

01;03

Влияние внешнего энергоподвода в область ударного слоя на структуру ударной волны

© В.Ю. Голятин,¹ В.В. Кучинский,² В.С. Сухомлинов¹

¹ Научно-исследовательский институт физики
Санкт-Петербургского государственного университета,
198903 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: SUKHOMLINOV@POBOX.RU

² Научно-исследовательское предприятие гиперзвуковых систем,
196066 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: AJAX@COMSET.NET

(Поступило в Редакцию 28 июня 2004 г.)

Построена физическая модель, описывающая структуру одномерной ударной волны в газе с движущимся источником тепловыделения. Получено стационарное уравнение для профиля ударной волны в газе с неподвижным относительно этой волны источником энергоснабжения произвольной формы. На основе полученных аналитических решений данного уравнения проанализирована структура потока при внешнем энергоподводе.

Введение

В последнее время проявляется значительный интерес к влиянию на сверхзвуковые течения внешних воздействий. В частности, в работах [1,2] изучалось распространение ударных волн (УВ) в слабоионизованной плазме газового разряда. Были обнаружены различные аномальные изменения структуры ударных волн: их уширение, ослабление, немонотонная структура как в экспериментах с бегущими УВ, так и при полете тел через плазму [3–5]. В статье [6] было высказано предположение, что при распространении УВ вдоль электрического поля часть этих эффектов может быть объяснена тем, что из-за роста плотности за УВ там возрастает электрическое поле, что эквивалентно наличию внешнего источника энергоподвода.

В работе [7] были получены основные формулы, обобщающие соотношения Гюгонио–Ренкина на случай, когда в области ударного фронта существует источник тепла, неподвижный относительно ударной волны. Результаты работы [7] связывают асимптотические значения параметров газового потока в невозмущенной (сверхзвуковой) области с асимптотическими параметрами в возмущенной области и не позволяют описывать структуру ударного слоя.

В данной работе разработаны простые аналитические методы расчета формы ударной волны в любой точке пространства (в одномерном приближении). Необходимость разработки аналитических методов связана с тем, что они позволят наглядно показать, как локальный подвод энергии влияет на структуру ударной волны, и проанализировать общие закономерности рассматриваемого явления. В частности, проводимое в данной работе рассмотрение относится к сверхзвуковому движению аэродинамических объектов в плазменной среде, т.е. речь пойдет об экспериментах на баллистических

трассах [3]. Варианты экспериментального подхода к определению параметров ударной волны можно найти в работах [1–5].

1. Основные уравнения

Рассмотрим одномерную плоскую ударную волну, движущуюся в потоке газа, причем в окрестности ударного фронта расположен движущийся вместе с фронтом источник тепла. Одномерная система нестационарных уравнений, описывающая параметры ударной волны при наличии движущегося в направлении оси x со скоростью w источника тепла, имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^2 + p - \frac{4}{3}\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho e\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(\frac{1}{2}u^2 + e\right)\rho u + \left(p - \frac{4}{3}\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right)u - \lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right\} - Q(x - wt) = 0, \quad (1)$$

где ρ , u , e — соответственно плотность, массовая скорость и внутренняя энергия газа; μ — вязкость газа; p — статическое давление; λ — коэффициент теплопроводности; T — абсолютная температура газа.

Будем искать решение системы (1), стационарное в системе координат, движущейся со скоростью w . Для этого перейдем к переменной $\xi = x - wt$. В качестве искомой функции возьмем $v = w - u$, что, очевидно, соответствует выбору системы координат, движущейся с источником, и позволяет также описывать случай неподвижного источника в движущемся вдоль оси ξ газе.

Используя известные соотношения, можно получить из системы уравнений (1)

$$\frac{4}{3}\mu \frac{dv}{d\xi} = P_0 - Q_0 \left(v + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{H}{v} \right),$$

$$\frac{4}{3}\mu \frac{d}{d\xi} \left(H + \frac{1}{2} v^2 \right) = E_0 - Q_0 \left(H + \frac{1}{2} v^2 \right) + \int_{\xi}^{\infty} Q(\xi') d\xi', \quad (2)$$

где H — энтальпия газа (на единицу массы); Q_0 , P_0 и E_0 — некоторые положительные постоянные; $\gamma = c_p/c_v$, c_p и c_v — удельная теплоемкость газа при постоянном давлении и удельная теплоемкость газа при постоянном объеме.

