (25)$$

Потенциал внешнего поля U_0 в сферических координатах $\{r, \theta, \varphi\}$ имеет представление

$$U_0 = H_z r P_1(\cos \theta) - H_z l. \quad (26)$$

Принимая во внимание представления потенциалов (12)–(14), (24), (26) и выполняя граничные условия (3)–(6), получим

$$m_n t^n + n_n = b_n + p_n d^n + d \delta_{1n} - l \delta_{0n}, \quad (27)$$

$$\mu n m_n t^n - \mu(n+1)n_n = -(n+1)b_n + n p_n d^n + d \delta_{1n}, \quad (28)$$

$$\tilde{b}_n = m_n + n_n t^{n+1}, \quad (29)$$

$$n \tilde{b}_n = \mu(n m_n - (n+1)n_n) t^{n+1}, \quad (30)$$

где

$$t = d/d_1, \quad \mu = \mu_2/\mu_1.$$

Из (27), (28) исключим выражение $m_n t^n$ и получим

$$b_n(n+1+n\mu) - (2n+1)\mu n_n = (1-\mu)n p_n d^n + (1-n\mu)d \delta_{1n}. \quad (31)$$

Из (29), (30) исключим коэффициенты \tilde{b}_n и получим

$$n_n t^{n+1} (n + (n + 1)\mu) = -(1 - \mu) n m_n. \quad (32)$$

Теперь коэффициенты m_n из (32) подставим в (27) и получим, что

$$n_n = \frac{n(\mu - 1)}{v_n} (b_n + p_n d^n + d\delta_{1n} - l\delta_{0n}), \quad (33)$$

где

$$v_n = t^{2n+1} (n + (n + 1)\mu) + (\mu - 1)n.$$

Подставляя коэффициенты n_n из (33) в (31), получим связь коэффициентов b_n и p_n , входящих в представление потенциалов $U_2^{(1)}(r, \theta)$ и $U_2^{(2)}(r, \theta)$ соответственно, вида

$$b_n = N_n d^n p_n + N_1 d\delta_{1n}, \quad (34)$$

где

$$N_n = \frac{\Omega_n - n(\mu - 1)}{n\mu + n + 1 - \Omega_n}, \quad \Omega_n = \frac{(2n + 1)n\mu(\mu - 1)}{v_n}.$$

Для решения парных уравнений (22) введем в рассмотрение новую неизвестную функцию $\varphi(t) \in C_{[0, \beta_0]}^{(1)}$, которая связана с коэффициентами y_n соотношением

$$y_n = \int_0^{\beta_0} \varphi(t) \sin(n + 0.5)t dt. \quad (35)$$

Используя интегральные представления Мелера–Дирихле для полиномов Лежандра [13,15], после некоторых преобразований получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно функции $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) - \int_0^{\beta_0} G(x, t) \varphi(t) dt = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \sin(n + 0.5)x, \quad (36)$$

$$0 < x < \beta_0,$$

где

$$G(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} g_n \sin(n + 0.5)x \sin(n + 0.5)t. \quad (37)$$

Преобразуем правую часть интегрального уравнения (36). Для этого сначала подставим в (16) представление для коэффициентов b_p из (34), принимая во внимание представления (20) и (25). В результате получим связь между коэффициентами D_n и y_k вида

$$D_n = \frac{2n + 1}{c} (-1)^n \left[\text{sh } \alpha_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k T_{nk} y_k \frac{d}{d\alpha} P_k(\text{ch } \alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_0} - N_1 \frac{d^3}{\sqrt{l^2 - c^2}} Q_n^1 \left(\frac{l}{c} \right) \right], \quad (38)$$

$$T_{nk} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{d^{2p+1}}{(p!)^2 (l^2 - c^2)^p} N_p Q_n^p \left(\frac{l}{c} \right) Q_k^p \left(\frac{l}{c} \right). \quad (39)$$

Затем подставим коэффициенты D_n из (38) в (23), учитывая связь (35) коэффициентов y_n с функцией $\varphi(t)$. В результате получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) - \int_0^{\beta_0} [G(x, t) + L(t, x)] \varphi(t) dt = F(x), \quad 0 < x < \beta_0, \quad (40)$$

