01;03

Эволюция формы поверхности деформированного в начальный момент времени пузырька в вязкой жидкости

© А.Н. Жаров, А.И. Григорьев, И.Г. Жарова

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 4 мая 2005 г.)

Найдено решение начальной краевой задачи о расчете формы заряженного пузырька в вязкой несжимаемой диэлектрической жидкости как функции времени в линейном приближении по амплитуде исходной деформации. Рассмотрены как центрально симметричные пульсации, так и осцилляции формы при неизменном объеме. Показано, что форма пузырька, а также поля скоростей и давлений жидкости в его окрестности как функции времени, представляются конечными суммами по номерам изначально возбужденных мод и могут быть записаны в виде двух слагаемых, первое из которых — сумма по корням дисперсионного соотношения, а второе представляется несобственным интегралом. В асимптотиках малой и большой вязкостей соответствующие аналитические выражения принимают простые формы, не содержащие интегралов. Выяснилось, что зависимость от вязкости жидкости величины декремента затухания поверхностных осцилляций пузырька немонотонна как для радиальных пульсаций, а различна в асимптотиках малых и больших вязкостей. Частоты радиальных пульсаций и поверхностных осцилляций пузырька при варьировании вязкости жидкости изменяются монотонно.

PACS: 47.55.dd

1. Микропузырьки в жидкости играют определяющую роль в большом количестве физически и технически значимых процессов от сонолюминисценции, электрофлотации и электроразряда в жидкостях до термоядерных реакций под действием высоких температур и давлений, развивающихся при кавитационном схлопывании пузырьков [1], а потому им посвящено много исследований, проведенных как в линейной [1–9], так и в нелинейной [10–16] постановках. Но, несмотря на обилие теоретических и экспериментальных работ, посвященных пузырькам в жидкостях, многие аспекты закономерностей реализации их осцилляций остались не выясненными. Так, все выполненные к настоящему времени линейные анализы ограничивались выводом и исследованием дисперсионного уравнения поверхностных осцилляций или качественным анализом фазовых портретов радиальных пульсаций пузырька. Все проведенные нелинейные аналитические исследования осцилляций пузырька выполнены лишь в приближении идеальной жидкости. До сих пор не решена задача о расчете нелинейных осцилляций пузырьков в вязкой жидкости с учетом как радиальных пульсаций, происходящих с изменением объема, так и поверхностных осцилляций формы пузырька при постоянном объеме. Имея в виду необходимость выполнения подобного исследования, в настоящей работе приведем первый этап решения обсуждаемой задачи, а именно: решение в линейном по амплитуде исходной деформации приближении начальной краевой задачи о расчете как радиальных пульсаций, так и поверхностных осцилляций пузырька. Необходимость в последовательном раздельном рассмотрении линейных и нелинейных осцилляций пузырька в вязкой жидкости связана с большой математической громоздкостью проблемы. Предлагаемое исследование стало возможным после решения задачи о расчете нелинейных осцилляций заряженной капли вязкой жидкости [17,18], поскольку в существенной степени использует те же математические подходы и приемы.

2. Рассмотрим сферический пузырек радиуса r_0, несущий электрический заряд Q, образовавшийся в жидкости с диэлектрической проницаемостью ε_d, плотностью ρ, кинематической вязкостью ν, коэффициентом поверхностного натяжения σ. Будем считать, что в пузырьке находятся газ с начальным давлением $p_g^{(0)}$, подчиняющийся политропическому закону с показателем политропы γ и насыщенный пар жидкости с давлением p_V.

При изменении давления жидкости $p^{(0)}$ заряда на пузырьке Q, давления насыщенного пара p_V или каких-либо других характеристик жидкости или газа граница раздела сред будет двигаться под действием суммарного давления

$$p(r) = -p^{(0)} + p_V + p_g^{(0)}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{3\gamma} + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_d r^4} - \frac{2\sigma}{r}, \quad (1)$$

где r — текущий радиус пузырька. При $p(r) > 0$ пузырек расширяется, при $p(r) < 0$ сжимается, если $p(r) = 0$ находится в равновесии. Из выражения (1) видно, что уравнение $p(r) = 0$ может иметь различное количество корней: один, два, ни одного [4]. Стационарные состояния сферического пузырька в нижеследующем изложении будем обозначать $r = a$.

Рассмотрим капиллярные осцилляции пузырька, находящегося в одном из равновесных состояний при $r = a$. Поле скоростей течения жидкости в окрестности пузырька обозначим $\mathbf{U}(r, \vartheta, t)$, поле давлений — $p(r, \vartheta, t)$, потенциалы электрического поля в окрестности пузырька и на его поверхности обозначим $\phi(r, \vartheta, t)$ и $\phi_S(t)$

соответственно. Уравнение поверхности пузырька, совершающего центрально симметричные пульсации, так, что его радиус есть функция времени $R = R(t)$, и кроме того совершающего осесимметричные осцилляции, связанные с деформацией в начальный момент времени сферической поверхности границы раздела на $\xi(\vartheta, t)$, в любой последующий момент времени t запишем в сферической системе координат r, ϑ в виде

$$F(r, \vartheta, t) = r - a - R(t) - \xi(\vartheta, t) = 0 \qquad (2)$$

с начальным условием

$$t = 0: \qquad R = \varepsilon h_0 \cdot P_0(\mu);$$
$$\xi = \varepsilon \sum_{m\in\Omega} h_m \cdot P_m(\mu); \quad \mu = \cos(\vartheta), \qquad (3)$$

где ε — малый параметр, характеризующий амплитуду начальной деформации; $P_m(\mu)$ — полином Лежандра; Ω — множество индексов изначально возбужденных мод; h_0 и h_m — константы, учитывающие парциальный вклад m-й моды в формирование начальной формы пузырька, такие, что $h_0 + \sum_{m\in\Omega} h_m = O(a)$; индекс „0“ соответствует центрально симметричным пульсациям.

Математическая формулировка задачи о расчете капиллярных колебаний заряженного пузырька, форма которого определяется (2)–(3), имеет вид

$$\partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{U} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \nu\Delta\mathbf{U}; \quad \mathrm{div}\,\mathbf{U} = 0; \quad \Delta\phi = 0;$$
$$t = 0: \qquad \mathbf{U} = 0; \quad r \to \infty: \quad \mathbf{U} < \infty; \quad \boldsymbol{\nabla}\phi \to 0;$$
$$r = a + R(t) + \xi(\vartheta, t): \qquad \phi = \phi_S(t);$$
$$\int_S \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi\, dS = -4\pi Q;$$
$$S = \{r, \vartheta, \varphi| : r = a + R + \xi;\ 0 \le \vartheta \le \pi;\ 0 \le \varphi \le 2\pi\};$$
$$\partial_t F + (\mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\nabla})F = 0; \quad \boldsymbol{\tau}\cdot(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{U} + \mathbf{n}\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{U} = 0;$$
$$-p + 2\rho\nu\mathbf{n}\cdot(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{U} + p_V + p_{g0}\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma}$$
$$+ \frac{1}{8\pi\varepsilon_d}(\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 - \sigma(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{n}) = 0, \qquad (4)$$

где символ ∂_t означает частную производную по переменной t; $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ — единичные вектора нормали и касательной к поверхности пузырька; V_0 и V — начальный и текущий объем пузырька.

