

01;03

Нелинейные периодические волны на заряженной поверхности слоя идеальной жидкости конечной толщины

© С.А. Курочкина, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 17 февраля 2005 г.)

В асимптотических расчетах четвертого порядка малости по амплитуде периодической бегущей капиллярно-гравитационной волны на однородно заряженной свободной поверхности идеальной несжимаемой электропроводной жидкости конечной глубины найдено аналитическое выражение для временной зависимости профиля нелинейной волны, потенциала поля скоростей волнового течения жидкости, потенциала электростатического поля над жидкостью и нелинейная поправка к частоте, квадратичная по малому параметру. Выяснилось, что вид зависимости амплитуды нелинейной поправки к частоте от поверхностной плотности заряда на свободной поверхности жидкости и толщины ее слоя при переходе от толстых слоев жидкости к тонким качественно изменяется. В тонких слоях жидкости появляется зависимость резонансного значения волнового числа от величины поверхностной плотности электрического заряда, тогда как в толстых слоях жидкости величина резонансного значения волнового числа от поверхностной плотности заряда не зависит.

1. Изучение нелинейных волн на заряженной поверхности несжимаемой жидкости представляет значительный интерес в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями феномена (см., например, обзоры [1–4]). Особенно часто с обсуждаемым феноменом приходится сталкиваться в ситуации, когда глубина слоя жидкости конечна [1–4]. В этой связи встает вопрос о влиянии толщины слоя жидкости на закономерности реализации волнового движения и реализации неустойчивости ее заряженной поверхности. Эта тема неоднократно рассматривалась в научной литературе, но либо в линейной постановке [5], либо в нелинейной, но без заряда на поверхности жидкости [6,7], либо в солитонной постановке [8–10]. Достаточно много аналитических исследований посвящено исследованию нелинейных периодических капиллярно-гравитационных волн на заряженной поверхности бесконечно глубокой идеальной жидкости [11–19]. Сама проблема аналитического исследования нелинейных периодических волн на свободной поверхности жидкости сформулирована давно и разработано несколько различных регулярных асимптотических методов ее исследования [20–23], но среди них наибольшей эффективностью выделяется метод многих масштабов. Этот метод и будет использован ниже в исследовании, целью которого является определение аналитического выражения для профиля нелинейной бегущей капиллярно-гравитационной волны на заряженной свободной поверхности слоя идеальной электропроводной жидкости конечной глубины в четвертом порядке малости по амплитуде, которую будем считать малой по сравнению с длиной волны (расчет в том же порядке малости потенциала поля скоростей волнового течения жидкости и потенциала электростатического поля над жидкостью), а также отыскание нелинейной поправки к частоте.

Проводимое исследование актуально и в связи с тем, что в последние годы начались аналитические исследования нелинейных периодических волн на заряженной поверхности вязкой жидкости как бесконечно глубокой [24,25], так и в слоях конечной толщины [4,26]. Однако полученные в указанных работах аналитические решения весьма громоздки даже во втором порядке малости, и исследование конкретных зависимостей между физическими характеристиками нелинейной волны приходится проводить на основе численного анализа полученных громоздких аналитических выражений. Поэтому многие представляющие интерес физические зависимости нелинейного волнового процесса на заряженной поверхности жидкости, в частности нелинейные поправки к частотам волн, удобнее анализировать на модели идеальной жидкости, в которой аналитические выражения конечных результатов вполне компактны даже в расчетах до пятого порядка малости [19].

2. Пусть идеальная несжимаемая электропроводная жидкость плотностью ρ , с коэффициентом поверхностного натяжения σ заполняет в поле сил тяжести бесконечный в горизонтальном направлении слой $0 \leq z \leq h$ в декартовой системе координат, орг \mathbf{e}_z которой направлен противоположно ускорению силы тяжести \mathbf{g} . Примем, что по поверхности слоя жидкости, находящейся в электростатическом поле напряженностью \mathbf{E}_0 , коллинеарном \mathbf{g} , в положительном направлении оси Ox распространяется плоская бегущая волна малой амплитуды a с волновым числом k и частотой ω

$$t = 0: \quad \xi(x, t) = a \cos(kx - \omega t); \quad ka \ll 1, \quad (1)$$

возмущающая равновесную свободную поверхность жидкости $z = h$, так что ее уравнение принимает вид $z = h + \xi(x, t)$.

Математическая формулировка задачи о расчете нелинейного волнового движения на поверхности слоя идеальной, несжимаемой, электропроводной жидкости конечной глубины, граничащей с вакуумом, в перпендикулярном свободной поверхности жидкости электростатическом поле напряженностью E_0 имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 0 < z < h + \xi : \quad \Delta\phi &= 0, \\
 \xi < z < \infty : \quad \Delta\Phi &= 0, \\
 z = h + \xi : \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \phi}{\partial z}, \\
 \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + \rho g \xi + P_\sigma + P_g - P_E &= 0, \\
 \Phi &= 0, \\
 z = 0 : \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0, \\
 z \rightarrow \infty : \quad \Phi &\rightarrow E_0 z, \\
 P_\sigma \equiv \sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 1 \right)^{-3/2} \\
 P_E \equiv \frac{E^2(\xi)}{8\pi}, \quad P_g \equiv \rho g(h + \xi). & \quad (2)
 \end{aligned}$$

P_σ , P_E и P_g — давление сил поверхностного натяжения под искривленной волновым движением свободной поверхности жидкости, давление сил электрического поля и гравитационное давление.

В сформулированной задаче принято, что гидродинамические скорости на много порядков меньше скорости распространения электромагнитных волн и в этом приближении система уравнений Максвелла для отыскания изменяющегося во времени электрического поля над изменяющейся во времени свободной поверхностью жидкости сводится к уравнению Лапласа с соответствующими граничными условиями для определения потенциала электростатического поля над жидкостью, поскольку скорость выравнивания электрического потенциала поверхности идеально проводящей жидкости при ее деформировании волной можно принимать бесконечно большой.