Интегрирование второго уравнения (2) с условиями

$$\varphi(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} \frac{E_0}{Q_0}; \quad \varphi(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow -\infty} \frac{E_0}{Q_0} + \frac{1}{Q_0} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\xi') d\xi'$$

на бесконечности дает для функции $\varphi(\xi) = H + (1/2)v^2$

$$\varphi(\xi) = \frac{E_0}{Q_0} + \frac{1}{Q_0} \left\{ \int_{\xi}^{\infty} Q(\xi') d\xi' + \exp\left(-\frac{3Q_0}{4\mu}\xi\right) \int_{-\infty}^{\xi} \exp\left(\frac{3Q_0\xi'}{4\mu}\right) Q(\xi') d\xi' \right\}. \quad (3)$$

Обозначим $\lim_{\xi \rightarrow \infty} v = v_1$, где v_1 — величина массовой скорости газа относительно движущегося источника в невозмущенной области. Предположим, что существует такая точка $\xi = \xi_0$, что выполняется

$$\left. \frac{dv}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_0} = 0,$$

$v(\xi)$ — непрерывная функция при $\xi > \xi_0$, и пусть $v|_{\xi=\xi_0} = v_2$. Для энтальпии $H(\xi)$ из равенства (3) следует соотношение

$$H(\xi) = \frac{E_0 + \Delta E(\xi)}{Q_0} - \frac{1}{2} v^2(\xi),$$

и, полагая $\xi \rightarrow \infty$ и $\xi = \xi_0$, получим два соотношения:

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} (v_2 + v_1) + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\Delta E_0}{v_2 - v_1} \frac{1}{Q_0},$$

$$\frac{P_0}{Q_0} = \left\{ \frac{\gamma + 1}{2\gamma} v_1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{E_0}{v_1} \frac{1}{Q_0} \right\}, \quad (4)$$

где

$$\Delta E(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} Q(\xi') d\xi' + \exp\left(-\frac{3Q_0\xi}{4\mu}\right) \int_{-\infty}^{\xi} \exp\left(\frac{3Q_0\xi'}{4\mu}\right) Q(\xi') d\xi'$$

— поток подводимой энергии на единицу площади, $\Delta E_0 = \Delta E(\xi_0)$.

Подставляя равенства (4) в первое уравнение (2), получим

$$\frac{4}{3}\mu \frac{dv}{d\xi} = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{Q_0}{v} \left\{ (v_1 - v)(v - v_2) + \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)} \frac{\Delta E_0(v - v_1)}{(v_2 - v_1)Q_0} - \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)} \frac{\Delta E(\xi)}{Q_0} \right\}. \quad (5)$$

В безразмерной системе координат

$$y = \frac{3}{8} \frac{\rho_1 a_1}{\mu} \frac{(\gamma + 1)}{\gamma} (x - wt) \quad (6)$$

уравнение (5) переходит в стационарное (в выбранной системе координат) неоднородное уравнение для скорости $v = w - u$

$$v \frac{dv}{dy} = (v_1 - v)(v - v_1 \omega^2) M - v_1^2 \frac{\beta(y)}{\gamma^2 M^2}, \quad (7)$$

где

$$\beta(y) = \frac{16(\gamma - 1)}{3(\gamma + 1)^2} \frac{\gamma^3 \mu}{\rho_1^2 a_1^4} \left\{ \int_y^{\infty} Q(y') dy' + \exp\left(-\frac{3\rho_1 a_1 y}{4\mu}\right) \int_{-\infty}^y \exp\left(\frac{3\rho_1 a_1 y'}{4\mu}\right) Q(y') dy' \right\} > 0,$$

$$v_2 = v_1 \frac{\gamma M^2 + 1 - (M^2 - 1) \sqrt{1 - \frac{\beta(y_0)}{\beta_{\text{lim}}}}}{(\gamma + 1) M^2},$$

$$\beta_{\text{lim}} = \frac{\gamma^2 (M^2 - 1)^2}{(\gamma + 1)^2 M}, \quad \beta(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} (\beta(y)),$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2 + (\gamma - 1) M^2}{(\gamma + 1) M^2}}, \quad (8)$$

v_1 , $M \equiv M_1 = v_1/a_1$, ρ_1 и a_1 — скорость, число Маха, плотность газа и скорость звука в невозмущенной области (при $y \rightarrow +\infty$).