3. Для отыскания решения выписанной нелинейной системы в рамках метода прямого разложения все искомые величины задачи представим в виде асимптотических разложений по малому параметру ε

$$R(t) = \varepsilon R^{(1)}(t) + O(\varepsilon^2); \quad \xi(\vartheta, t) = \varepsilon\xi^{(1)}(\vartheta, t) + O(\varepsilon^2);$$
$$\mathbf{U}(r, \vartheta, t) = \varepsilon U_r^{(1)}(r, \vartheta, t)\mathbf{e}_r + \varepsilon U_\vartheta^{(1)}(r, \vartheta, t)\mathbf{e}_\vartheta + O(\varepsilon^2);$$
$$p(r, \vartheta, t) = p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)}(r, \vartheta, t) + O(\varepsilon^2);$$
$$\phi(r, \vartheta, t) = \phi^{(0)}(r, t) + \varepsilon\phi^{(1)}(r, \vartheta, t) + O(\varepsilon^2);$$
$$\phi_S(t) = \phi_S^{(0)}(t) + \varepsilon\phi_S^{(1)}(t) + O(\varepsilon^2). \qquad (5)$$

3a. Подставляя разложения (5) в систему уравнений (4) и приравнивая коэффициенты при нулевой степени малого параметра, получим систему уравнений нулевого порядка малости

$$\Delta\phi^{(0)} = 0; \quad r \to +\infty: \ \boldsymbol{\nabla}\phi^{(0)} \to 0; \quad \phi^{(0)}(a, t) = \phi_S^{(0)}(t);$$
$$r = a: \quad \int_{-1}^{1} a^2\partial_r\phi^{(0)}(r, t)\, d(\cos\vartheta) = -2Q;$$
$$-p^{(0)} + p_V + p_g^{(0)}\left(\frac{r_0}{a}\right)^{3\gamma} + \frac{1}{8\pi\varepsilon_d}\left(\partial_r\phi^{(0)}(r, t)\right)^2 - \frac{2\sigma}{a} = 0. \qquad (6)$$

Из (6) найдем

$$\phi^{(0)} = \frac{Q}{r}; \quad \phi_S^{(0)} = \frac{Q}{a};$$
$$p(a) = -p^{(0)} + p_V + p_g^{(0)}\left(\frac{r_0}{a}\right)^{3\gamma} + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_d a^4} - \frac{2\sigma}{a} = 0. \qquad (7)$$

3b. Собирая компоненты системы (4) после подстановки в нее разложений (5), содержащие ε в первой степени, получим задачу первого порядка малости

$$\partial_t U_r^{(1)} = -\frac{1}{\rho}\partial_r p^{(1)} + \nu\Bigg(\frac{1}{r^2}\partial_{\vartheta\vartheta}U_r^{(1)} + \frac{\mathrm{ctg}(\vartheta)}{r^2}\partial_\vartheta U_r^{(1)}$$
$$- \frac{1}{r}\partial_{r\vartheta}U_\vartheta^{(1)} - \frac{\mathrm{ctg}(\vartheta)}{r}\partial_r U_\vartheta^{(1)} - \frac{1}{r^2}\partial_\vartheta U_\vartheta^{(1)} - \frac{\mathrm{ctg}(\vartheta)}{r^2}U_\vartheta^{(1)}\Bigg);$$
$$\partial_t U_\vartheta^{(1)} = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\partial_\vartheta p^{(1)} + \nu\left(\partial_{rr}U_\vartheta^{(1)} + \frac{2}{r}\partial_r U_\vartheta^{(1)} - \frac{1}{r}\partial_{r\vartheta}U_r^{(1)}\right);$$
$$\partial_r U_r^{(1)} + \frac{2}{r}U_r^{(1)} + \frac{1}{r}\partial_\vartheta U_\vartheta^{(1)} + \frac{\mathrm{ctg}(\vartheta)}{r}U_\vartheta^{(1)} = 0;$$
$$t = 0: \quad R^{(1)} = h_0 P_0(\mu); \ \xi^{(1)} = \sum_{m\in\Omega} h_m \cdot P_m(\mu); \ \mathbf{U}^{(1)} = 0;$$
$$r \to +\infty: \qquad \mathbf{U}^{(1)} < \infty; \quad \Delta\phi^{(1)} = 0; \quad \boldsymbol{\nabla}\phi^{(1)} \to 0;$$
$$r = a: \qquad \phi^{(1)} + (R^{(1)} + \xi^{(1)})\,\partial_r\phi^{(0)} = \phi_S^{(1)}(t);$$
$$\int_{-1}^{1}\left(a\partial_r\phi^{(1)} + (R^{(1)} + \xi^{(1)})(a\partial_{rr}\phi^{(0)} + 2\partial_r\phi^{(0)})\right) d(\cos\vartheta) = 0;$$
$$\partial_t R^{(1)} + \partial_t\xi^{(1)} = U_r^{(1)}; \quad \partial_r U_\vartheta^{(1)} + \frac{1}{r}\partial_\vartheta U_r^{(1)} - \frac{1}{r}U_\vartheta^{(1)} = 0;$$
$$-p^{(1)} + 2\rho\nu\partial_r U_r^{(1)} - p_g^{(0)}\left(\frac{r_0}{a}\right)^{3\gamma}\frac{3\gamma}{a}R^{(1)} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_d}\partial_r\phi^{(0)}$$
$$\times\left(\partial_r\phi^{(1)} + (R^{(1)} + \xi^{(1)})\partial_{rr}\phi^{(0)}\right) + \frac{2\sigma}{a^2}R^{(1)}$$
$$+ \frac{\sigma}{a^2}(2 + \Delta_\Omega)\xi^{(1)} = 0;$$
$$\Delta_\Omega \equiv \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right). \qquad (8)$$

В системе (8) выполним преобразование Лапласа по времени

$$F(S) = \int_0^{+\infty} f(t)\exp(-St)dt;$$

$$f \equiv \{U_r^{(1)}, U_\vartheta^{(1)}, R^{(1)}, \xi^{(1)}, p^{(1)}, \varphi^{(1)}, \phi_S^{(1)}\}.$$

Изображения Лапласа разложим в ряды по полиномам Лежандра

$$U_r^{(1)}(r, \vartheta, S) = U_{r0}^{(1)}(r, S)P_0(\mu) + \sum_{n=1}^{+\infty} U_{rn}^{(1)}(r, S)P_n(\mu);$$

$$U_\vartheta^{(1)}(r, \vartheta, S) = \sum_{n=1}^{+\infty} U_{\vartheta n}^{(1)}(r, S)\partial_\vartheta P_n(\mu);$$

$$\xi^{(1)}(\vartheta, S) = \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n^{(1)}(S)\, P_n(\mu);$$

$$\phi^{(1)}(r, \vartheta, S) = \phi_0^{(1)}(r, S)P_0(\mu) + \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n^{(1)}(r, S)P_n(\mu);$$

$$p^{(1)}(r, \vartheta, S) = p_0^{(1)}(r, S)P_0(\mu) + \sum_{n=0}^{+\infty} p_n^{(1)}(r, S)P_n(\mu). \quad (9)$$

3с. Подставляя разложения (9) в систему (8) и используя свойство ортогональности полиномов Лежандра, выделим две системы уравнений, описывающие соответственно радиальные и поверхностные колебания пузырька.