Для однозначной разрешимости задачи (1), (2) необходимо сформулировать еще одно начальное условие. В подобных задачах полностью определенные заранее начальные условия могут привести к неоправданной громоздкости решения. Поэтому, как это принято в задачах подобного типа [11–14, 17–26], второе начальное условие будем выбирать по ходу решения таким образом, чтобы результирующие выражения для возмущения свободной поверхности $\xi(x, t)$, потенциалов поля скоростей волнового течения жидкости $\phi(\mathbf{r}, t)$ и электрического поля $\Phi(\mathbf{r}, t)$ имели наиболее простой вид.

3. Разобьем сформулированную задачу по порядкам малости, полагая, что неизвестными функциями являются возмущение свободной поверхности $\xi = \xi(x, t)$, потенциал поля скоростей течения жидкости $\phi = \phi(x, z, t)$ и электрический потенциал $\Phi = \Phi(x, z, t)$. Искать их будем в виде разложений по малому безразмерному параметру $\varepsilon \equiv a \cdot k$

$$\begin{aligned}
 \xi &= \varepsilon \xi_1 + \varepsilon^2 \xi_2 + \varepsilon^3 \xi_3 + \varepsilon^4 \xi_4 + O(\varepsilon^5), \\
 \phi &= \varepsilon \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2 + \varepsilon^3 \phi_3 + \varepsilon^4 \phi_4 + O(\varepsilon^5), \\
 \Phi &= -E_0 z + \varepsilon \Phi_1 + \varepsilon^2 \Phi_2 + \varepsilon^3 \Phi_3 + \varepsilon^4 \Phi_4 + O(\varepsilon^5). \quad (3)
 \end{aligned}$$

В соответствии с основной идеей метода многих масштабов [6, 22, 23] будем полагать, что искомые функции $\xi_n(x, t)$, $\phi_n(x, z, t)$ и $\Phi_n(x, z, t)$, кроме координат x и z , зависят от разных временных масштабов: от основного $T_0 = t$ и более медленных $T_1 = \varepsilon \cdot t$, $T_2 = \varepsilon^2 \cdot t$, $T_3 = \varepsilon^3 \cdot t$

$$\begin{aligned}
 \xi_n &= \xi_n(x, T_0, T_1, T_2, T_3); \quad \phi_n = \phi_n(x, z, T_0, T_1, T_2, T_3); \\
 \Phi_n &= \Phi_n(x, z, T_0, T_1, T_2, T_3).
 \end{aligned}$$

Тогда на основе правила дифференцирования сложной функции оператор взятия частной производной по времени $\partial/\partial t$ примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial T_3} + O(\varepsilon^4). \quad (4)$$

Подставляя (3), (4) в задачу (1), (2) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε и приравнявая их к нулю, получим задачи нулевого, первого, второго, третьего и четвертого порядков малости.

4. В нулевом порядке малости свободная поверхность жидкости находится в невозмущенном состоянии и описывается уравнением $z = h$, жидкость покоится, а электрическое поле однородно во всем пространстве

$$\nabla\phi_0 \equiv 0, \quad P_E = -\frac{E_0^2}{8\pi}, \quad \nabla\Phi_0 \equiv -E_0 \cdot \mathbf{e}_z.$$

5. Математическая формулировка задачи первого порядка малости имеет вид

$$\begin{aligned}
 0 < z < h : \quad \Delta\phi_1 &= 0, \\
 h < z < \infty : \quad \Delta\Phi_1 &= 0, \\
 z = h : \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial T_0} - \frac{\partial \phi_1}{\partial z} &= 0, \\
 \rho \frac{\partial \phi_1}{\partial T_0} + \rho g \xi_1 - \sigma \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} + \frac{E_0}{4\pi} \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} &= 0, \\
 \xi_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} + \Phi_1 &= 0, \\
 z = 0 : \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial z} &= 0, \\
 z \rightarrow \infty : \quad \Phi_1 &\rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Решение задачи первого порядка малости легко получается классическими методами в виде

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{1}{2}(\xi \exp(i\theta) + \bar{\xi} \exp(-i\theta)), \quad \theta \equiv kx - \omega T_0, \\ \phi_1 &= \frac{i\omega \operatorname{ch}(kz)}{2k \operatorname{sh}(kh)} \cdot (-\xi \exp(i\theta) + \bar{\xi} \exp(-i\theta)), \\ \Phi_1 &= \frac{E_0}{2} \exp(k(h-z)) \cdot (\xi \exp(i\theta) + \bar{\xi} \exp(-i\theta)), \\ \omega^2 &= \frac{k}{\rho} \operatorname{th}(kh) \left(\rho g + \sigma k^2 - \frac{E_0^2 k}{4\pi} \right),\end{aligned}\quad (5)$$

ω — частота; $\xi = \xi(T_1, T_2, T_3)$ — неизвестная комплексная функция времени, которая определяется из решения задач более высоких порядков малости; горизонтальная черта здесь и далее обозначает операцию комплексного сопряжения.

6. Математическая формулировка задачи второго порядка малости имеет вид

$$\begin{aligned}0 < z < h: \quad \Delta\phi_2 &= 0, \\ h < z < \infty: \quad \Delta\Phi_2 &= 0, \\ z = h: \quad -\frac{\partial \xi_2}{\partial T_0} + \frac{\partial \phi_2}{\partial z} &= \frac{\partial \xi_1}{\partial T_1} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} - \xi_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2}, \\ -\rho \frac{\partial \phi_2}{\partial T_0} + \rho g \xi_2 + \sigma \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2} - \frac{E_0}{4\pi} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} &= \rho \frac{\partial \phi_1}{\partial T_1} + \rho \xi_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial T_0 \partial z} + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right)^2 \\ &- \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2 + \xi_1 \frac{E_0}{4\pi} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2}, \\ \xi_2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} + \Phi_2 &= -\xi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}, \\ z = 0: \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial z} &= 0, \\ z \rightarrow \infty: \quad \Phi_2 &\rightarrow 0.\end{aligned}$$