При этом очевидно, что

$$v \xrightarrow{y \rightarrow \infty} v_1, \quad \left. \frac{dv}{dy} \right|_{y=y_0} = 0,$$

$$v|_{y=y_0} = v_2, \quad y_0 = \frac{3\rho_1 a_1}{8M} \frac{(\gamma + 1)}{\gamma} \xi_0.$$

Из выражения для v_2 видно, что для наличия точки $y = y_0$, такой что $v|_{y=y_0} = v_2$ и $\left. \frac{dv}{dy} \right|_{y=y_0} = 0$, необходимо выполнение неравенства

$$\beta(y_0) \leq \beta_{\text{lim}} = \frac{\gamma^2 (M^2 - 1)^2}{(\gamma + 1)^2 M}. \quad (9)$$

Подробный анализ уравнений (7)–(9) позволяет установить, что единственно возможной точкой y_0 , в которой выполняются перечисленные выше условия, является $y_0 \rightarrow -\infty$.

При нулевой мощности теплового источника уравнение (7) переходит в уравнение, приведенное в работе [8]. В этом случае ($\beta = 0$) решение уравнения (7) может быть найдено в неявном виде

$$1 - \frac{v}{v_1} = \left[\frac{(v - v_2)(v_1 - \sqrt{v_1 v_2})}{v_1(\sqrt{v_1 v_2} - v_2)} \right]^{\frac{v_2}{v_1}} \exp\left(-\frac{v_1 - v_2}{a_1} y\right), \quad (10)$$

причем постоянная интегрирования выбрана так, чтобы точка $y = 0$ соответствовала положению максимального значения производной $d^2 v(y)/dx^2|_{y=0} = 0$. При этом величина скорости $v = v(y)$ и ее производной в точке $y = 0$ определяется простыми формулами

$$v(0) = v_1 \omega, \quad \left. \frac{dv}{dy} \right|_{y=0} = M v_1 (1 + \omega)^2, \quad (\beta(y) = 0). \quad (11)$$

При последующем решении уравнения (7) при $\beta(y) \neq 0$ для получения абсолютного значения смещения фронта ударной волны за счет теплового воздействия необходимо сохранить определение начала координат как точки максимума производной от скорости по расстоянию при $y = 0$. Надо правильно выбрать постоянную интегрирования таким образом, чтобы при непрерывном переходе от $\beta(y) \neq 0$ к $\beta(y) = 0$ получаемое решение непрерывно переходило в решение (10). Для этого достаточно получить значение первой производной от скорости из условия равенства нулю второй производной и подставить $\left. \frac{dv_1}{dy} \right|_{y=0}$ в основное уравнение (7), что приводит к полиному четвертой степени относительно поправки к значению скорости $v(0)$ при $\beta(y) = 0$ (см. формулу (7))

$$\begin{aligned} v(0) &= v_1 \omega + v_1 \Delta, \quad \Delta^4 + a_3 \Delta^3 + a_2 \Delta^2 + a_1 \Delta + a_0 = 0, \\ a_0 &= c_0 \omega (1 - \omega)^2 - c_0^2 - c_1 \omega^2, \\ a_1 &= c_0 (1 + \omega^2) - 2\omega^2 (1 - \omega)^2 - 2c_1 \omega, \\ a_2 &= -c_1 - 3\omega (1 - \omega)^2, \quad a_3 = -\omega^2 + 4\omega - 1, \\ c_0 &= \frac{1}{\gamma^2 M^3} \beta(0), \quad c_1 = \frac{1}{\gamma^2 M^4} \left. \frac{d\beta(y)}{dy} \right|_{y=0}. \end{aligned} \quad (12)$$

Второй по величине корень полинома (12) дает значение Δ для расчета $v(0) = v_1 \cdot (\omega + \Delta)$ (при $\beta \rightarrow 0$ этот корень $\Delta \rightarrow 0$, так как $a_0 \rightarrow 0$). В большинстве случаев для определения $v(0)$ достаточно использовать приближенную формулу

$$v(0) \approx v_1 \left(\omega - \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2} \right). \quad (13)$$