Для описания радиальных пульсаций пузырька получим

$$SU_{r0}^{(1)}(r, S) = -\frac{1}{\rho}\,\partial_r p_0^{(1)}(r, S);$$

$$\partial_r U_{r0}^{(1)}(r, S) + \frac{2}{r}\, U_{r0}^{(1)}(r, S) = 0;$$

$$r \to \infty: \quad U_{r0}^{(1)}(r, S) < \infty; \ \partial_{rr}\phi_0^{(1)}(r, S) + \frac{2}{r}\partial_r\phi_0^{(1)}(r, S) = 0;$$

$$\partial_r\phi_0^{(1)}(r, S) \to 0; \quad \phi_0^{(1)}(r, S) \to 0;$$

$$r = a: \quad \int_{-1}^{1} \left(a\partial_r\phi_0^{(1)}(r, S) + R^{(1)}(S)(a\partial_{rr}\phi^{(0)} + 2\partial_r\phi^{(0)})\right)$$

$$\times P_0(\mu)\, d(\mu) = 0;$$

$$\phi_0^{(1)}(r, S) + R^{(1)}(S)\,\partial_r\phi^{(0)} = \phi_S^{(1)}(S); \quad SR^{(1)}(S) - h_0 = U_{r0}^{(1)};$$

$$-p_0^{(1)}(r, S) + 2\rho\nu\partial_r U_{r0}^{(1)}(r, S) - p_g^{(0)}\left(\frac{r_0}{a}\right)^{3\gamma}\frac{3\gamma}{a}\, R^{(1)}(S)$$

$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_d}\,\partial_r\phi^{(0)}\left(\partial_r\phi_0^{(1)}(r, S) + R^{(1)}(S)\partial_{rr}\phi^{(0)}\right)$$

$$+ \frac{2\sigma}{a^2}\, R^{(1)}(S) = 0. \quad (10)$$

Решая систему (10) с учетом (7), найдем

$$U_{r0}^{(1)}(r, S) = \frac{A_0(S)}{r^2}; \quad p_0^{(1)}(r, S) = \rho S\,\frac{A_0(S)}{r};$$

$$\phi_0^{(1)}(r, S) = 0; \quad \phi_S^{(1)}(S) = -\frac{Q^2}{a^2}\, R^{(1)}(S), \quad (11)$$

где $A_0(S)$ — константа. Подставим (11) в последние два граничных условия (9) и получим систему уравнений для определения констант $A_0(S)$ и $R^{(1)}(S)$

$$SR^{(1)}(S) - h_0 = \frac{A_0(S)}{a^2};$$

$$S\,\frac{A_0(S)}{a^2} + 4\nu\,\frac{A_0(S)}{a^4} + \omega_0^2 R^{(1)}(S) = 0, \quad (12)$$

где ω_0 — частота радиальных пульсаций пузырька в идеальной жидкости

$$\omega_0^2 = \frac{3\gamma}{\rho a^2}\, p_g^{(0)}\left(\frac{r_0}{a}\right)^{3\gamma} - \frac{2\sigma}{\rho a^3} + \frac{Q^2}{2\pi\varepsilon_d\rho a^6}.$$

Из системы (12) несложно найти коэффициенты $A_0(S)$, $R^{(1)}(S)$:

$$R^{(1)}(S) = h_0\left(S + \frac{4\nu}{a^2}\right)\left(S^2 + \frac{4\nu}{a^2}\, S + \omega_0^2\right)^{-1};$$

$$A_0(S) = -\omega_0^2 a^2 h_0\left(S^2 + \frac{4\nu}{a^2}\, S + \omega_0^2\right)^{-1}.$$

Подставляя найденные значения $A_0(S)$ и $R^{(1)}(S)$ в (11), найдем

$$U_{r0}^{(1)}(r, S) = -\omega_0^2 h_0\,\frac{a^2}{r^2}\left(S^2 + \frac{4\nu}{a^2}\, S + \omega_0^2\right)^{-1};$$

$$p_0^{(1)}(r, S) = -\rho S a\omega_0^2 h_0\,\frac{a}{r}\left(S^2 + \frac{4\nu}{a^2}\, S + \omega_0^2\right)^{-1}.$$

Выполняя обратное преобразование Лапласа, получим окончательные выражения для временной зависимости радиуса пульсирующего пузырька и связанных с пульсациями поля скоростей течения жидкости и поля давлений

$$R^{(1)}(t) = h_0\left(\cos(\psi_0 t) + 2\,\frac{\nu}{a^2}\,\frac{\sin(\psi_0 t)}{\psi_0}\right)\exp\left(-2\,\frac{\nu}{a^2}\, t\right);$$

$$\psi_0 = \sqrt{\omega_0^2 - 4\,\frac{\nu^2}{a^4}};$$

$$U_{r0}^{(1)}(r, t) = -\omega_0^2 h_0\,\frac{a^2}{r^2}\,\frac{\sin(\psi_0 t)}{\psi_0}\exp\left(-2\,\frac{\nu}{a^2}\, t\right);$$

$$p_0^{(1)}(r, t) = -\rho a\omega_0^2 h_0\,\frac{a}{r}\left(\cos(\psi_0 t) - 2\,\frac{\nu}{a^2}\,\frac{\sin(\psi_0 t)}{\psi_0}\right)$$

$$\times \exp\left(-2\,\frac{\nu}{a^2}\, t\right). \quad (13)$$

ψ_0 имеет смысл частоты радиальных пульсаций пузырька в вязкой жидкости.

3d. Для описания поверхностных осцилляций пузырька при неизменном объеме будем иметь систему

$$SU_{rn}^{(1)}(r,S) = -\frac{1}{\rho}\,\partial_r p_n^{(1)}(r,S) + \nu n(n+1)$$
$$\times\left(\frac{1}{r}\,\partial_r U_{\vartheta n}^{(1)}(r,S) + \frac{1}{r^2}\,U_{\vartheta n}^{(1)}(r,S) - \frac{1}{r^2}\,U_{rn}^{(1)}(r,S)\right); \quad (14)$$

$$SU_{\vartheta n}^{(1)}(r,S) = -\frac{1}{\rho r}\,p_n^{(1)}(r,S) + \nu\Bigg(\partial_{rr}U_{\vartheta n}^{(1)}(r,S)$$
$$+ \frac{2}{r}\,\partial_r U_{\vartheta n}^{(1)}(r,S) - \frac{1}{r}\,\partial_r U_{rn}^{(1)}(r,S)\Bigg); \quad (15)$$

$$\partial_r U_{rn}^{(1)}(r,S) + \frac{2}{r}\,U_{rn}^{(1)}(r,S) - \frac{n(n+1)}{r}\,U_{\vartheta n}^{(1)}(r,S) = 0; \quad (16)$$

$$r\to+\infty: \quad U_{rn}^{(1)}(r,S) < \infty; \quad U_{\vartheta n}^{(1)}(r,S) < \infty; \quad (17)$$

$$\partial_{rr}\phi_n^{(1)}(r,S) + \frac{2}{r}\,\partial_r\phi_n^{(1)}(r,S) - n(n+1)\phi_n^{(1)}(r,S) = 0; \quad (18)$$

$$\partial_r\phi_n^{(1)}(r,S)\to 0; \quad \phi_n^{(1)}(r,S)\to 0; \quad (19)$$

$$r=a: \qquad \phi_n^{(1)}(r,S) + \xi_n^{(1)}(S)\,\partial_r\phi^{(0)} = 0; \quad (20)$$

$$S\,\xi_n^{(1)}(S) - h_n = U_{rn}^{(1)}; \quad (21)$$

$$\partial_r U_{\vartheta n}^{(1)}(r,S) + \frac{1}{r}\,U_{rn}^{(1)}(r,S) - \frac{1}{r}\,U_{\vartheta n}^{(1)}(r,S) = 0; \quad (22)$$

$$-p_n^{(1)}(r,S) + 2\rho\nu\partial_r U_{rn}^{(1)}(r,S) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_d}\,\partial_r\phi^{(0)}\big(\partial_r\phi_n^{(1)}(r,S)$$
$$+ \xi_n^{(1)}(S)\partial_{rr}\phi^{(0)}\big) - \frac{\sigma}{a^2}\,(n+2)(n-1)\xi_n^{(1)}(S) = 0. \quad (23)$$