Подставляя в функции неоднородностей решения задачи первого порядка малости (5), можно получить решение задачи второго порядка малости

$$\begin{aligned}\xi_2 &= \frac{\omega^2}{4g} (1 - (\operatorname{cth}(kh))^2) \xi \bar{\xi} \\ &+ \Omega (\xi^2 \exp(2i\theta) + \bar{\xi}^2 \exp(-2i\theta)), \\ \phi_2 &= \frac{i\omega \operatorname{ch}(2kz)}{k \operatorname{sh}(2kh)} \left(\frac{k}{4} \operatorname{cth}(kh) - \Omega \right) \\ &\times (\xi^2 \exp(2i\theta) - \bar{\xi}^2 \exp(-2i\theta)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \left(\frac{E_0 \omega^2}{4g} ((\operatorname{cth}(kh))^2 - 1) + \frac{E_0 k}{2} \right) \xi \bar{\xi} \\ &+ E_0 \exp(2k(h-z)) \left(\frac{k}{4} + \Omega \right) \\ &\times (\xi^2 \exp(2i\theta) + \bar{\xi}^2 \exp(-2i\theta)).\end{aligned}\quad (6)$$

Коэффициент Ω , входящий в полученное решение, будет определен ниже.

При отыскании решения второго порядка малости (6) мы использовали второе начальное условие в виде требования обращения в нуль амплитудного коэффициента при нелинейной поправке к решению первого порядка, имеющей тот же, что и у линейного решения (а не удвоенный), аргумент косинуса.

7. В третьем порядке малости получим задачу

$$\begin{aligned}0 < z < h: \quad \Delta\phi_3 &= 0, \\ h < z < \infty: \quad \Delta\Phi_3 &= 0, \\ z = h: \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial T_0} - \frac{\partial \phi_3}{\partial z} &= -\frac{\partial \xi_2}{\partial T_1} - \frac{\partial \xi_1}{\partial T_2} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \\ &- \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} - \xi_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial z} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \\ &+ \xi_2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} + \xi_1 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \xi_1^2 \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial z^3}, \\ -\rho \frac{\partial \phi_3}{\partial T_0} - \rho g \xi_3 + \sigma \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x^2} - \frac{E_0}{4\pi} \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} &= \rho \frac{\partial \phi_1}{\partial T_2} + \rho \frac{\partial \phi_2}{\partial T_1} + \rho \xi_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial T_1 \partial z} + \rho \xi_1 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial T_0 \partial z} \\ &+ \rho \xi_2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial T_0 \partial z} + \frac{1}{2} \rho \xi_1^2 \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial T_0 \partial z^2} + \rho \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \\ &+ \rho \xi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial z} + \rho \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \frac{\partial \phi_2}{\partial z} + \rho \xi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} \\ &+ \frac{3}{2} \sigma \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - \frac{1}{4\pi} \xi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial z} \\ &- \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - \frac{1}{4\pi} \xi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} + \frac{E_0}{4\pi} \xi_1 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} \\ &+ \frac{E_0}{4\pi} \xi_2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} + \frac{E_0}{8\pi} \xi_1^2 \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial z^3}, \\ \Phi_3 - E_0 \xi_3 &= -\xi_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - \xi_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} - \frac{1}{2} \xi_1^2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2}, \\ z = 0: \quad \frac{\partial \phi_3}{\partial z} &= 0, \\ z \rightarrow \infty: \quad \Phi_3 &\rightarrow 0.\end{aligned}$$

Подставляя в функции неоднородностей решения задач первого и второго порядков малости (5), (6), можно отыскать решение задачи третьего порядка малости

после математически несложной, но громоздкой процедуры

$$\begin{aligned} \xi_3 &= \Psi(\xi^3 \exp(3i\theta) + \bar{\xi}^3 \exp(-3i\theta)), \\ \phi_3 &= -\frac{\text{ch}(kz)}{2k \text{sh}(kh)} \left(\Lambda_2 - \frac{1}{2} i\Theta \right) \xi \bar{\xi} (\xi \exp(i\theta) - \bar{\xi} \exp(-i\theta)) \\ &\quad - \frac{(3i\omega\Psi + \Lambda_1) \text{ch}(3kz)}{3k \text{sh}(3kh)} (\xi^3 \exp(3i\theta) - \bar{\xi}^3 \exp(-3i\theta)), \\ \Phi_3 &= \Xi_2 \xi \bar{\xi} \exp(k(h-z)) (\xi \exp(i\theta) + \bar{\xi} \exp(-i\theta)) \\ &\quad + \exp(3k(h-z))(E_0\Psi + \Xi_1) \\ &\quad \times (\xi^3 \exp(3i\theta) + \bar{\xi}^3 \exp(-3i\theta)). \end{aligned} \quad (7)$$

В задаче третьего порядка малости как результат ее решения также получена зависимость функции ξ от временных масштабов T_2, T_3

$$\xi = \xi_1(T_3) \exp(i\beta_0(T_3)) \exp(i\Theta \xi_1^2 T_2). \quad (8)$$

В выписанных выражениях $\Psi, \Lambda_1, \Lambda_2, \Xi_1, \Xi_2, \Theta$ — коэффициенты, вид которых будет определен ниже. Функции ξ_1 и β_0 , зависящие только T_3 , определяются из решения задачи четвертого порядка малости.

8. Математическая формулировка задачи четвертого порядка малости имеет вид

$$\begin{aligned} 0 < z < h: \quad \Delta\phi_4 &= 0, \\ h < z < \infty: \quad \Delta\Phi_4 &= 0, \\ z = h: \quad -\frac{\partial \xi_4}{\partial T_0} + \frac{\partial \phi_4}{\partial z} &= H_{41}, \\ -\rho \frac{\partial \phi_4}{\partial T_0} - \rho g \xi_4 + \sigma \frac{\partial^2 \xi_4}{\partial x^2} - \frac{E_0}{4\pi} \frac{\partial \Phi_4}{\partial z} &= H_{42}, \\ E_0 \xi_4 - \Phi_4 &= H_{43}, \\ z = 0: \quad \frac{\partial \phi_4}{\partial z} &= 0, \\ z \rightarrow \infty: \quad \Phi_4 &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

где выражения для функций неоднородностей H_{41}, H_{42}, H_{43} , определяющихся через решения первого, второго и третьего порядков малости (5)–(8) и имеющих громоздкий вид приведены в Приложении.

