

01;03;04

## Торможение и ускорение быстрых электронов в плотном газе, находящемся в электрическом поле

© А.Н. Ткачев, С.И. Яковленко

Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН,  
119991 Москва, Россия  
e-mail: syakov@kapella.gpi.ru

(Поступило в Редакцию 25 июля 2005 г.)

Проведено моделирование распространения электронов в газе при их энергии, превышающей энергию возбуждения  $K$ -оболочки атомов газа. Расчеты показывают, что в отсутствие поля глубина проникновения электронов в газ тяжелее азота ограничена, прежде всего, упругими столкновениями с ядрами атомов. При движении электронов в электрическом поле упругие столкновения приводят к тому, что точно не определено критическое значение напряженности поля, при котором электрон с заданной энергией будет непрерывно ускоряться. Даже при существенном превышении критического значения напряженности поля ускоряется лишь некоторая доля электронов. Остальные электроны в результате упругих столкновений разворачиваются и теряют энергию за счет торможения полем. Центр тяжести электронов движется даже при больших значениях напряженности поля с установившейся постоянной скоростью.

PACS: 41.85.Ja

### Введение

При рассмотрении движения быстрых электронов в газах, находящихся в электрическом поле, обычно используют два подхода [1–4]. При упрощенном подходе считается, что на электрон действует сила торможения о газ, являющаяся заданной функцией его энергии. В кинетической теории при рассмотрении рассеяния электронов на ядрах учитываются лишь дальние кулоновские столкновения. Эти подходы не учитывают лобовых столкновений, т.е. столкновений с изменением направления скорости на угол порядка единицы и больше. Однако роль лобовых столкновений может оказаться существенной.

В то же время изучение механизмов распространения быстрых электронов в газах атмосферного давления сейчас представляет особый интерес в связи с тем, что они осуществляют фоновую ионизацию. Далее происходит распространение волны размножения электронов фона [5,6]. Это интересно как для получения мощных электронных пучков в плотных газах, так и для формирования объемных разрядов с большим энерговыделением [7,8].

В данной работе рассмотрена роль упругого рассеяния электронов на ядрах атомов газа в формировании характеристик распространения быстрых электронов в газе. Речь идет об электронах, имеющих энергию большую энергии возбуждения  $K$ -оболочки атомов газа.

### Постановка задачи и метод решения

Моделирование движения группы быстрых электронов, не взаимодействующих между собой, было проведено так же, как и в работах, подытоженных в обзорах [9,10], на основе одной из модификаций метода

частиц (подробнее см. [11]). Электроны рождались в начале координат. Была предусмотрена возможность различных распределений начальных направлений скоростей и начальной энергии электронов. В представленных ниже результатах расчетов начальная скорость всех электронов считалась направленной по направлению электрического поля (по оси  $x$ ), а начальная энергия электронов — одинаковой. На малых временных шагах решались уравнения движения всех рассматриваемых электронов и разыгрывались упругие и неупругие столкновения с атомами. Движение электронов рассматривалось на основе релятивистской механики, так же как в работах [12,13].

Уравнение движения электрона  
Движение отдельного электрона между упругими столкновениями описывалось уравнением

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} - F_{fr} \frac{\mathbf{p}}{p}, \quad \mathbf{p} = \frac{m_e \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1)$$

Здесь  $t$  — время;  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{v}$  — импульс и скорость электрона;  $e$ ,  $m_e$  — его заряд и масса;  $\beta = v/c$ ;  $c$  — скорость света в вакууме;  $\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля;  $F_{fr}$  — сила трения (торможения), обусловленная неупругими столкновениями электрона с частицами (она направлена противоположно скорости).

Для определения трения использовалось выражение [14]:

$$F_{fr}(\varepsilon) = \frac{4\pi e^4}{mc^2} ZN f_{fr}(\beta), \quad (2a)$$

$$f_{fr}(\beta) = \frac{1}{2\beta^2} \left\{ \ln \frac{m_e^2 c^4}{2\varepsilon_{mean}^2} + \ln \left[ \beta^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) \right] - \left( 2\sqrt{1 - \beta^2} - 1 + \beta^2 \right) \ln 2 + 1 - \beta^2 + \frac{1}{8} \left( 1 - \sqrt{1 - \beta^2} \right) \right\}. \quad (2b)$$

Здесь  $Z$  — число электронов в атоме нейтрального газа;  $N$  — плотность атомов нейтрального газа;  $\varepsilon$  — средняя энергия неупругих потерь;

$$\varepsilon = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - m_e c^2 \quad (3)$$

— кинетическая энергия электрона, при этом  $\beta(\varepsilon) = v/c = \sqrt{1 - [(\varepsilon/m_e c^2) + 1]^{-2}}$ .