Из уравнений (18)–(20) для образца Лапласа поправки первого порядка к электростатическому потенциалу в окрестности заряженного пузырька получим

$$\phi_n^{(1)}(r,S) = \frac{Q}{a^2}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}\xi_n^{(1)}(S). \quad (24)$$

Для того чтобы найти поля скоростей и давления в окрестности пузырька из уравнений (15) и (16) выразим $p_n^{(1)}(r,S)$ и $U_{\vartheta n}^{(1)}(r,S)$:

$$p_n^{(1)}(r,S) = -S\rho r U_{\vartheta n}^{(1)}(r,S) + \rho\nu r\Bigg(\partial_{rr}U_{\vartheta n}^{(1)}(r,S)$$
$$+ \frac{2}{r}\,\partial_r U_{\vartheta n}^{(1)}(r,S) - \frac{1}{r}\,\partial_r U_{rn}^{(1)}(r,S)\Bigg), \quad (25)$$

$$U_{\vartheta n}^{(1)}(r,S) = \frac{r}{n(n+1)}\left(\partial_r U_{rn}^{(1)}(r,S) + \frac{2}{r}\,U_{rn}^{(1)}(r,S)\right). \quad (26)$$

Соотношения (25) и (26) подставим в (14), после чего оно примет вид

$$\left(\partial_{rr} + \frac{4}{r}\,\partial_r - \frac{(n-1)(n+2)}{r^2}\right)\Bigg(\partial_{rr} + \frac{4}{r}\,\partial_r$$
$$- \frac{(n-1)(n+2)}{r^2} - \frac{S}{\nu}\Bigg)U_{rn}^{(1)}(r,S) = 0.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям (17), легко выписывается:

$$U_{rn}^{(1)}(r,S) = \frac{A_n(S)}{r^{n+2}} + B_n(S)\,\frac{1}{r}\,k_n(\eta r); \quad \eta = \sqrt{\frac{S}{\nu}}, \quad (27)$$

где $A_n(S)$, $B_n(S)$ — произвольные постоянные; $k_n(z)$ — модифицированная сферическая функция Бесселя третьего рода порядка n.

Подставляя (27) в (25) и (26) и используя рекуррентное соотношение

$$\partial_z k_n(z) = -\frac{n+1}{z}\,k_n(z) - k_{n-1}(z) \quad (28)$$

найдем образы Лапласа для поправок первого порядка к полю скоростей течения жидкости в окрестности пузырька $U_{\vartheta n}^{(1)}(r,S)$, связанное с его поверхностными осцилляциями, и к полю давлений в жидкости $p_n^{(1)}(r,S)$

$$U_{\vartheta n}^{(1)}(r,S) = -\frac{1}{n(n+1)}\Bigg(\frac{nA_n(S)}{r^{n+2}}$$
$$+ \frac{B_n(S)}{r}\big(nk_n(\eta r) + r\eta k_{n-1}(\eta r)\big)\Bigg); \quad (29)$$

$$p_n^{(1)}(r,S) = \frac{A_n(S)S\rho}{(n+1)r^{n+1}}. \quad (30)$$

Подставляя выражения (7), (24), (27), (29)–(30) в граничные условия (21)–(23), используя рекуррентные соотношения (28) и

$$\partial_z k_n(z) = \frac{n}{z}\,k_n(z) - k_{n+1}(z)$$

получим систему трех уравнений относительно величин $A_n(S)$, $B_n(S)$, $\xi_n^{(1)}(S)$:

$$S\,\xi_n^{(1)}(S) - h_n = \frac{A_n(S)}{a^{n+2}} + \frac{B_n(S)}{a}\,k_n(\eta a);$$

$$2n(n+2)\,\frac{A_n(S)}{a^{n+2}} + \frac{B_n(S)}{a}\Bigg(\left(2n(n+2) + a^2\,\frac{S}{\nu}\right)k_n(\eta r)$$
$$+ 2a\,\eta\,k_{n-1}(\eta r)\Bigg) = 0;$$

$$\left(S + \frac{2\nu}{a^2}\,(n+1)(n+2)\right)\frac{A_n(S)}{a^{n+2}} + \omega_n^2\xi_n^{(1)}(S)$$
$$+ \frac{2\nu}{a^2}\,\frac{B_n(S)}{a}(n+1)\big((n+2)k_n(\eta a) + a\eta k_{n-1}(\eta a)\big) = 0,$$

где ω_n имеет смысл частоты поверхностных осцилляций пузырька в идеальной жидкости:

$$\omega_n^2 = \frac{\sigma}{\rho a^3}\,(n+1)(n-1)\left(n+2 - \frac{Q^2}{4\pi\sigma\varepsilon_d a^3}\right).$$

Разрешив данную систему и подставив выражения для коэффициентов $A_n(S)$, $B_n(S)$ в (27), (29)–(30), несложно найти окончательный вид изображений Лапласа для отклонения формы поверхности пузырька от равновесной сферической и для поправок первого порядка малости к полю скоростей течения жидкости в окрестности пузырька и давлений в ней:

$$\xi_n^{(1)}(S) = \frac{h_n}{D_n(S)}\left(S + 2(n+2)(2n+1)\,\frac{\nu}{a^2} - 4n(n+2)^2\,\frac{\sqrt{\nu^3}}{a^3\sqrt{S}}\,\alpha_n\cdot\chi_n\right);$$

$$\alpha_n \equiv \frac{k_{n-1}(\eta a)}{k_n(\eta a)};$$

$$U_{rn}^{(1)}(r,S) = -\left(1 + 2n(n+2)\,\frac{\nu}{a^2S}\,\chi_n\right)\left(\frac{a}{r}\right)^{n+2}\frac{\omega_n^2h_n}{D_n(S)} + 2n(n+2)\,\frac{\nu}{a^2S}\,\chi_n\,\frac{\omega_n^2h_n}{D_n(S)}\,\frac{a}{r}\,\frac{k_n(\eta r)}{k_n(\eta a)};$$

$$\chi_n \equiv \left(1 + \frac{2}{\eta a}\,\alpha_n\right)^{-1};$$

$$U_{\vartheta n}^{(1)}(r,S) = \frac{1}{n+1}\left\{\left(1 + 2n(n+2)\,\frac{\nu}{a^2S}\,\chi_n\right)\left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} - 2(n+2)\,\frac{\nu}{a^2S}\,\chi_n\,\frac{a}{r}\left(n\,\frac{k_n(\eta r)}{k_n(\eta a)} + r\cdot\eta\cdot\alpha_n\right)\right\}\frac{\omega_n^2h_n}{D_n(S)};$$

$$p_n^{(1)}(r,S) = -\frac{\rho a S}{n+1}\left(1 + 2n(n+2)\,\frac{\nu}{a^2S}\,\chi_n\right)\frac{\omega_n^2h_n}{D_n(S)}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}; \tag{31}$$

$$D_n(S) \equiv S^2 + \omega_n^2 + 2(n+2)(2n+1)\,\frac{S\nu}{a^2} - 4n(n+2)^2\,\frac{\sqrt{\nu^3}}{a^3}\,\sqrt{S}\cdot\alpha_n\cdot\chi_n.$$

Функции (31) являются аналитическими в комплексной плоскости с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси и имеют две особых точки, которые являются простыми полюсами и характеризуются условиями $D_n(S) = 0$. Поэтому для поиска оригиналов выберем контур типа Ханкеля (рис. 1) и, используя теорему о вычетах, запишем

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(S)\exp(St)dS = \sum_{m=1}^{2}\operatorname*{res}_{S=S^{(m)}}\big(F(S)\exp(St)\big) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{BCDEFA} F(S)\exp(St)dS.$$

При вычислении последнего интеграла учтем, что интегралы вдоль контуров BC, FA равны нулю при стремлении радиусов данных окружностей к бесконечности. Интеграл вдоль контура DE так же равен нулю при стремлении радиуса окружности к нулю. При

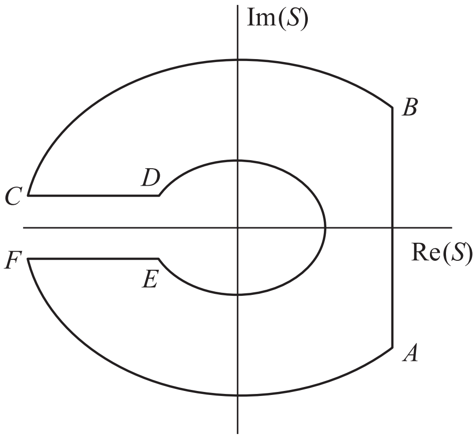

Рис. 1. Контур интегрирования.