Результат решения задачи четвертого порядка малости при принятом начальном условии имеет вид

$$\xi_4 = \phi_4 = \Phi_4 = 0, \quad \xi_1 = 1/k, \quad \beta_0 = 0.$$

Это означает, что в решении всей задачи будут отсутствовать добавки четвертого порядка малости к возмущению свободной поверхности слоя жидкости, а также к гидродинамическому и электростатическому потенциалам.

9. Окончательное решение задачи о расчете нелинейного капиллярно-гравитационного периодического волнового движения в электропроводной несжимаемой

идеальной жидкости с однородно распределенным по равновесной свободной поверхности жидкости электрическим зарядом (1), (2), а именно выражения для возмущения свободной поверхности $\xi(x, t)$, потенциалов поля скоростей $\phi(x, z, t)$ и электрического поля $\Phi(x, z, t)$, выпишем в безразмерных переменных, в которых $\rho = \sigma = g = 1$. В таких переменных характерные масштабы размерных величин записываются как

$$\begin{aligned} \omega_* &= \left[\frac{\rho g^3}{\sigma} \right]^{1/4}, \quad k_* = \left[\frac{\rho g}{\sigma} \right]^{1/2}, \quad h_* = \left[\frac{\sigma}{\rho g} \right]^{1/4}, \\ E_0 &= (\rho \sigma g)^{1/4}, \quad a_* = \left[\frac{\sigma}{\rho g} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Найденное решение в безразмерной форме, если за всеми безразмерными величинами сохранить прежние обозначения, имеет вид

$$\begin{aligned} \xi &= a \cos(\theta + a^2\Theta t) + a^2 \frac{\omega^2}{4} (1 - (\text{cth}(kh))^2) \\ &\quad + 2a^2\Omega \cos(2\theta + 2a^2\Theta t) + 2a^3\Psi \cos(3\theta), \\ \phi &= \frac{a\omega}{k} \frac{\text{ch}(kz)}{\text{sh}(kh)} \sin(\theta + a^2\Theta t) \\ &\quad + a^2 \frac{\omega}{k} \frac{\text{ch}(2kz)}{\text{sh}(2kh)} \left(-\frac{k}{4} \text{cth}(kh) + \Omega \right) \sin(2\theta + 2a^2\Theta t) \\ &\quad - a^3 \frac{\text{ch}(kz)}{k \text{sh}(kh)} \left(i\Lambda_2 + \frac{1}{2} \Theta \right) \sin(\theta) \\ &\quad - a^3 \frac{2(-3\omega\Psi + i\Lambda_1) \text{ch}(3kz)}{3k \text{sh}(3kh)} \sin(3\theta), \\ \Phi &= -\sqrt{4\pi W} z + a\sqrt{4\pi W} \exp(k(h-z)) \cos(\theta + a^2\Theta t) \\ &\quad + a^2 \left(\frac{\omega^2 \sqrt{\pi W}}{2} ((\text{cth}(kh))^2 - 1) + k\sqrt{\pi W} \right) \\ &\quad + 4a^2 \sqrt{\pi W} \exp(2k(h-z)) \left(\frac{k}{4} + \Omega \right) \cos(2\theta + 2a^2\Theta t) \\ &\quad + 2a^3 \Xi_2 \exp(k(h-z)) \cos(3\theta) \\ &\quad + 2a^3 \exp(3k(h-z)) \left(\sqrt{4\pi W} \Psi + \Xi_1 \right) \cos(3\theta), \end{aligned} \quad (9)$$

где частота ω определяется из дисперсионного уравнения

$$\omega^2 = (k + k^3 - Wk^2) \text{th}(kh), \quad W = E_0^2/4\pi\sqrt{\rho g \sigma},$$

W — безразмерный параметр Тонкса–Френкеля, характеризующий устойчивость свободной поверхности жидкости по отношению к поверхностному заряду.

Постоянные коэффициенты, входящие в решение задачи, после обезразмеривания примут вид

$$\Omega = \frac{-4Wk^2 \text{th}(2kh) + 2k \text{th}(kh)(1 + k^2 - Wk)H(kh)}{32 \text{th}(kh)(1 + k^2 - Wk) - 16 \text{th}(2kh)(1 + 4k^2 - 2Wk)},$$

$$\begin{aligned}
H(kh) &\equiv -3 \operatorname{th}(2kh) + (\operatorname{cth}(kh))^2 \operatorname{th}(2kh) + 4 \operatorname{cth}(kh), \\
\Lambda_1 &= \frac{3}{4} i\omega k^2 \operatorname{cth}(2kh) \operatorname{cth}(kh) - 3i\omega k \Omega \operatorname{cth}(2kh) \\
&\quad - i\omega k \Omega \operatorname{cth}(kh) - \frac{1}{8} i\omega k^2 \\
&\quad - \frac{1}{2} i\omega k \Omega - \frac{1}{16} i\omega k^2 \operatorname{cth}(kh), \\
\Lambda_2 &= \frac{1}{4} i\omega k^2 \operatorname{cth}(2kh) \operatorname{cth}(kh) - i\omega k \Omega \operatorname{cth}(2kh) \\
&\quad - i\omega k \Omega \operatorname{cth}(kh) - \frac{1}{8} i\omega k^2 - \frac{1}{8} i\omega^3 k \operatorname{cth}(kh) \\
&\quad + \frac{1}{8} i\omega^3 k (\operatorname{cth}(kh))^3 + \frac{1}{2} i\omega k \Omega - \frac{1}{16} i\omega k^2 \operatorname{cth}(kh), \quad (10)
\end{aligned}$$

$$\Xi_1 = \frac{3}{2} k \sqrt{\pi W} \left(\frac{k}{8} + \Omega \right),$$

$$\Xi_2 = k \sqrt{\pi W} \left(\frac{k}{8} + 3\Omega + \frac{\omega^2}{4} (1 - (\operatorname{cth}(kh))^2) \right),$$