При движении электрона вдоль поля уравнение движения (1) принимает вид

$$\frac{m_e c}{(1 - \beta^2(\varepsilon))^{3/2}} \frac{d\beta(\varepsilon)}{dt} = eE - F_{\text{тр}}(\varepsilon). \quad (4)$$

Зависимость силы торможения от кинетической энергии имеет минимум при  $\varepsilon \approx 2.54 m_e c^2 \approx 1.3$  MeV,  $\beta \approx 0.96$ . Этому минимуму соответствует сила

$$F_{\text{min}B} = \frac{4\pi e^4}{m_e c^2} ZN = (5.3 \cdot 10^{-18} \text{ V cm}^2) eZN,$$

например, при  $Z = 7$  (азот),  $N = 2 \cdot 2.5 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$  имеем  $E_{\text{min}B} = F_{\text{min}B}/e \approx 2 \text{ kV/cm}$ .

Для моделирования движения электронов, как и в [12,13], использовалось аналитическое решение для движения во внешнем однородном электрическом поле. На каждом временном шаге вычислялись новые координаты электрона и длина пути. Шаг по времени выбирался так, чтобы его длина шага пути, для наиболее энергичных электронов, не превышала четверти длины пробега за счет столкновений с ядрами. Сила трения учитывалась в конце каждого временного шага уменьшением полной энергии электрона (соответственно и модуля импульса) на работу силы трения за данный временной шаг.

Рассеяние электрона на ядре

Упругие столкновения электронов с ядрами учитывались для прицельных параметров  $\rho$ , меньших радиуса орбиты  $K$ -электрона:  $\rho < a_B/Z$ ,  $a_B \equiv \hbar^2/m_e e^2$  — боровский радиус. При этом угол  $\chi$ , характеризующий изменение направления скорости электрона в результате упругого рассеяния электрона на ядре, определялся выражением [15] (рис. 1):

$$\chi(y, \gamma) = \begin{cases} \pi \left[ \frac{2y}{\sqrt{(y-1)(y+1)}} - 1 \right] - \frac{2y}{\sqrt{(y-1)(y+1)}} \\ \quad \times \arccos \left[ \frac{2}{\sqrt{y^2 - \gamma^2 (y-1)(y+1)}} \right], & \text{при } y > 1, \\ \pi - \frac{2y}{\sqrt{(y-1)(y+1)}} \\ \quad \times \text{arcch} \left[ \frac{2}{\sqrt{y^2 - \gamma^2 (y-1)(y+1)}} \right], & \text{при } y < 1, \end{cases} \quad (5)$$

где  $y = \rho pc / Ze^2$  — приведенный момент импульса (прицельное расстояние);  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$  — полная энергия электрона, нормированная на энергию покоя. Величины  $y$  и  $\gamma$  рассматриваются как функции кинетической энергии  $\varepsilon$ . Отметим, что при  $y \approx 1$  ( $y > 1$ ), согласно релятивистской механике, электрон совершает несколько оборотов вокруг ядра.

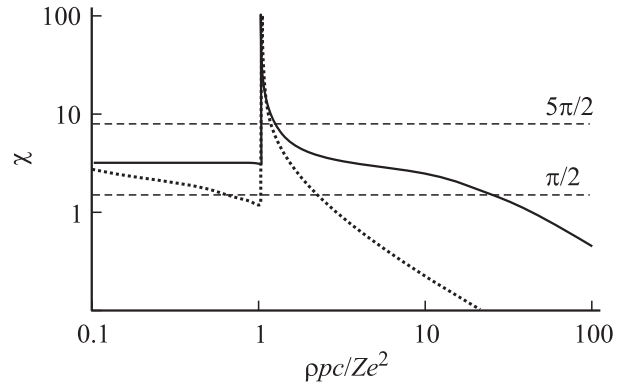


Рис. 1. Зависимость угла рассеяния электрона от нормированного прицельного параметра  $\rho pc / Ze^2$ . Сплошная кривая соответствует энергии налетающего электрона  $\varepsilon = 511 \text{ eV}$ , пунктирная —  $51.1 \text{ MeV}$  (энергия налетающего электрона не учитывает энергию покоя).