вычислении интегралов вдоль прямых CD и EF их уравнение запишем в виде $S = -\tau^2$ и учтем что на верхнем берегу CD — $\sqrt{S} = i\tau$, а на нижнем EF — $\sqrt{S} = -i\tau$. Стягивая CD и EF к отрицательной части вещественной оси, окончательно найдем искомые временные зависимости:

$$\xi_n^{(1)}(t) = \sum_{m=1}^{2} a_{\xi 1}(S_n^{(m)})\exp(S_n^{(m)}t) + \int\limits_0^{+\infty} a_{\xi 2}(\tau)\exp(-\tau^2t)d\tau;$$

$$U_{rn}^{(1)}(r,t) = \sum_{m=1}^{2}\left(a_1(S_n^{(m)})\left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} + b_1(S_n^{(m)})\,\frac{1}{r}\,\frac{k_n(\eta r)}{k_n(\eta a)}\right)\times\exp(S_n^{(m)}t) + \int\limits_0^{+\infty}\left(a_2(\tau)\left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} + \frac{b_2^{(+)}(\tau)}{r}\,\lambda_n^{(+)}(r) - \frac{b_2^{(-)}(\tau)}{r}\,\lambda_n^{(-)}(r)\right)\exp(-\tau^2t)\,d\tau;$$

$$p_n^{(1)} = \sum_{m=1}^{2}\frac{\rho a S_n^{(m)}}{n+1}\,a_1(S_n^{(m)})\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}\exp(S_n^{(m)}t) - \int\limits_0^{\infty}\frac{\rho a\tau^2}{n+1}\,a_2(\tau)\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}\exp(-\tau^2t)d\tau;$$

$$a_{\xi 1}(S) = \left(S + 2(n+2)(2n+1)\,\frac{\nu}{a^2} - 4n(n+2)^2\,\frac{\sqrt{\nu^3}}{a^3\sqrt{S}}\,\alpha_n\chi_n\right)\times\frac{h_n}{\partial_S D_n(S)};$$

$$a_1(S) = -\left(1 + 2n(n+2)\,\frac{\nu}{a^2S}\,\chi_n\right)\frac{\omega_n^2h_n}{\partial_S D_n(S)};$$

$$b_1(S) = 2n(n+2)\,\frac{\nu}{aS}\,\chi_n\,\frac{\omega_n^2h_n}{\partial_S D_n(S)};$$

$$\lambda_n^{(\pm)}(r) \equiv \frac{k_n\left(\pm i r\tau\sqrt{\nu^{-1}}\right)}{k_n\left(\pm i a\tau\sqrt{\nu^{-1}}\right)};$$

$$\partial_S D_n(S) = 2S + 2(n+2)(2n+1)\,\frac{\nu}{a^2} + 2n(n+2)^2\,\frac{\nu}{a^2}$$

$$\times\left(1 - \frac{1}{\eta a}\,\alpha_n\left(2n+1+(4+\eta^2a^2)\,\frac{1}{\eta a}\,\alpha_n\right)\right)\chi_n^2;$$

$$\kappa_n^{(\pm)} \equiv \frac{k_{n-1}\left(\pm i a\tau\sqrt{\nu^{-1}}\right)}{k_n\left(\pm i a\tau\sqrt{\nu^{-1}}\right)};$$

$$a_{\xi 2}(\tau) = -\frac{4n(n+2)^2}{\Xi_n^{(+)}(\tau)\Xi_n^{(-)}(\tau)}\,\frac{h_n\nu^{3/2}\omega_n^2}{\pi a^3}\,(\kappa_n^{(+)} + \kappa_n^{(-)});$$

$$a_2(\tau) = \frac{4n(n+2)}{\tau^2\Xi_n^{(+)}(\tau)\Xi_n^{(-)}(\tau)}\,\frac{h_n\nu^{3/2}\omega_n^2}{a^3\pi}\Bigg((n+1)\tau^4$$

$$\times\left(1 - 2(n-1)(n+2)\,\frac{\nu}{a^2\tau^2}\right) - \omega_n^2\Bigg)(\kappa_n^{(+)} + \kappa_n^{(-)});$$

$$b_2^{(\pm)} = \frac{2n(n+2)\nu\omega_n^2}{a\pi i\tau\,\Xi_n^{(\pm)}(\tau)};$$

$$\Xi_n^{(\pm)}(\tau) = \left(\tau^4 + \omega_n^2 - 2(n+2)(2n+1)\,\frac{\tau^2\nu}{a^2}\right)$$

$$\times\left(1 \pm \frac{2\sqrt{\nu}}{ia\tau}\,\kappa_n^{(\pm)}\right) \pm 4n(n+2)^2\,\frac{\tau\nu^{3/2}}{ia^3}\,\kappa_n^{(\pm)}.$$

4. Рассмотрим асимптотику маловязкой жидкости. Если вязкость жидкости мала, то аргумент модифицированной сферической функции третьего рода будет большим и для нее можно использовать асимптотическое выражение

$$k_n(z) = \frac{\pi\exp(-z)}{2z}\Bigg(1 + \frac{n(n+1)}{2z} + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{8z^2}$$

$$+ O\left(\frac{1}{z^3}\right)\Bigg);\quad z \gg 1,$$

используя которое, найдем

$$\xi_n^{(1)}(S) = \frac{h_n}{D_n(S)}\left(S + 2(n+2)(2n+1)\,\frac{\nu}{a^2}\right) + o(\nu);$$

$$U_{rn}^{(1)}(r,S) = -\left(1 + 2n(n+2)\,\frac{\nu}{a^2S}\right)\left(\frac{a}{r}\right)^{n+2}\frac{\omega_n^2h_n}{D_n(S)}$$

$$+ 2n(n+2)\,\frac{\nu}{a^2S}\,\frac{\omega_n^2h_n}{D_n(S)}\,\frac{a}{r}\,\frac{k_n(\eta r)}{k_n(\eta a)} + o(\nu);$$

$$p_n^{(1)}(r,S) = -\frac{\rho a S}{n+1}\left(1 + 2n(n+2)\frac{\nu}{a^2S}\right)\frac{\omega_n^2h_n}{D_n(S)}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} + o(\nu);$$

$$D_n(S) = S^2 + \omega_n^2 + 2(n+2)(2n+1)\,\frac{S\nu}{a^2} + o(\nu).$$

При малой вязкости дисперсионное уравнение $D_n(S) = 0$ будет иметь два корня $S_n^{(1)} = -\nu\delta_n + i\omega_n$ и $S_n^{(2)} = -\nu\delta_n - i\omega_n$, где $\delta_n = (n+2)(2n+1)/a^2$. Функции же $\xi_n^{(1)}(t)$, $U_{rn}^{(1)}(r,t)$ и $p_n^{(1)}(r,t)$ примут простой вид