где

$$L(t, x) = \frac{8}{\pi c} \text{sh } \alpha_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sin(k + 0.5)t \frac{d}{d\alpha} P_k(\text{ch } \alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_0} \times \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \sin(p + 0.5)x T_{pk} \frac{d}{d\alpha} P_p(\text{ch } \alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_0}, \quad (41)$$

$$F(x) = \frac{8c}{3\pi} \text{sh } \alpha_0 \sin \frac{3x}{2} - \frac{8}{\pi c} N_1 \frac{d^3}{\sqrt{l^2 - c^2}}$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k Q_n^1 \left(\frac{l}{c} \right) \sin(k + 0.5)x \frac{d}{d\alpha} P_k(\text{ch } \alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_0}. \quad (42)$$

Если толстостенная сферическая оболочка Γ отсутствует, то решение задачи экранирования магнитного поля тонким незамкнутым эллипсоидальным экраном сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма

$$\varphi(x) - \int_0^{\beta_0} G(x, t) \varphi(t) dt = \Phi(x), \quad 0 < x < \beta_0,$$

где

$$\Phi(x) = \frac{8c}{3\pi} \text{sh } \alpha_0 \sin \frac{3x}{2}.$$

Сходным образом решается задача экранирования для случая, когда магнитное поле направлено вдоль оси Ox .

Вычисление коэффициента экранирования (ослабления) поля внутри незамкнутой эллипсоидальной оболочки

Напряженность вторичного поля в произвольной точке M_0 области D_1 , согласно представлению (10), равна

$$\mathbf{H}_1(M_0) = -\frac{1}{c \sqrt{\text{sh}^2 \alpha + \sin^2 \beta}} \left[\frac{\partial U_1}{\partial \alpha} \mathbf{e}_\alpha + \frac{\partial U_1}{\partial \beta} \mathbf{e}_\beta \right],$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial \alpha} = H_z \text{sh } \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n \frac{d}{d\xi} P_n(\xi) \Big|_{\xi=\text{ch } \alpha} P_n(\cos \beta),$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial \beta} = -H_z \sin \beta \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n P_n(\operatorname{ch} \alpha) \frac{d}{d\xi} P_n(\xi) \Big|_{\xi=\cos \beta}.$$

Если точка M_0 находится на оси Oz_1 , то $|z_1| < b$, $\beta = 0$ или $\beta = \pi$, поэтому

$$\mathbf{H}_1(0, z_1) = \begin{cases} \mathbf{H}_1^{(+)}(0, z_1) = -\frac{H_z}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n \frac{d}{d\xi} P_n(\xi) \Big|_{\xi=\frac{z_1}{c}} \mathbf{e}_{z_1}, & \text{если } 0 \leq z_1 < b, \beta = 0, \\ \mathbf{H}_1^{(-)}(0, z_1) = -\frac{H_z}{c} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tilde{a}_n \frac{d}{d\xi} P_n(\xi) \Big|_{\xi=\frac{z_1}{c}} \mathbf{e}_{z_1}, & \text{если } -b < z_1 \leq 0, \beta = \pi, \end{cases}$$

где коэффициенты \tilde{a}_n вычисляются через решения интегрального уравнения (40) согласно представлениям (18), (20), (35) по формуле

$$\tilde{a}_n = \operatorname{sh} \alpha_0 \frac{d}{d\alpha} Q_n(\operatorname{ch} \alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_0} \int_0^{\beta_0} \varphi(x) \sin(n+0.5)x \, dx + D_n + c\delta_{1n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Коэффициенты экранирования (ослабления) поля в точке $M_0(0, z_1)$, расположенной на оси Oz_1 в области D_1 , вычисляем по формуле

$$K_1^{(\pm)}(z_1) = \frac{|\mathbf{H}_1^{(\pm)}(0, z_1)|}{|\mathbf{H}_0|}. \quad (43)$$

Вычислительный эксперимент

С помощью математической системы MathCAD [16] были проведены вычисления коэффициента экранирования $K_1^{(+)}(z_1)$ в области D_1 для различных геометрических параметров экранов и материала толстостенной оболочки Γ по формуле (43). Используя обобщенную квадратурную формулу Симпсона, которая имеет четвертый порядок точности, интегральное уравнение Фредгольма второго рода было преобразовано в системе линейных алгебраических уравнений вида [14]:

$$y_n - \sum_{k=0}^N A_k K_{nk} y_k = f_k, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (44)$$