$$\begin{aligned}
\Psi &= \left(\omega^2 k \operatorname{cth}(3kh) (-3k \operatorname{cth}(2kh) \operatorname{cth}(kh)) \right. \\
&\quad + 12\Omega \operatorname{cth}(2kh) + 4\Omega \operatorname{cth}(kh) + \frac{k}{2} + 2\Omega \\
&\quad + \frac{k}{4} \operatorname{cth}(kh) - 18Wk^3 \left(\frac{k}{8} + \Omega \right) \\
&\quad + \frac{11}{4} \omega^2 k \operatorname{cth}(kh) - 14k\omega\Omega + \frac{3k^5}{4} + \frac{7Wk^4}{4} \\
&\quad + 10Wk^3\Omega + 4\omega^2 k \Omega \operatorname{cth}(2kh) \operatorname{cth}(kh) \\
&\quad \left. - \omega^4 k^2 (\operatorname{cth}(kh))^2 \operatorname{cth}(2kh) \right) / \left(12\omega^2 \operatorname{cth}(3kh) \right. \\
&\quad \left. - 4k - 36k^3 + 12Wk^2 \right), \quad (11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta &= \omega k \operatorname{cth}(kh) \left(\frac{k}{4} \operatorname{cth}(2kh) \operatorname{cth}(kh) - \Omega \operatorname{cth}(2kh) \right. \\
&\quad \left. - \Omega \operatorname{cth}(kh) - \frac{\Omega}{8} - \frac{\omega^2}{8} \operatorname{cth}(kh) - \frac{k}{16} \operatorname{cth}(kh) \right) \\
&\quad + \frac{Wk^3}{2\omega} \left(\frac{k}{8} + 3\Omega \right) + \frac{Wk^3\omega}{8} (1 - (\operatorname{cth}(kh))^2) \\
&\quad + k\omega \left(\frac{k}{4} \operatorname{cth}(kh) - \Omega \right) \operatorname{cth}(2kh) \operatorname{cth}(kh) \\
&\quad - \frac{\omega k}{8} (\omega^2 - Wk^2) ((\operatorname{cth}(kh))^2 - 1) + \frac{3k^5}{16\omega} \\
&\quad - \frac{Wk^3\Omega}{2\omega} + \frac{5Wk^4}{16\omega} + \frac{9\omega k^2}{16} \operatorname{cth}(kh) - \frac{3\Omega k}{2}. \quad (12)
\end{aligned}$$

10. Полученное выражение для профиля нелинейной волны в пределе $h \rightarrow \infty$ совпадает с решением для

бесконечно глубокой жидкости [19], а при $W \rightarrow 0$ переходит в известное выражение для профиля нелинейной капиллярно-гравитационной волны на незаряженной поверхности слоя идеальной жидкости конечной толщины [6]. В [6,19] показано, что амплитудные коэффициенты поправок второго и третьего порядков малости к возмущению свободной поверхности имеют резонансный вид как для бесконечно глубокой жидкости, так и в слое конечной толщины. Для случая бесконечно глубокой жидкости амплитудный коэффициент поправки второго порядка малости резонансно нарастает при $k^2 \rightarrow 1/2$, а амплитудный коэффициент поправки третьего порядка имеет два резонанса при $k^2 \rightarrow 1/2$ и $k^2 \rightarrow 1/3$. Несмотря на то что выражение (9) для $\xi(x, t)$ применимо в широком диапазоне волновых чисел, амплитудные множители Ω и Ψ (см (10) и (11)) неограниченно нарастают в малых окрестностях положений резонансов, когда

$$\begin{aligned}
n \operatorname{th}(kh)(1 + k^2 - Wk) \\
- \operatorname{th}(nkh)(1 + n^2 k^2 - nWk) = 0. \quad (13)
\end{aligned}$$

Ω имеет резонанс при $n = 2$, а Ψ — два резонанса при $n = 2$ и 3 . Это означает, что применимость выражения (9) ограничена в малых окрестностях волновых чисел k , определяемых из уравнения (13), так как нелинейные поправки должны быть малыми по сравнению с величинами первого порядка малости. Из рис. 1, *a-d* видно, что положения внутренних нелинейных резонансов, связанных с нелинейным взаимодействием гравитационных и капиллярных волн, существенно зависят от толщины слоя жидкости и величины поверхностной плотности заряда (параметра W), причем влияние поверхностного заряда усиливается с уменьшением толщины слоя жидкости. В тонких слоях жидкости ($kh \leq 1$) положения внутренних нелинейных резонансов (значений волнового числа k , при которых амплитудный множитель квадратичной по малому параметру поправки к профилю волны Ω неограниченно растет) зависят от величины параметра Тонкса-Френкеля W . В толстых ($kh \gg 1$) слоях жидкости (рис. 1, *c, d*) положение внутреннего нелинейного резонанса квадратичной поправки Ω фиксировано и не зависит от W . Качественно сходно ведут себя и положения внутренних нелинейных резонансов в амплитудном множителе поправки третьего порядка малости Ψ , только величина Ψ в зависимости от волнового числа k , параметра W и толщины слоя жидкости h меняется еще более существенно. Из рис. 1, *a, b* также видно, что при изменении волнового числа положения внутренних нелинейных резонансов смещаются в различные стороны при $W < 1$ и $W > 1$. В указанных диапазоне изменения параметра Тонкса-Френкеля W качественно различным образом изменяется и величина коэффициента Ω при изменении величины волнового числа k (подробнее об особенностях волнового движения жидкости в указанных диапазонах изменения параметра W см. [17,19]).