$$\xi_n^{(1)}(t) = h_n\left(\cos(\omega_nt) + \frac{\nu\delta_n}{\omega_n}\,\sin(\omega_nt)\right)\exp(-\nu\delta_nt);$$

$$U_{rn}^{(1)}(r,t) = -h_n\left(\frac{a}{r}\right)^{n+2}\left(\omega_n\sin(\omega_nt) - 2n(n+2)\frac{\nu}{a^2}\cos(\omega_nt)\right)$$

$$\times\exp(-\nu\delta_nt) - 2n(n+2)\,\frac{\nu h_n}{r^2}\cos\left(\frac{(a-r)\sqrt{\omega_n}}{\sqrt{2}\sqrt{\nu}} + \omega_nt\right)$$

$$\times\exp\left(-\nu\delta_nt + \frac{(a-r)\sqrt{\omega_n}}{\sqrt{2}\sqrt{\nu}}\right);$$

$$p_n^{(1)}(r,t) = -\frac{\rho a\omega_n^2h_n}{n+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}\Bigg(\cos(\omega_nt) - (n+2)$$

$$\times\frac{\nu}{a^2\omega_n}\sin(\omega_nt)\Bigg)\exp(-\nu\delta_nt). \tag{33}$$

Используя (33), несложно получить предельный переход к идеальной жидкости:

$$\xi_n^{(1)}(t) = h_n\cdot\cos(\omega_nt);$$

$$U_{rn}^{(1)}(r,t) = -h_n\cdot\left(\frac{a}{r}\right)^{n+2}\cdot\omega_n\cdot\sin(\omega_nt);$$

$$p_n^{(1)}(r,t) = -\frac{\rho a\omega_n^2h_n}{n+1}\cdot\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}\cdot\cos(\omega_nt).$$

5. Рассмотрим случай сильно вязкой жидкости. Если вязкость жидкости весьма велика, то аргумент сферической модифицированной функции Бесселя будет малым и можно использовать асимптотическое разложение

$$\frac{k_{n-1}(z)}{k_n(z)} = \frac{z}{2n-1} - \frac{z^3}{(2n-1)^2(2n-3)} + o(z^3),\quad z\to 0. \tag{34}$$

С учетом (34), выражения (32) можно записать в виде

$$\xi_n^{(1)}(S) = \frac{h_n}{D_n(S)}\Bigg(\frac{2(n+2)(2n^2+1)}{2n+1}\,\frac{\nu}{a^2}$$

$$+ \frac{3\big(2n(2n(n+1)+1)-1\big)}{(2n+1)^2(2n-3)}\,S + O\Big(\frac{1}{\nu}\Big)\Bigg);$$

$$U_{rn}^{(1)}(r,S) = -\frac{\omega_n^2h_n}{(2n+1)D_n(S)}\Bigg[\Bigg(2n(n+2)(2n-1)\,\frac{\nu}{a^2S}$$

$$+ \frac{8n^3-2n-3}{(2n+1)(2n-3)}\Bigg)\left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} - 2n(n+2)\frac{a}{r}$$

$$\times\left((2n-1)\,\frac{\nu}{a^2S} + \frac{2}{(2n+1)(2n-3)}\,\frac{k_n(\eta r)}{k_n(\eta a)}\right) + O\Big(\frac{1}{\nu}\Big)\Bigg];$$

$$p_n^{(1)}(r,S) = -\frac{\rho a\omega_n^2h_n}{(n+1)(2n+1)D_n(S)}\Bigg(2n(n+2)(2n-1)\,\frac{\nu}{a^2}$$

$$+ \frac{(8n^3-2n-3)}{(2n+1)(2n-3)}\,S + O\Big(\frac{1}{\nu}\Big)\Bigg)\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1};$$

$$D_n(S) = \frac{2(n+2)(2n^2+1)}{2n+1}\,\frac{S\nu}{a^2} + \frac{3\big(2n(2n(n+1)+1)-1\big)}{(2n+1)^2(2n-3)}\,S^2 + \omega_n^2 + O\Big(\frac{1}{\nu}\Big). \tag{35}$$

При большой вязкости в дисперсионном уравнении $D_n(S)=0$ можно пренебречь членом, пропорциональным S^2, и тогда оно будет иметь единственный корень $S=-\xi_n\omega_n^2a^2/\nu$, где $\xi_n=(2n+1)/\big(2(n+2)(2n^2+1)\big)$. В итоге для функций $\xi_n^{(1)}(t)$, $U_{rn}^{(1)}(r,t)$, $p_n^{(1)}(r,t)$ можно получить асимптотические выражения вида

$$\xi_n^{(1)}(t) = h_n \exp\left(-\frac{\xi_n\omega_n^2a^2}{\nu}\,t\right);$$

$$U_{rn}^{(1)}(r,t) = \frac{\nu h_n}{(2n+1)a^2}\Bigg[\bigg(2n(n+2)(2n-1) - \frac{8n^3-2n-3}{2(n+2)(2n-3)(2n^2+1)}\,\frac{\omega_n^2a^4}{\nu^2}\bigg)\Big(\frac{a}{r}\Big)^{n+2} - 2n\,\frac{a}{r}\bigg((2n-1)(n+2) - \frac{1}{(2n-3)(2n^2+1)}\,\frac{\omega_n^2a^4}{\nu^2} \times \mathrm{Re}\{\Gamma_n(r)\}\bigg)\Bigg]\exp\left(-\frac{\xi_n\omega_n^2a^2}{\nu}\,t\right);$$

$$\Gamma_n(r) \equiv \frac{k_n\big(ir\omega_n a\nu^{-1}\sqrt{\xi_n}\big)}{k_n\big(i\omega_n a^2\nu^{-1}\sqrt{\xi_n}\big)};$$

$$p_n^{(1)}(r,t) = -\frac{n(2n-1)a\rho\omega_n^2h_n}{(n+1)(2n^2+1)}\Big(\frac{a}{r}\Big)^{n+1}\exp\left(-\frac{\xi_n\omega_n^2a^2}{\nu}\,t\right). \tag{36}$$

6. Для удобства численного анализа выполним обезразмеривание, принимая $\sigma=1$, $\rho=1$, $r_0=1$. Тогда все физические величины задачи будут выражаться в своих характерных масштабах. Так масштабами длины, плотности, вязкости, времени, частоты, скорости и давления будут соответственно величины

$$r_0;\quad \rho;\quad \sqrt{\frac{\sigma r_0}{\rho}};\quad \sqrt{\frac{\rho r_0^3}{\sigma}};\quad \sqrt{\frac{\sigma}{\rho r_0^3}};\quad \sqrt{\frac{\sigma}{\rho r_0}};\quad \frac{\sigma}{r_0}.$$

В соответствии с данными экспериментов радиус устойчивых пузырьков в жидкости изменяется в пределах от $r_0=10^{-7}$ до $r_0=10^{-3}$ cm. Поверхностное натяжение и плотность жидкостей в среднем составляют $\sigma=50\,\mathrm{dyne/cm}$ и $\rho=1\,\mathrm{g/cm^3}$. При данных значениях характерный масштаб вязкости составит $2\cdot10^{-3}\,\mathrm{cm^2/s}$–$2\cdot10^{-1}\,\mathrm{cm^2/s}$, масштаб времени — $5\cdot10^{-12}\,\mathrm{s}$–$5\cdot10^{-6}\,\mathrm{s}$, масштаб частоты — $2\cdot10^{5}\,\mathrm{s^{-1}}$–$2\cdot10^{11}\,\mathrm{s^{-1}}$, масштаб скорости — $2\cdot10^{2}\,\mathrm{cm/s}$–$2\cdot10^{4}\,\mathrm{cm/s}$, масштаб давления — $5\cdot10^{4}\,\mathrm{dyne/cm}$–$5\cdot10^{8}\,\mathrm{dyne/cm}$.