Полагая в (5)  $\chi = \pi/2$ , имеем уравнение, определяющее максимальное прицельное расстояние  $\rho_{\perp}$ , при котором имеет место отклонение скорости на прямой угол, как функцию кинетической энергии  $\varepsilon$

$$\frac{\pi}{2} = \pi \left[ \frac{2y_{\perp}}{\sqrt{(y_{\perp}-1)(y_{\perp}+1)}} - 1 \right] - \frac{2y_{\perp}}{\sqrt{(y_{\perp}-1)(y_{\perp}+1)}} \\ \times \arctg \left[ \sqrt{(y_{\perp}-1)(y_{\perp}+1)} \left( 1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) \right]. \quad (6)$$

Здесь  $y_{\perp} = \rho_{\perp} pc / Ze^2$ ,  $\rho_{\perp} > (Ze^2/m_e c^2)(1/\beta^2 - 1)^{1/2}$ .

Решив численно уравнение (6) для различных значений  $\varepsilon$ , получим зависимость соответствующего сечения  $\sigma_{\perp} = \pi \rho_{\perp}^2$  от кинетической энергии налетающего электрона (рис. 2). В конце каждого временного шага моделирования движения электронов с помощью генератора

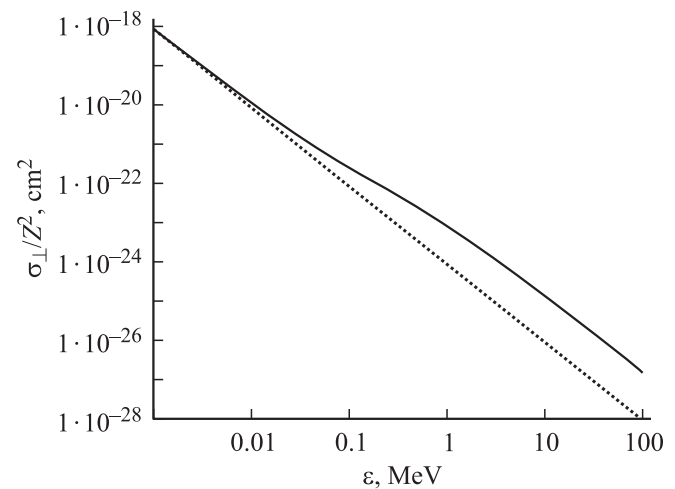


Рис. 2. Зависимость от энергии электрона сечения, при котором в ходе столкновения происходит поворот скорости на угол  $\pi/2$  (для максимального прицельного параметра). Пунктирная кривая соответствует нерелятивистскому случаю  $\sigma_{\perp}(\varepsilon)/Z^2 = \pi(e/2\varepsilon)^2$ .

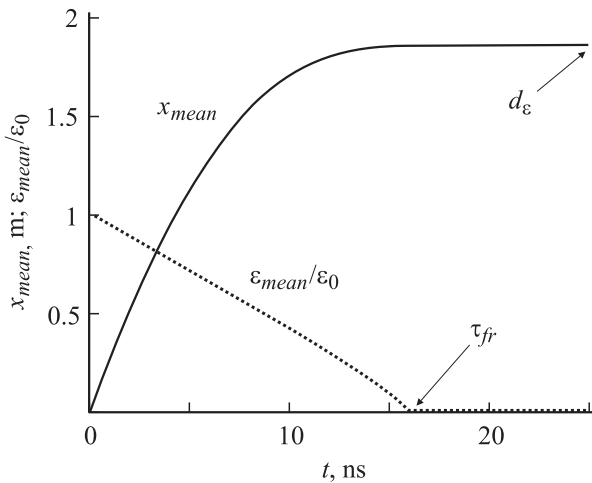
случайных чисел определялось — состоялось столкновение электрона с ядром атома или нет. Столкновение считалось состоявшимся, если выброшенное в интервале  $0-1$  случайное число не превышало  $1 - \exp(-dx/l)$ , где  $dx$  — пройденное электроном расстояние,  $l$  — длина свободного пробега. Если столкновение состоялось, направление импульса электрона изменялось в соответствии с (5). Угол рассеяния в плоскости, нормальной к направлению импульса электрона до рассеяния, принимался случайным в интервале углов  $0-2\pi$  (с однородным распределением).