где $K_{nk} = G(x_n, t_k) + L(t_k, x_n)$, $f_k = F(x_k)$, $x_k = kh$, $h = \frac{\beta_0}{N}$, N — четное число, A_k — весовые коэффициенты, которые вычисляются по формулам

$$A_0 = A_N = \frac{h}{3}, \quad A_{2i} = \frac{2h}{3}, \quad A_{2i+1} = \frac{4h}{3}, \\ i = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1.$$

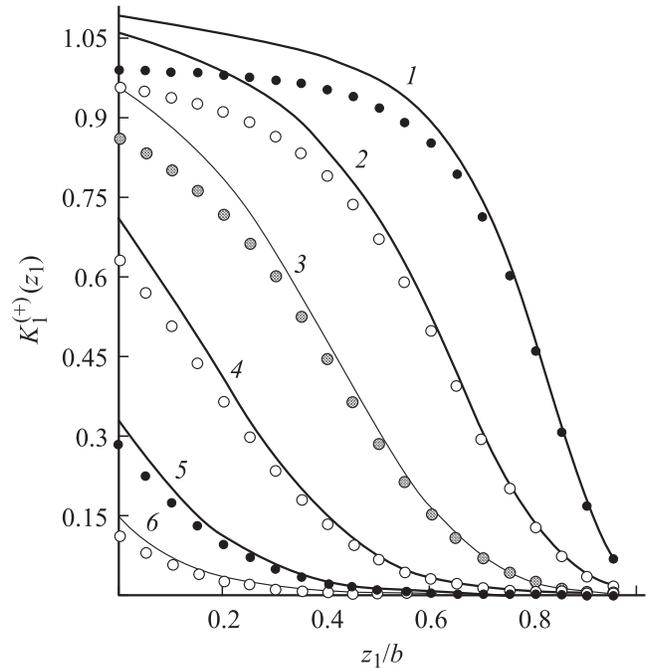


Рис. 2.

Система (44) представляет собой разностную схему, отвечающую интегральному уравнению Фредгольма второго рода (40). Решение системы (44) принимается за численное решение интегрального уравнения (40) в точке $x = x_k$, $k = 0, 1, \dots, N$.

Кроме того, для получения достоверного решения системы линейных алгебраических уравнений (44) необходимо было проверить обусловленность системы. Матрица, соответствующая системе, считается хорошо обусловленной, если число обусловленности матрицы ≥ 1 [17]. Для вычисления числа обусловленности матрицы в системе MathCAD имеются встроенные функции. При численном решении системы (44) шаг разбиения h принят равным 0.05. Бесконечные суммы (37), (39), (41), (42) вычислялись с точностью 10^{-6} . Присоединенные функции Лежандра вычислялись через гипергеометрическую функцию Гаусса по формуле [13–15]:

$$Q_\gamma(z) = (-1)^m (z^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\gamma + m + 1)}{2^{\gamma+1} \Gamma(\gamma + 1.5) z_2^{m+\gamma+1}} \times F_1\left(\frac{\gamma + m}{2} + 1; \frac{\gamma + m}{2} + \frac{1}{2}; \gamma + \frac{3}{2}; \frac{1}{z^2}\right).$$

Расчеты проведены для случаев, когда сферическая оболочка Γ выполнена из меди ($\mu_2 = \mu_{r2}\mu_0$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Нм}^{-1}$, $\mu_{r2} = 0.999912$, точечная линия на рис. 2), железа ($\mu_2 = \mu_{r2}\mu_0$, $\mu_{r2} = 5000$, сплошная линия на рис. 2) и $\mu_1 = \mu_{r1}\mu_0$ ($\mu_{r1} = 1.000038$ — относительная магнитная проницаемость воздуха) [18].

В таблице приведены значения коэффициента экранирования $K_1^{(+)}(z_1)$, $0 \leq z_1/b < 1$, для угла раство-

Значение отношения b/a	Значение отношения z_1/b				
	0	0.2	0.4	0.6	0.8
8	1.114	0.654	0.009	0.0004	0.0002
	0.94	0.584	0.007	0.0003	0.0002
	0.939	0.578	0.006	0.0002	0.00017
4	0.983	0.511	0.059	0.002	0.0002
	0.822	0.439	0.051	0.002	0.0001
	0.822	0.439	0.051	0.002	0.00008
2	0.771	0.437	0.156	0.023	0.005
	0.633	0.367	0.132	0.019	0.004
	0.632	0.367	0.132	0.019	0.004
1.3	0.665	0.417	0.208	0.081	0.021
	0.534	0.341	0.173	0.078	0.017
	0.533	0.341	0.173	0.077	0.017
1.05	0.615	0.407	0.23	0.107	0.036
	0.483	0.326	0.187	0.087	0.03
	0.482	0.326	0.187	0.087	0.03