2. Формулы для расчета параметров ударной волны

Знание решения при $y = 0$ позволяет провести однозначное определение профиля скорости. Это можно сделать с помощью стандартных программ на

ЭВМ (например, используя любой из вариантов метода Рунге–Кутты) или с помощью приближенных формул, приведенных ниже, что с достаточно высокой точностью позволяет построить профиль скорости и, используя известные соотношения, определить давление, температуру, плотность и местное число Маха

$$p(y) = p_1 \left\{ 1 + \gamma M^2 \left[1 - \frac{v(y)}{v_1} \right]^2 + \frac{v_1 M^2 (\gamma + 1)}{2v(y)} \left[\left(1 - \frac{v(y)}{v_1} \right) \left(\omega^2 - \frac{v(y)}{v_1} \right) + \frac{\beta(y)}{\gamma^2 M^3} \right] \right\},$$

$$T(y) = 3.4837 \cdot 10^{-3} \frac{p(y)}{v_1 \rho_1} v(y),$$

$$\rho(y) = \frac{\rho_1 v_1}{v(y)}, \quad \chi(y) = \frac{p(y)}{p_1} - 1, \quad (14)$$

$$M(y) = \frac{v(y)}{v_1} \left[\frac{\gamma - 1}{2} \left(1 - \left(\frac{v(y)}{v_1} \right)^2 \right) + \frac{1}{M^2} + \frac{(\gamma + 1)}{2\gamma^2 M^3} \beta(y) \right]^{-1/2}. \quad (15)$$

Из формулы (15) можно получить величину скорости, при которой местное число Маха (которое мы обозначаем как $M(y)$ в отличие от M — значения числа Маха в невозмущенной области) при y_s равно единице,

$$v(y_s) = v_1 \sqrt{\omega^2 + \frac{\beta(y_s)}{\gamma^2 M^3}}. \quad (16)$$

Точка y_s , в которой достигается это равенство, даст смещение фронта ударной волны за счет действия теплового источника, и, таким образом, выражение (16) является уравнением для определения смещения фронта ударной волны.

Для проведения оценок удобно использовать аналитические формулы, описывающие с достаточной для наших целей точностью изменение параметров ударной волны. Так, для скорости ударной волны в отсутствие теплового источника ($\beta(y) = 0$) на основании асимптотических оценок можно получить два приближенных выражения:

$$v(y) \approx v_u(y) = v_1 \omega \left[1 + \frac{(1 - \omega)(e^{My(\frac{1}{\omega} - \omega)} - 1)}{\omega e^{My(\frac{1}{\omega} - \omega)} + 1} \right], \quad (17)$$

$$v(y) \approx v_d(y) = v_1 \begin{cases} \omega^2 + \frac{1 - \omega^2}{1 + \frac{1}{\omega} e^{-My(1 - \omega^2)}} & \text{при } y \geq 0, \\ 1 - \frac{1 - \omega^2}{1 + \omega e^{My(\frac{1}{\omega^2} - 1)}} & \text{при } y \leq 0. \end{cases} \quad (18)$$

Сравнение расчета по формулам (17) и (18) показывает, что формула (17) дает оценку сверху для точного решения (оно дается в неявном виде уравнением (10)), а формула (18) — оценку снизу. При $\beta(y) \neq 0$ приближенно скорость ударной волны дается формулой (26) в Приложении. Там же даны формула (28) для оценки ширины ударного фронта Δ_Q и приближенная формула (29) для смещения фронта ударной волны Δ_s .

3. Приближение слабых волн

В приближении слабых волн ($M - 1 \ll 1$) удобно использовать функцию

$$\psi(z) = \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{v(z)}{v_1} \right), \quad (19)$$

где

$$\alpha = 1 - \omega^2 = \frac{2(M^2 - 1)}{(\gamma + 1)M}, \quad z = \alpha M y. \quad (20)$$

Функция $\psi(z)$ в приближении слабых волн удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\psi}{dz} = \psi^2 - \psi + \frac{\bar{\beta}}{4} f, \quad (21)$$

где

$$\bar{\beta} = \frac{\beta(-\infty)}{\beta_{\text{lim}}}, \quad \beta(z) = \beta(-\infty) f(z). \quad (22)$$