Функции распределения электронов по проекции импульса и полной энергии вычислялись по задаваемому отрезку времени на заданной сетке. На каждом временном шаге выбранного для набора статистики временного отрезка для каждой ячейки соответствующей сетки подсчитывалось и запоминалось (суммировалось) количество попаданий проекций импульса и энергии электрона в ячейку.

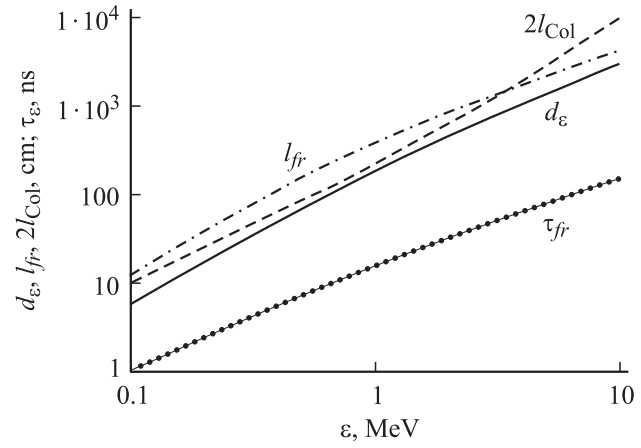
### Релаксация электронов в отсутствие поля

При инжекции быстрых электронов в газ вдоль оси  $x$  их скорость хаотизируется за счет упругих столкновений, а энергия падает за счет трения о газ. Хаотизация скорости приводит к тому, что координата центра тяжести электронов  $x_{mean}$  не возрастает более некоторой величины  $d_\epsilon$  (рис. 3), которую мы будем называть глубиной проникновения электронов в газ.

Величина  $d_\epsilon$  характеризуется длиной свободного пробега между упругими столкновениями электрона с ядрами. Как известно, при кулоновских столкновениях рассеяние электронов на большие углы происходит за счет накопления небольших изменений скорости при дальних пролетах. При этом совокупность таких столк-



**Рис. 3.** Зависимость от времени средней координаты  $x_{mean}$  и средней энергии  $\epsilon_{mean}$  электронов. Начальная энергия электронов  $\epsilon_0 = 1$  MeV, азот ( $Z = 7$ ,  $\epsilon_{mean} = 40$  eV) при атмосферном давлении ( $N = 2 \cdot 2.5 \cdot 10^{19}$  см $^{-3}$ ).



**Рис. 4.** Зависимость от энергии характерных длин:  $d_\epsilon$  — глубины проникновения электронов  $l_{fr}$  длины торможения,  $2l_{col}$  — удвоенной длины свободного полета относительно кулоновских столкновений, а также времени релаксации энергии. Тонкая кривая  $\tau_{fr}$ , полученная на основе формулы (7b), практически совпадает с пунктирной  $\tau_{fr}$ , полученной на основе численного моделирования.

новений характеризуется сечением кулоновского столкновения  $\sigma_{col} = \pi(2\rho_\perp)^2 \Lambda$  [14,15], где  $\Lambda$  — кулоновский логарифм. В данном случае в качестве кулоновского логарифма следует брать величину  $\Lambda = \ln(a_B/Z\rho_\perp)$ . Для длины свободного пробега имеем  $l_{col} = 1/(\sigma_{col}N)$ .

Длина свободного пробега характеризует расстояние, на котором происходит поворот скорости электрона на угол  $\chi \sim \pi/2$ . Глубина проникновения соответствует повороту на угол  $\chi \sim \pi$ . Поэтому естественно сравнивать величины  $d_\epsilon$  и  $2l_{col}$  (рис. 4).

Трение ограничивает пробег (т.е. длину траектории) электронов в среде величиной

$$l_{fr}(\beta) = l_{fr0} \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{x dx}{(1+x^2)^{3/2} f(x)}, \quad l_{fr0} \equiv \frac{m_e^2 c^4}{4\pi e^4 ZN}, \quad (7a)$$

где  $\beta_0 = 2(2E_{mean}/m_e)^{1/2}/c$ .