11. Согласно выражению (9), профиль волны не является стационарным, это объясняется наличием в (9)

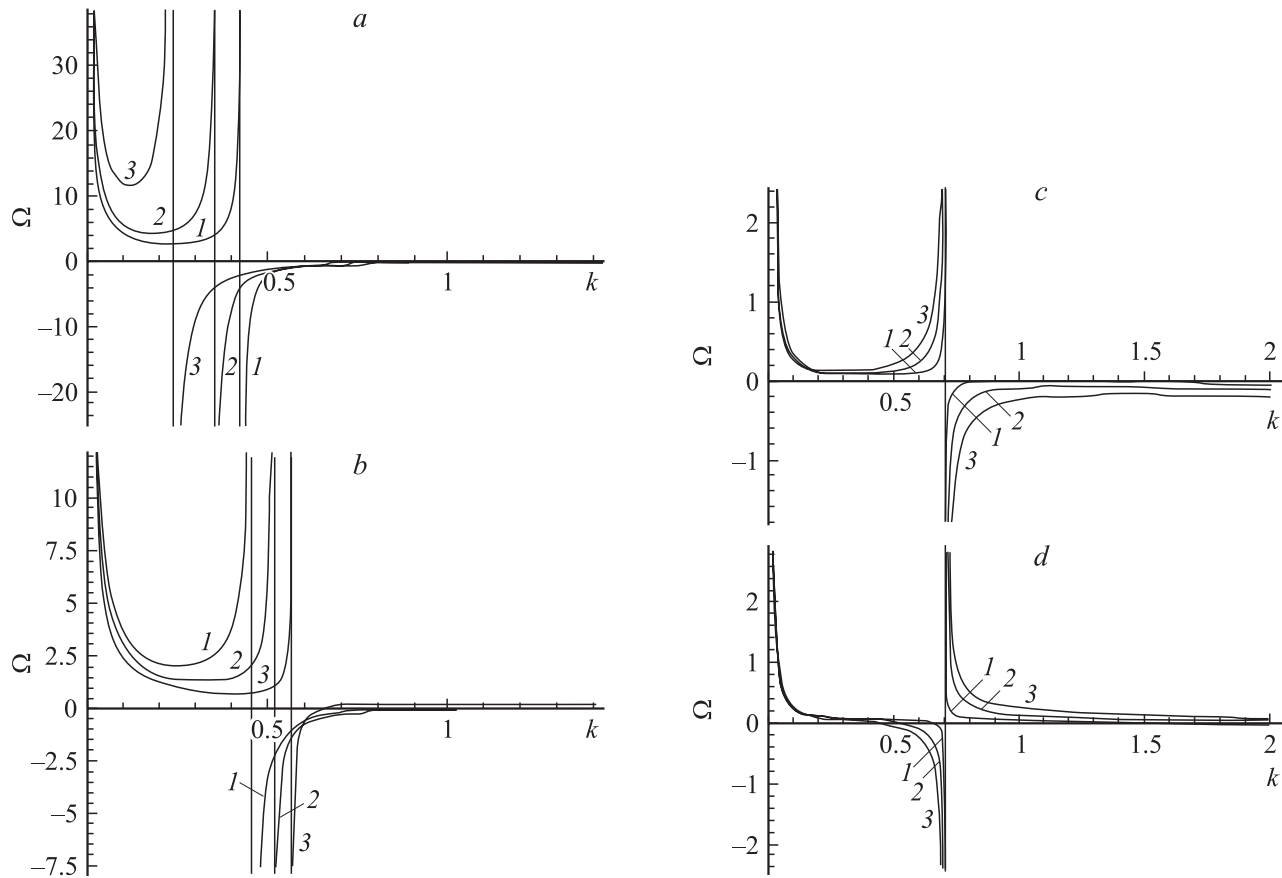


Рис. 1. Зависимость величины безразмерного амплитудного множителя Ω квадратичной по малому параметру поправки к профилю волны от безразмерного волнового числа k , рассчитанная при различных толщинах слоя жидкости h и различных значениях параметра Тонкса–Френкеля W : a — $h = 1$; $W = 1$ (1), 0.8 (2), 0.5 (3); b — $h = 1$; $W = 1.1$ (1), 1.3 (2), 1.5 (3); c — $h = 5$; $W = 1$ (1), 0.8 (2), 0.5 (3); d — $h = 5$; $W = 1.1$ (1), 1.3 (2), 1.5 (3).

нелинейной поправки к частоте $a^2 \Theta$ в линейной и квадратичной по малому параметру компонентах полного решения, где безразмерный множитель Θ задан равенством (12). Величина и знак амплитудного множителя Θ зависят от волнового числа k , параметра W и толщины слоя жидкости h (рис. 2). Поправка к частоте колебаний $a^2 \Theta$ последней из выписанных в (9) компоненты полного решения для профиля волны $\xi(x, t)$, имеющей третий порядок малости, будет изменять это слагаемое на величину порядка $O(a^5)$, а так как в решаемую задачу не входит учет величин такого порядка, то указанная добавка здесь не учитывается и в кубическое по малому параметру слагаемое входит невозмущенный аргумент θ . В итоге фазовые скорости волн, из которых состоит полное решение, будут различны. Поправка к частоте $\sim a^3$, которая в решаемой с точностью до величин $\sim a^4$ задаче могла бы появиться в линейном слагаемом (9), отсутствует так же как и для нелинейных волн на поверхности бесконечно глубокой жидкости [19]. В [19] асимптотических расчетах $\sim a^5$ было показано, что поправки к частоте пропорциональны квадрату малого параметра и в расчетах $\sim a^5$ обнаруживаются поправки к частоте $\sim a^2$ и $\sim a^4$.

Из выражения (10) видно, что нелинейная добавка к частоте, так же как и амплитудные множители Ω и Ψ , имеет резонансный вид. Безразмерный коэффициент Θ аналогично Ω будет резонансно нарастать в окрестности волновых чисел, определяемых из уравнения (13), при $n = 2$. Из рис. 2, a, b видно, что положения резонансов в амплитудном множителе поправки к частоте Θ существенно зависят от толщины слоя жидкости: в тонких слоях ($kh \leq 1$) резонансное значение волнового числа k зависит от величины поверхностного заряда (от величины параметра W), как это видно из рис. 2, a ; в толстых ($kh \gg 1$) слоях жидкости (рис. 2, b) резонансное значение волнового числа k от величины поверхностного заряда практически не зависит. Это обстоятельство является весьма важным для всей анализируемой проблемы, т.к. свидетельствует, что закономерности реализации нелинейного волнового движения в тонких и толстых слоях жидкости существенно различаются. Об этом же свидетельствует и анализ нелинейных поправок к амплитудам Ω и Ψ от волнового числа k и параметра Тонкса–Френкеля W .