Начало координат, как и в разделе 2, надо брать в точке z такой, что $d^2\psi/dz^2|_{z=0} = 0$. Значение

$$\psi_0 = \psi(0) = \frac{1}{2} (1 + \delta),$$

где δ — второй по величине корень кубического уравнения

$$\delta^3 + (\bar{\beta} f(0) - 1)\delta + \bar{\beta} \frac{df}{dz} \Big|_{z=0} = 0. \quad (23)$$

Точные решения уравнения (15) можно получить, например, когда интегральный теплоподвод описывается экспоненциальной функцией

$$f(z) = \frac{1}{2} \begin{cases} e^{-\frac{z}{L}} & \text{при } z \geq 0, \\ 2 - e^{\frac{z}{L}} & \text{при } z < 0 \end{cases} \quad (24)$$

или аппроксимируется линейной функцией на участке $-L \leq z \leq L$

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z < -L, \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{L} \right) & \text{при } -L \leq z < L, \quad (0 \leq f(z) \leq 1), \\ 0 & \text{при } z \geq L. \end{cases} \quad (25)$$

Для скорости ударной волны при экспоненциальном интегральном теплоподводе (24) получаем формулу (30), а при линейном теплоподводе (25) — формулу (32) в Приложении.

Рис. 1 позволяет сравнить численное решение точного уравнения (7) (сплошная кривая) с расчетом по формулам в приближении слабых волн (точки). Видно, что наименьшую точность приближение слабых волн дает в окрестности минимума кривой распределения скорости УВ по координате z . При числах Маха $M \leq 1.4$ и меньших $\beta < \beta_{\text{lim}}$ приближение слабых волн дает практически точные значения. Различные варианты полученных формул для скорости УВ позволяют рассчитать поведение других параметров УВ (формулы (14), (15)).

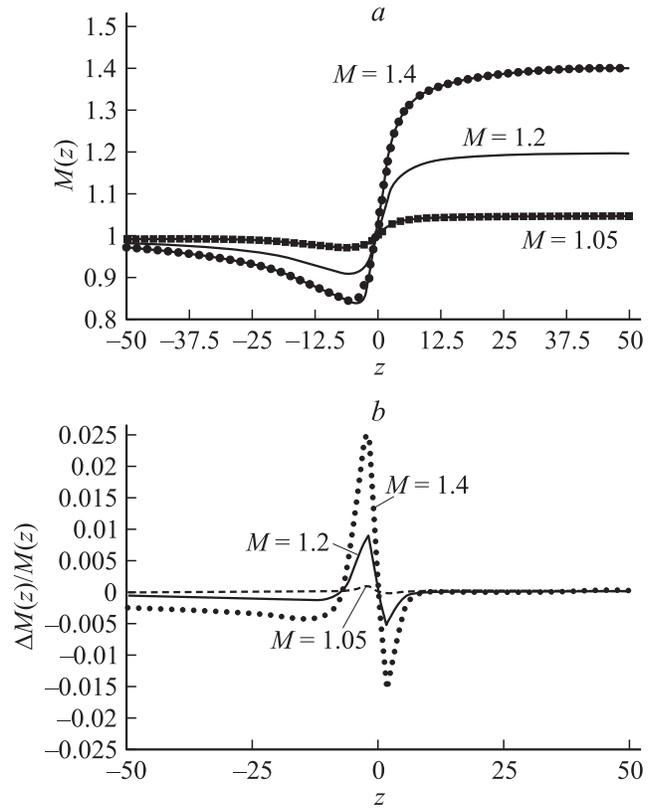


Рис. 1. Зависимость локального числа Маха от координаты (а), соответствующая точному решению уравнения (3) (сплошные кривые) и приближению слабых волн (точки), и относительная погрешность расчета в приближении слабых волн (б) при различных значениях исходного числа Маха (цифры у кривых).

Таким образом, получены формулы, необходимые для оценки изменения формы ударной волны при наличии источника тепловыделения и позволяющие связать величину теплоподвода с характерными изменениями температуры, плотности и давления.

4. Анализ полученных результатов

Полученные формулы и анализ основного уравнения (7) позволяют сделать следующие выводы. При внешнем подводе тепла профиль ударной волны может быть не монотонным; местное число Маха может быть либо монотонной функцией координаты, либо иметь единственный минимум в области вниз по потоку от центра ударной волны; при любых числах Маха при увеличении интегральной мощности теплоподвода интенсивность ударной волны падает, а ее фронт уширяется (рис. 2, 3).