Время пробега задается выражением

$$\tau_{fr}(\beta) = \tau_{fr0} \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2} f(x)}, \quad \tau_{fr0} \equiv \frac{m_e^2 c^3}{4\pi e^4 ZN}. \quad (7b)$$

Эти формулы следуют из уравнения (4).

Время пробега  $\tau_{fr}$ , рассчитанное по формуле (7b), практически совпадает с результатами моделирования (рис. 4). В то же время пробег  $l_{fr}$  превышает глубину проникновения  $d_\epsilon$ . Это естественно, поскольку электрон движется не по прямой линии. Самой малой длиной оказывается глубина проникновения, поскольку в нее вносят вклад как упругое рассеяние, так и торможение. Из рис. 4 видно, что вклад упругого рассеяния наиболее существен даже для азота ( $Z = 7$ ). Для более тяжелых

газов, например ксенона ( $Z = 54$ ), вклад упругих столкновений еще более существен, поскольку эффективность упругих столкновений  $\propto Z^2$ , а эффективность неупругих потерь  $\propto Z$ .

## Движение электронов в поле

При инъекции быстрых электронов в газ вдоль оси  $x$ , по которой направлено поле напряженности  $E$ , длина и время их пробега вдоль поля описываются выражениями (4):

$$l_{fr}(\beta, E) = l_{fr0} \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{x dx}{(1+x^2)^{3/2} [f(x) - E/E_0]},$$

$$\tau_{fr}(\beta, E) = \tau_{fr0} \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2} [f(x) - E/E_0]}, \quad (8)$$

где  $E_0 = \frac{4\pi e^3}{m_e c^2} ZN$  ( $E_0 \approx 180$  В/м, при  $Z = 7$ ,  $\varepsilon_{mean} = 40$  эВ,  $N = 2 \cdot 2.5 \cdot 10^{19}$  см $^{-3}$ ).

Напряженность критического поля  $E_{mean}$ , при котором должно иметь место постоянное увеличение энергии электронов, определяется выражением  $E_{cr}(\varepsilon) = F_{fr}(\varepsilon)/e$  (рис. 5). Численное моделирование показывает, что ситуация несколько сложнее. При полях, не намного выше критических, электроны по-прежнему тормозятся за некоторое время пробега  $\tau_{fr}$ . Однако это время заметно превосходит время  $\tau_{fr}$ , определяемое по формуле (8). При существенном превышении критического поля падение средней энергии электронов через некоторое время сменяется ее ростом (рис. 6). При этом координата центра тяжести электронов  $x_{mean}$  монотонно растет.

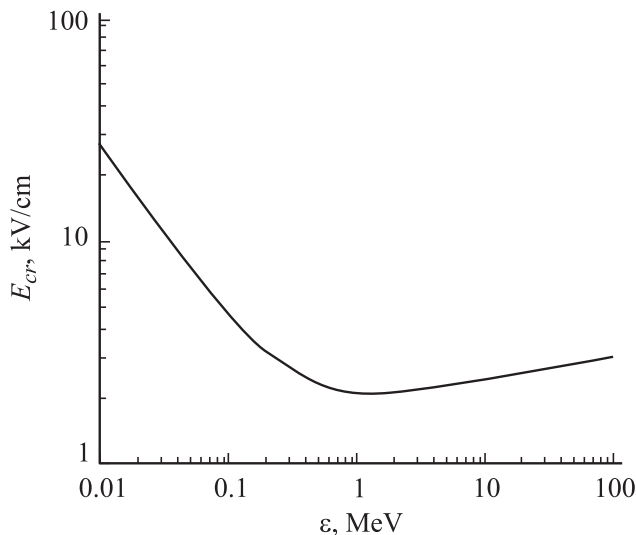


Рис. 5. Зависимость от энергии критической напряженности поля, при которой должно происходить ускорение электрона.