Свободными параметрами задачи будут $p^{(0)}-p_V$, $p_g^{(0)}$, $W=Q^2/(4\pi\varepsilon_d)$, γ, ν, ε, Ω, h_n, h_0. Равновесное значение радиуса пузырька $r=a$ определяется из уравнения

$$p_V - p^{(0)} + p_g^{(0)}/a^{3\gamma} + W/(2a^4) - 2/a = 0. \tag{37}$$

При численном анализе радиальных движений поверхности пузырька выяснилось, что $\omega_0^2>0$ для таких значений физических параметров $p^{(0)}-p_V$, $p_g^{(0)}$, W, при которых уравнение (37) имеет одно решение a, а в ситуации дисперсионное уравнение имеет два корня $\omega_0^2>0$ для меньшего из корней. Для большего из корней всегда $\omega_0^2<0$. Следовательно, радиальные движения пузырька будут устойчивыми в той области параметров задачи, в которой уравнение (37) будет иметь одно решение и для меньшего из корней (37), когда имеются два решения. Пузырек, находящийся в равновесном состоянии, отвечающем большему корню уравнения (37), когда оно имеет два корня, неустойчив (см. выражения (13)). Увеличение вязкости жидкости, окружающей пузырек, приводит к увеличению декремента затухания для случая устойчивого равновесия пузырька и к уменьшению

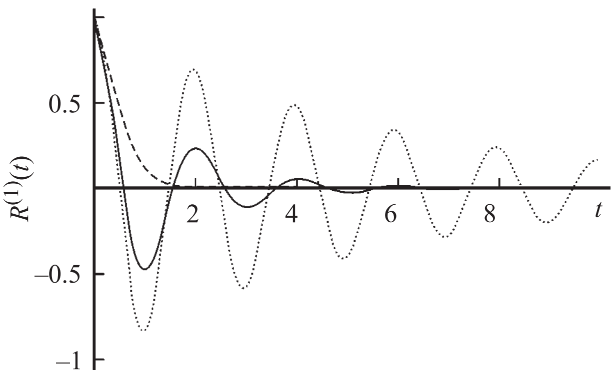

Рис. 2. Зависимость безразмерного радиуса $R^{(1)}(t)$ пульсирующего пузырька от безразмерного времени t, рассчитанная по (13), для различных значений вязкости жидкости: $\nu=0.05$ (точечная кривая), $\nu=0.2$ (сплошная кривая), $\nu=0.8$ (пунктирная кривая), при $p^{(0)}-p_V=-0.6$, $p_g^{(0)}=0.6$, $W=0.1$, $\gamma=4/3$, $h_0=1$. Значение a соответствует меньшему корню уравнения (37).

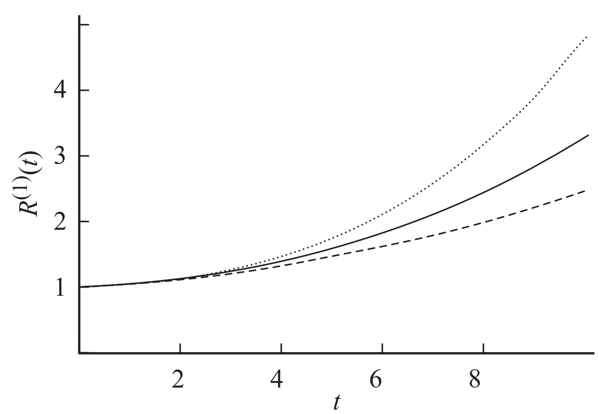

Рис. 3. Зависимость безразмерного радиуса $R^{(1)}(t)$ пульсирующего пузырька от безразмерного времени t, рассчитанная по (13), для различных значений вязкостей жидкости: $\nu=0.05$ (точечная кривая), $\nu=0.5$ (сплошная кривая), $\nu=1$ (пунктирная кривая) при $p^{(0)}-p_V=-0.6$, $p_g^{(0)}=0.6$, $W=0.1$, $\gamma=4/3$, $h_0=1$. Значение a соответствует большему корню уравнения (37).

инкремента неустойчивости в случае неустойчивого равновесия пузырька (рис. 2, 3).

При численном анализе точного дисперсионного соотношения $D_n(S) = 0$, описывающего поверхностные осцилляции пузырька при неизменном объеме, выяснилось, что при $W/a^3 < n+2$ оно имеет два комплексно сопряженных корня $S_n^{(1)}$ и $S_n^{(2)}$ с отрицательной вещественной частью, мнимая часть $\mathrm{Im}(S_n^{(2)}) = -\mathrm{Im}(S_n^{(1)})$ которых определяет частоту колебаний поверхности пузырька, а вещественная $\mathrm{Re}(S_n^{(1)}) = \mathrm{Re}(S_n^{(2)})$ — декремент затухания. Отметим, что увеличение вязкости жидкости, окружающей пузырек, приводит к уменьшению мнимой части корней $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}$, но не приводит к полному их исчезновению (рис. 4). Влияние вязкости жидкости на действительную часть данных корней является сложным (рис. 5). При $W/a^3 > n+2$ дисперсионное уравнение

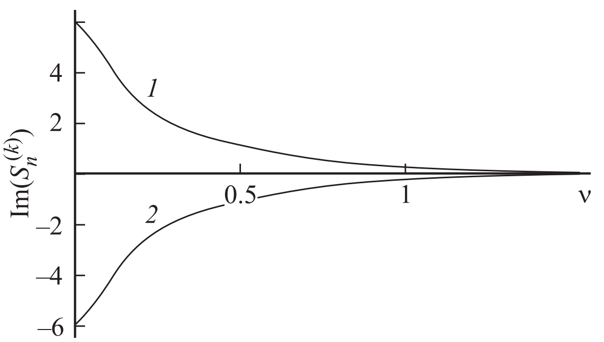

Рис. 4. Зависимости мнимых частей $\mathrm{Im}(S_n^{(k)})$ точного комплексного корня $S_n^{(k)}$ дисперсионного уравнения $D_n(S_n^{(k)}) = 0$, описывающего поверхностные осцилляции пузырька при постоянном его объеме, от безразмерной вязкости жидкости ν, рассчитанные для $p^{(0)} - p_V = 0.1$, $p_g^{(0)} = 0.6$, $W = 0.1$, $\gamma = 4/3$, $n = 2$. Номер у кривой совпадает с номером k.

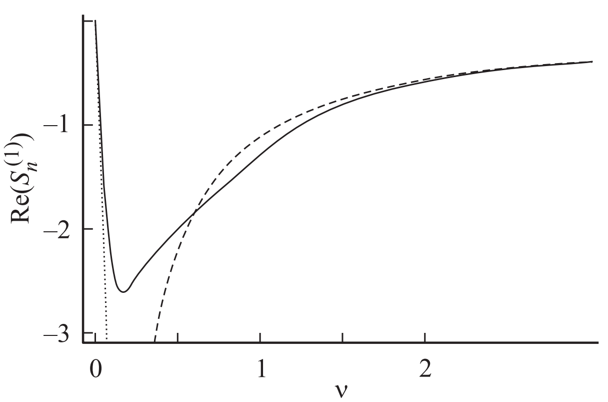

Рис. 5. Зависимость вещественной части $\mathrm{Re}(S_n^{(1)})$ комплексного корня $S_n^{(1)}$ дисперсионного уравнения поверхностных осцилляций пузырька $D_n(S_n^{(1)}) = 0$ от безразмерной вязкости жидкости ν, рассчитанная при $p^{(0)} - p_V = 0.1$, $p_g^{(0)} = 0.6$, $W = 0.1$, $\gamma = 4/3$, $n = 2$. Точечная кривая соответствует приближению маловязкой жидкости, сплошная — точному решению, пунктирная — приближению сильновязкой жидкости.