ра незамкнутой эллипсоидальной оболочки $\beta_0 = 75^\circ$ при $l/b = 2$ (отношение расстояния l между точками O и O_1 к большой полуоси эллипсоида b), $d/d_1 = 2$ (отношение внешнего радиуса d сферы Γ к внутреннему d_1), $l/d = 2.2$ (отношение расстояния l к внешнему радиусу d сферы Γ) и различных значениях отношения большой полуоси эллипсоида b к малой a : $b/a = 8$; 4; 2; 1.3; 1.05. Для указанных значений b/a представлены величины коэффициента экранирования $K_1^{(+)}(z_1)$: сферическая оболочка Γ выполнена из железа — первая строка, из меди — вторая, третья — в отсутствие сферической оболочки Γ .

На рис. 2 представлен коэффициент экранирования $K_1^{(+)}(z_1)$, $0 \leq z_1/b < 1$, для некоторых значений угла раствора эллипсоидальной оболочки β_0 : кривая 1 — 30° , 2 — 45° , 3 — 60° , 4 — 75° , 5 — 90° , 6 — 100° ; при $b/a = 2$, $l/b = 2$, $d/d_1 = 3$, $l/d = 8/3$.

На основании вычислительного эксперимента для рассмотренной конфигурации экранов можно сделать следующие выводы.

1. Присутствие толстостенной сферической оболочки из ферромагнетика ухудшает экранирующие свойства незамкнутой эллипсоидальной оболочки.

2. Толстостенная сферическая оболочка из парамагнетика или диамагнетика практически не оказывает влияния на величину коэффициента экранирования.

3. В окрестности начала эллипсоидальных координат (точка O_1) лучшими экранирующими свойствами обладает незамкнутая эллипсоидальная оболочка, у которой отношение большой полуоси к малой стремится к единице, т. е. незамкнутая сферическая оболочка с разными углами раствора.

4. Чем больше угол раствора незамкнутой эллипсоидальной оболочки, тем лучшими экранирующими свойствами она обладает.

Список литературы

- [1] Воронин Г.П. // Электроника: Наука, технология, бизнес. 2000. № 2. С. 5–7.
- [2] Бобраков С.Н., Карташев А.Г. // Рад. биология. Радиэкология. 2001. Т. 41. № 6. С. 706–711.
- [3] Васильева Л.К., Горский А.Н. // Вестн. МАНЭБ. 2000. № 4. С. 31–35.
- [4] Павлов А.Н. Воздействие электромагнитных излучений на жизнедеятельность. М.: Гелиос АРВ, 2002. 224 с.
- [5] Коваленко В., Владимиров Д. // Мир и безопасность. 2000. № 1. С. 6–9.
- [6] Токарский А.Ю. // Медицина труда и пром. экология. 2004. № 4. С. 38–40.
- [7] Apollonskii S.M., Erofeenko V.T., Shushkevich G.Ch. // Proc. of St. Petersburg IEEE Chapters. 2003. P. 68–72.
- [8] Ерофеенко В.Т. Электромагнитные поля в экранирующих оболочках. Минск, 1988. 246 с.
- [9] Штицберг В.Е. // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1989. № 1. С. 110–115.
- [10] Резинкина М.М. // Электричество. 2003. № 4. С. 44–48.
- [11] Canova A., Gruosso G., Repetto M. // The Int. J. for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Eng. 2004. N 1. P. 173–186.
- [12] Шушкевич Г.Ч. Расчет электростатических полей методом парных, тройных уравнений с использованием теорем сложения. Гродно: ГрГУ, 1999. 238 с.
- [13] Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. М.–Л.: ГИТТЛ, 1953. 380 с.
- [14] Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984. 384 с.
- [15] Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. М.: Наука, 1979. 840 с.
- [16] Шушкевич Г.Ч., Шушкевич С.В. Введение в MathCAD 2000. Гродно: ГрГУ, 2001. 140 с.
- [17] Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение. М.: Мир, 1989. 576 с.
- [18] Енохович А.С. Справочник по физике. М.: Просвещение, 1990. 384 с.