12. Расчет (рис. 3) профилей нелинейных волн на заряженной поверхности слоя жидкости конечной глу-

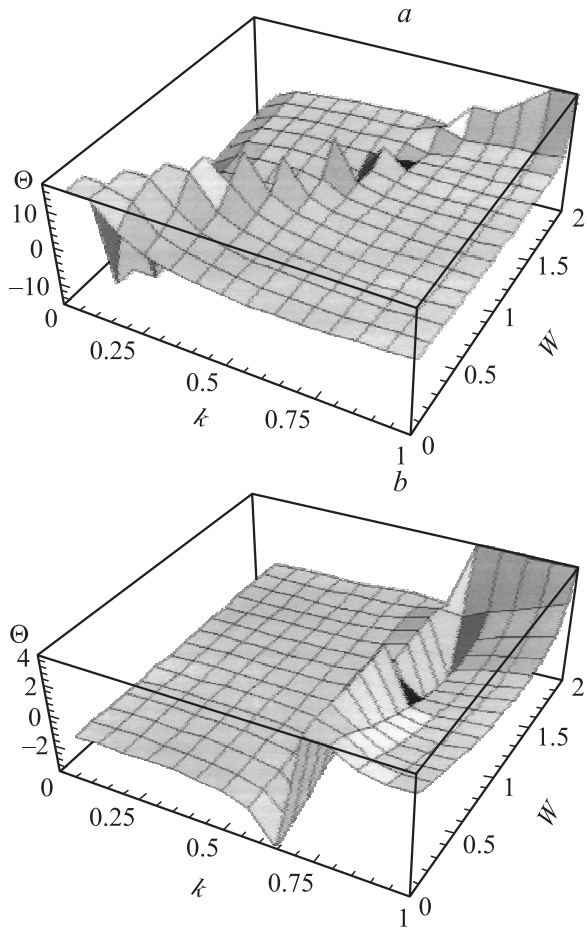


Рис. 2. Зависимость безразмерного множителя при нелинейной поправке к частоте колебаний Θ от безразмерного волнового числа k и параметра Тонкса-Френкеля W при глубине жидкого слоя $h = 1$ (а), при $h = 5$ (б).

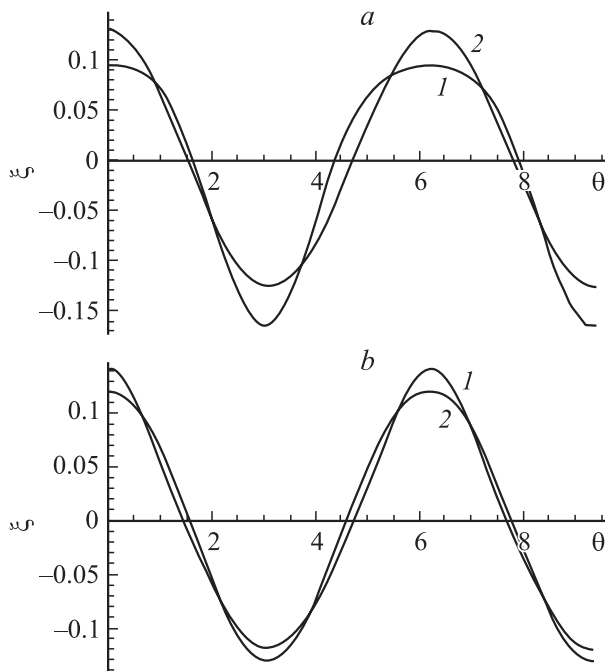


Рис. 3. Профили нелинейных волн, рассчитанные при $k = 0.5$ и $W = 0$ (1) и при $k = 0.5$, $W = 1.8$ (2). $h = 1$ (а), 5 (б).

бины показывает, что в сравнении с профилями волн на незаряженной поверхности жидкости наличие поверхностного заряда изменяет вид кривых, описывающих возмущение свободной поверхности: достаточно большие поверхностные плотности заряда приводят к увеличению кривизны гребней капиллярных волн. Кроме того, на профиле периодических капиллярно-гравитационных волн на заряженной поверхности жидкости сказывается и толщина ее слоя, с уменьшением которой гребни волн становятся более пологими. Из сравнения рис. 3, а с рис. 3, б видно, что с увеличением толщины слоя может измениться и знак нелинейной поправки к профилю волны, впрочем, это можно видеть и из рис. 1.

Заключение

Решение задачи расчета характеристик нелинейного капиллярно-гравитационного волнового движения на заряженной свободной поверхности слоя идеальной жидкости конечной глубины в четвертом порядке малости по амплитуде волны показало, что коэффициенты Ω и Ψ , через которые определяются профиль волны, потенциал волнового течения жидкости и потенциал электростатического поля, а также амплитудный множитель нелинейной поправки к частоте Θ имеют резонансный вид. Выяснилось, что положения внутренних нелинейных существенно зависят от толщины слоя жидкости и величины поверхностной плотности электрического заряда, причем влияние поверхностного заряда усиливается с уменьшением толщины слоя жидкости. Исследование влияния толщины слоя жидкости и наличия поверхностного заряда на профиль периодических капиллярно-гравитационных волн показало, что с уменьшением толщины слоя гребни волн становятся более пологими, а достаточно большие поверхностные плотности заряда приводят к увеличению кривизны гребней капиллярных волн.