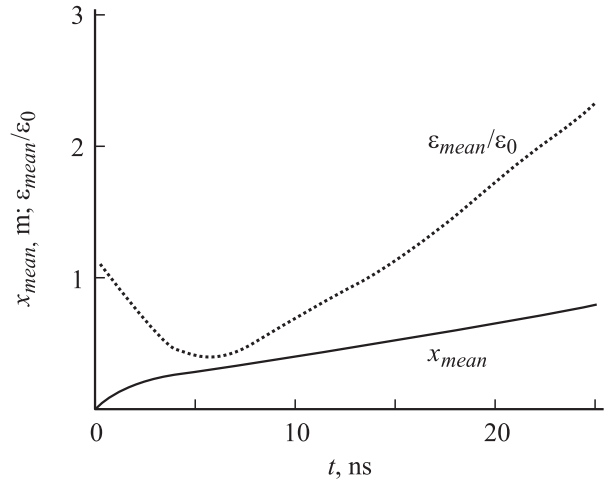


Рис. 6. Зависимость от времени средней координаты  $x_{mean}$  и средней энергии  $\varepsilon_{mean}$  электронов при наличии поля напряженностью  $E = 7$  кВ, выше критической ( $E_{cr} = 4.68$  кВ).

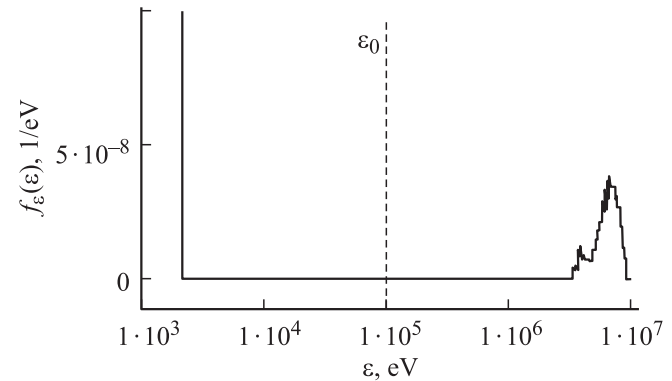
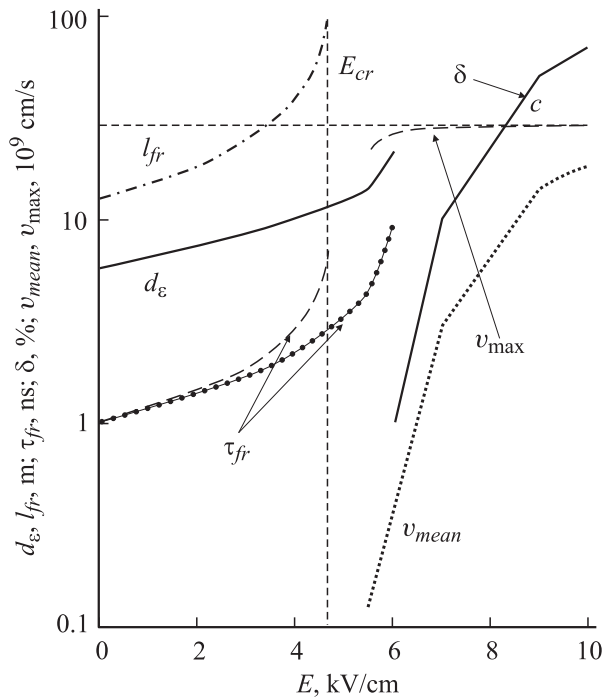


Рис. 7. Распределение по энергии электронов при наличии поля, напряженностью  $E = 7$  кВ. Распределение получено на временном промежутке  $50 < t < 70$  нс и нормировано условием  $\int f(\varepsilon) d\varepsilon = 1$ .

Это связано с тем, что некоторая доля ( $\delta$ ) рассматриваемых электронов начинает забирать энергию поля (рис. 7). В распределении электронов по энергии  $f_\varepsilon(\varepsilon)$  формируется группа быстрых электронов, в то же время их существенная часть ( $1 - \delta$ ) теряет энергию. Конкуренция этих процессов и приводит к немонотонной зависимости средней энергии  $\varepsilon_{mean}$  от времени. Доля ускорившихся электронов  $\delta$  растет с увеличением напряженности поля, причем основная часть становится убегающей лишь при напряженности поля, вдвое превышающей  $E_{cr}$  (рис. 8).

Существенное различие времени пробега, вычисленного на основе формулы (8) и полученного на основе моделирования (рис. 8) при  $E \approx E_{cr}$  связано с тем, что электрическое поле мешает набрать большую совокупность малых отклонений в кулоновских столкновениях. Это приводит к уменьшению эффективного кулоновского сечения  $\sigma_{Col}$ , которое может, в принципе, упасть до сечения лобовых столкновений  $\sigma_{\perp}$ .