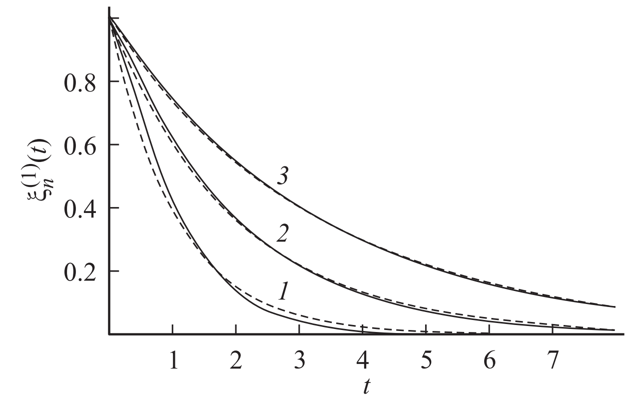

Рис. 6. Зависимости коэффициента $\xi_n^{(1)}(t)$, характеризующего искажение равновесной сферической формы пузырька, от безразмерного времени t, построенные при: $p^{(0)} - p_V = 0.6$, $p_g^{(0)} = 0.6$, $W = 0.5$, $\gamma = 4/3$, $n = 2$, $h_2 = 1$ и различных вязкостях жидкости $\nu = 0.8$ (кривая *1*), $\nu = 1.5$ (кривая *2*), $\nu = 2.5$ (кривая *3*). Сплошная кривая соответствует точному решению (32), пунктирная — приближению сильно вязкой жидкости (36).

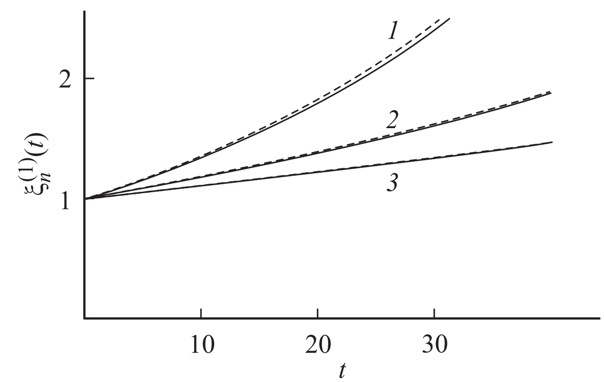

Рис. 7. Зависимости коэффициента $\xi_n^{(1)}(t)$ от безразмерного времени t, построенные при: $p^{(0)} - p_V = 0.8$, $p_g^{(0)} = 0.6$, $W = 3.5$, $\gamma = 4/3$, $n = 2$, $h_2 = 1$ и различных вязкостях жидкости $\nu = 0.8$ (кривая *1*), $\nu = 1.5$ (кривая *2*), $\nu = 2.5$ (кривая *3*). Сплошная кривая соответствует точному решению (32), пунктирная — приближению сильно вязкой жидкости (36).

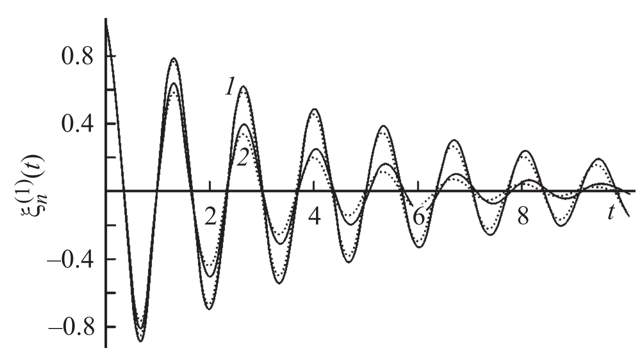

Рис. 8. Зависимости коэффициента $\xi_n^{(1)}(t)$ от безразмерного времени t, построенные при: $p^{(0)} - p_V = 0.6$, $p_g^{(0)} = 0.6$, $W = 0.5$, $\gamma = 4/3$, $n = 2$, $h_2 = 1$ и различных вязкостях жидкости $\nu = 0.005$ (кривая *1*), $\nu = 0.01$ (кривая *2*). Сплошная кривая соответствует точному решению (32), точечная — приближению маловязкой жидкости (33).

$D_n(S) = 0$ имеет один корень, который является вещественным и положительным, определяя инкремент неустойчивости поверхности пузырька.

Численные расчеты по выражению (32) хорошо согласуются с численными расчетами по асимптотическим выражениям (33) и (36), полученными в асимптотиках малой и большой вязкости, как это видно из рис. 6–8.

7. Заключение

Найденное решение задачи о расчете временной эволюции деформированного в начальный момент времени заряженного пузырька в диэлектрической жидкости в первом порядке малости по амплитуде начальной деформации делает актуальным поиск решений более высоких порядков малости, т.е. решения до сих пор не решенной задачи о расчете нелинейных осцилляций заряженного пузырька в вязкой диэлектрической жидкости. С ростом вязкости жидкости частоты радиальных пульсаций и поверхностных осцилляций монотонно снижаются. Декремент затухания радиальных пульсаций с ростом вязкости при любых ее значениях монотонно увеличивается по тому же закону, что и декремент затухания поверхностных осцилляций в асимптотике малой вязкости. Декремент затухания поверхностных осцилляций при увеличении вязкости сначала растет, но, достигнув некого максимального значения, начинает снижаться (т.е. проявляются те же тенденции, что у вязкой капли [17] или волн в вязкой жидкости [19]).

Работа выполнена при поддержке гранта президента РФ № МК-2946-2004-1 и гранта РФФИ № 03-01-00760.

Список литературы

[1] *Жаров А.Н., Ширяева С.О.* // ЭОМ. 1999. № 6. С. 9–22.
[2] *Aitken F., McGluskey F.M., Denat A.* // J. Fluid Mech. 1996. Vol. 327. P. 373–392.
[3] *Григорьев А.И., Жаров А.Н.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 4. С. 8–13.
[4] *Glinski M.E.* // Physics of Fluids. 2001. Vol. 13. N 1. P. 20–31.
[5] *Жаров А.Н., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 11. С. 12–20.
[6] *Васильев А.П.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 1. С. 35–41.
[7] *Bekshaev A.Ya., Kontush S.M., Rybak S.S.* et al. // J. Aerosol Sci. 2003. Vol. 34. P. 469–484.
[8] *Жаров А.Н., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 11. С. 13–21.
[9] *Максимов А.О.* // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. Вып. 7. С. 7–13.
[10] *Benjamin T.B., Ellis A.T.* // J. Fluid Mech. 1990. Vol. 212. P. 65–80.
[11] *Ffowcs-Williams J.E., Guo Y.P.* // J. Fluid Mech. 1991. Vol. 224. P. 507–529.
[12] *Longet-Higgins M.S.* // J. Fluid. Mech. 1991. Vol. 224. P. 531–549.
[13] *Mei Ch.C., Zhou X.* // J. Fluid Mech. 1991. Vol. 229. P. 29–50.
[14] *Feng Z.C., Leal L.G.* // Phys. Fluids. 1995. Vol. 7. N 6. P. 1325–1336.
[15] *Feng Z.C.* // J. Fluid Mech. 1997. Vol. 333. P. 1–21.
[16] *Doinikov A.A.* // J. Fluid Mech. 2004. Vol. 501. P. 1–24.
[17] *Жаров А.Н., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 1. С. 22–31.
[18] *Жаров А.Н., Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 7. С. 19–28.
[19] *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1959. 699 с.