Приложение

Правые части граничных условий при $z = h$ задачи четвертого порядка малости имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 H_{41} = & \frac{\partial \xi_3}{\partial T_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial T_2} + \frac{\partial \xi_1}{\partial T_3} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} \\
 & + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \xi_3}{\partial x} + \xi_2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial z} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \xi_1 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x \partial z} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \\
 & + \frac{1}{2} \xi_1^2 \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial z^2 \partial x} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} - \xi_3 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} - \xi_2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2} \\
 & - \xi_1 \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \xi_1^2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2} - \xi_1 \xi_2 \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial z^3} - \frac{1}{6} \xi_1^3 \frac{\partial^4 \phi_1}{\partial z^4},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_{42} = & \rho \frac{\partial \phi_1}{\partial T_3} + \rho \frac{\partial \phi_2}{\partial T_2} + \rho \frac{\partial \phi_3}{\partial T_1} + \rho \xi_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial T_2 \partial z} + \rho \xi_1 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial T_1 \partial z} \\
 & + \rho \xi_1 \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial T_0 \partial z} + \rho \xi_2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial T_1 \partial z} + \rho \xi_2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial T_0 \partial z} \\
 & + \rho \xi_3 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial T_0 \partial z} + \frac{1}{2} \rho \xi_1^2 \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial T_1 \partial z} + \frac{1}{2} \rho \xi_1^2 \frac{\partial^3 \phi_2}{\partial T_0 \partial z^2} \\
 & + \rho \xi_1 \xi_2 \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial T_0 \partial z^2} + \frac{1}{6} \rho \xi_1^3 \frac{\partial^4 \phi_1}{\partial T_0 \partial z^3} + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right)^2 \\
 & + \rho \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_3}{\partial x} + \rho \xi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x \partial z} + \rho \xi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial z} \\
 & + \rho \xi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial z} + \frac{1}{2} \rho \xi_1^2 \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial z} \right)^2 \\
 & + \frac{1}{2} \rho \xi_1^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x \partial z^2} + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho \xi_1^2 \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} \right)^2 \\
 & + \rho \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \frac{\partial \phi_3}{\partial z} + \rho \xi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2} + \rho \xi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} \\
 & + \rho \xi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \rho \xi_1^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial z^3} \\
 & + 3\sigma \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + \frac{3}{2} \sigma \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x} \right)^2 \\
 & - \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} - \frac{1}{4\pi} \xi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial z} \\
 & - \frac{1}{4\pi} \xi_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial z} - \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{4\pi} \xi_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial z} \\
 & - \frac{1}{8\pi} \xi_1^2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial x \partial z^2} - \frac{1}{8\pi} \xi_1^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial z} \right)^2 \\
 & - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} + \frac{E_0}{4\pi} \xi_1 \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} - \frac{1}{4\pi} \xi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} \\
 & - \frac{1}{4\pi} \xi_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} + \frac{E_0}{4\pi} \xi_2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} - \frac{1}{4\pi} \xi_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} \\
 & + \frac{E_0}{4\pi} \xi_3 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} - \frac{1}{8\pi} \xi_1^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} \right)^2 + \frac{E_0}{8\pi} \xi_1^2 \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial z^3} \\
 & + \frac{E_0}{4\pi} \xi_1 \xi_2 \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial z^3} - \frac{1}{4\pi} \xi_1^2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial z^3} + \frac{E_0}{24\pi} \xi_1^3 \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial z^4}, \\
 H_{43} = & \xi_1 \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} + \xi_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \xi_3 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \frac{1}{2} \xi_1^2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} \\
 & + \xi_1 \xi_2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} + \frac{1}{6} \xi_1^3 \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial z^3}.
 \end{aligned}$$

Список литературы

- [1] Габович М.Д. // УФН. 1983. Т. 140. № 1. С. 137–151.
- [2] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [3] Курочкина С.А., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЭОМ. 2003. № 3. С. 26–36.
- [4] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Климов А.В., Курочкина С.А. // ЭОМ. 2004. № 4. С. 66–78.
- [5] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Коромыслов В.А., Белоножко Д.Ф. // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 9. С. 12–21.
- [6] Nayfeh A.H. // J. Fluid Mech. 1970. Vol. 40. Pt 4. P. 671–684.
- [7] Аромин Э.Л., Иванов А.Н., Садовников Д.Ю. // Изв. РАН МЖГ. 1994. № 4. С. 125–129.
- [8] Жакин А.И. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 3. С. 94–102.
- [9] Gonzalez A., Castellanos A. // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53. N 4. P. 3573–3578.
- [10] Ильичев А.Т. // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 2. С. 3–27.
- [11] Michael D.H. // Quart. Appl. Math. 1977. Vol. 35. P. 139–143, 345–355.
- [12] Bhimsen K., Sh. // Quart. Appl. Math. 1979. Vol. 35. P. 423–427.
- [13] Rama Kant, Jindia R.K., Malik S.K. // Quart. Appl. Math. 1981. Vol. 39. P. 23–24.
- [14] Malik S.K., Rama Kant // Quart. Appl. Math. 1986. Vol. 43. P. 23–24.
- [15] Зубарев Н.М., Зубарева О.В. // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 7. С. 21–29.
- [16] Зубарев Н.М. // ЖЭТФ. 1999. Т. 116. Вып. 6 (12). С. 1990–2005.
- [17] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ПЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 18. С. 46–51.
- [18] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 6. С. 102–109.
- [19] Климов А.В., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ПЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 1. С. 32–39.
- [20] Michell J.H. // Phil. Mag. S. 5. 1893. Vol. 36. N 22. P. 430–437.
- [21] Wilton J.R. // Phil. Mag. S. 6. 1915. Vol. 29. N 173. P. 688–700.
- [22] Nayfeh A.H. // Phys. Fluids. 1970. Vol. 13. N 3. P. 545–550.
- [23] Nayfeh A.H., Hassan S.D. // J. Fluid Mech. Pt 3. 1971. Vol. 48. P. 463–475.
- [24] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 37–46.
- [25] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 3. С. 5–13.
- [26] Климов А.В., Курочкина С.А. // Материалы Всероссийской науч. конф., посвященной 200-летию ЯрГУ им. П.Г. Демидова. Сер. Физика. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2003. С. 50–53.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 03-01-00760).