**Рис. 8.** Зависимость от напряженности поля энергии характерных длин ( $d_\epsilon$  — глубины проникновения электронов,  $l_{fr}$  — длины торможения), а также времени релаксации энергии  $\tau_{fr}$ . Тонкая штриховая кривая  $\tau_{fr}$ , полученная на основе формулы (8), существенно отличается от пунктирной  $\tau_{fr}$ , полученной с помощью численного моделирования. Глубина проникновения электронов  $d_\epsilon$  для  $E > E_{cr}$  определялась для моментов времени  $t = \tau_{fr}$ .

При  $E > E_{cr}$  движение как центра тяжести электронов, так и группы быстрых электронов происходит с установившимися постоянными скоростями

$$v_{mean} = \frac{dx_{mean}}{dt}, \quad v_{max} = \frac{dx_{max}}{dt}.$$

Зависимость этих скоростей от напряженности поля представлена на рис. 8. Более резкая зависимость  $v_{mean}$  от  $E$  связана с увеличением доли быстрых частиц.

## Заключение

Итак, проведено моделирование распространения электронов в газе при энергии, превышающей энергию возбуждения  $K$ -оболочки атомов газа. Такие электроны рассеиваются преимущественно на атомном ядре, а теряют энергию за счет неупругих столкновений с электронными оболочками атомов. Расчеты показывают, что в отсутствие поля глубина проникновения электронов в газ тяжелой азота ограничена, прежде всего, упругими столкновениями с ядрами атомов. Длина траектории электрона существенно меньше глубины проникновения электронов в газ.

При движении электронов в электрическом поле упругие столкновения приводят к тому, что критическое

значение напряженности поля, при котором электрон с заданной энергией будет непрерывно ускоряться, не определяется. Даже при существенном превышении критического значения напряженности поля ускоряется лишь некоторая доля электронов, остальные в результате упругих столкновений разворачиваются и теряют энергию за счет торможения полем. Кроме того, упругие столкновения приводят к тому, что центр тяжести электронов движется даже при больших значениях напряженности поля с установившейся постоянной скоростью. При малых значениях напряженности поля эта скорость равна нулю.

Работа поддержана МНТЦ, проект № 2706.

## Список литературы

- [1] Бабич Л.П., Лойко Т.В., Цукерман В.А. // УФН. 1990. Т. 160. № 7. С. 49.
- [2] Королев Ю.Д., Месляц Г.А. Физика импульсного пробоя газов. М.: Наука, 1991.
- [3] Райзер Ю.П. Физика газового разряда. М.: Наука, 1992.
- [4] Гуревич А.В., Зыбин К.П. // УФН. 2001. Т. 171. № 11. С. 1177–1199.
- [5] Яковленко С.И. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 9. С. 47–54.
- [6] Костыря И.Д., Орловский В.М., Тарасенко В.Ф., Ткачев А.Н., Яковленко С.И. ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 7. С. 65–69.
- [7] Тарасенко В.Ф., Яковленко С.И. // УФН. 2004. Т. 174. Вып. 9. С. 953–971.
- [8] Tkachev A.N., Yakovlenko S.I. Runaway of Electrons in Dense Gases and Mechanism of Generation of High-power Subnanosecond Beams // CEJP. 2004. Vol. 2. N 4. P. 579–635 ([www.cesj.com/physics.html](http://www.cesj.com/physics.html)).
- [9] Tkachev A.N., Yakovlenko S.I. // Laser Physics. 2002. Vol. 12. N 7. P. 1022.
- [10] Ткачев А.Н., Яковленко С.И. // Кр. сообщ. по физ. ФИАН. 2004. № 2. С. 43–51.
- [11] Ткачев А.Н., Яковленко С.И. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 4. С. 118–121.
- [12] Далгарно А. // Атомные и молекулярные процессы / Под ред. Д. Бейтса. М.: Мир, 1964.
- [13] Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. М.: ГИФМЛ, 1962. 480 с.
- [14] Трубников Б.А. // Вопросы теории плазмы. Вып. 1 / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. С. 98–182.
- [15] Сивухин Д.В. // Вопросы теории плазмы. Вып. 4 / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1964. С. 81–187.