При анализе физических закономерностей изменения структуры течения при внешнем подводе тепла необходимо определить расположение областей сверх- и дозвукового течения. В отсутствие энергоподвода ($\beta = 0$), используя формулы (15), (17) и (18), можно показать,

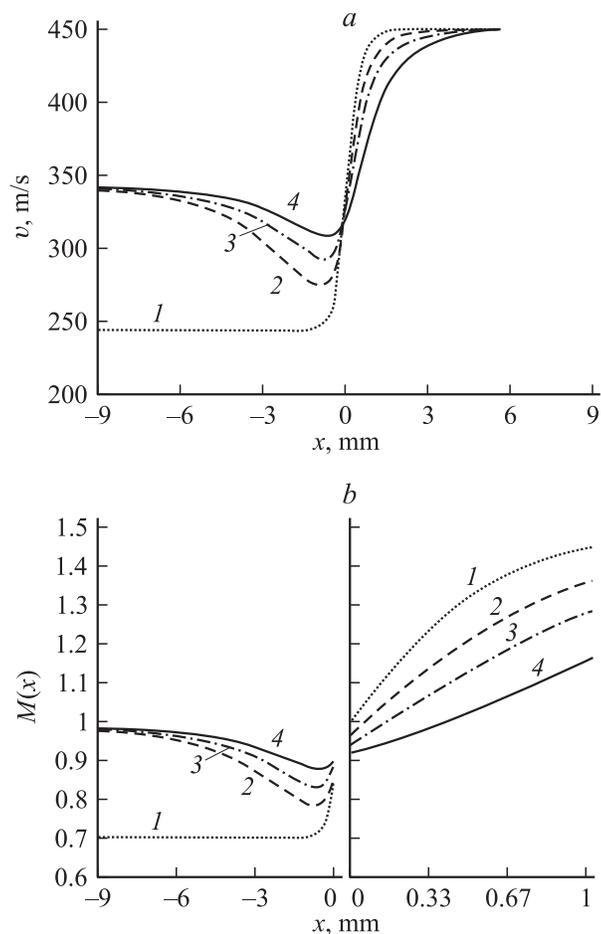


Рис. 2. Прифили скорости (а) и местного числа Маха (б) при различном положении локального теплового источника (источник имел гауссовскую форму с полушириной 2.5 мм и его мощность соответствовала предельному теплоподводу β_{lim}). 1 — профили в отсутствие теплового источника, 2 — тепловой источник смещен вниз по потоку на 1 мм, 3 — тепловой источник размещен в зоне ударного фронта (несмещенный источник), 4 — тепловой источник смещен вверх по потоку на 1 мм.

что $M_0(y) > 1$ при $y > 0$ и $M_0(y) < 1$ при $y < 0$. Таким образом, в выбранной нами системе координат точка раздела сверх- и дозвуковых областей в ударной волне $y = y_s$ совпадает с точкой максимума производной $(d/dy)v_1(y)$ и $y_s = 0$. При осуществлении внешнего энергоподвода в область ударного слоя граница раздела между сверх- и дозвуковыми течениями в ударной волне смещается вверх по потоку, однако в дозвуковой области при $y \rightarrow -\infty$ число Маха увеличивается по сравнению со случаем отсутствия внешнего энергоподвода.

Из полученных выше формул следует, что при теплоподводе, равном критическому (т.е. при $\beta(y_0) \equiv \beta(-\infty) = \beta_{lim}$, формула (9)), течение за ударной волной асимптотически стремится к звуковому (рис. 2). Отсюда следует, что в этом случае ударная волна, трактуемая как непрерывное торможение потока с перехо-

дом течения от сверхзвукового к дозвуковому, перестает существовать. Рассмотрим, каковы же причины такого поведения течения при наличии внешнего энергоподвода и почему при $\beta(-\infty) > \beta_{lim}$ невозможно существование решения системы уравнений Навье–Стокса стационарного в системе координат движущегося источника.

Мы видели, что при любом $\beta(-\infty) < \beta_{lim}$ течение разделяется на две области: сверхзвуковую — $y > y_s$ и дозвуковую — $y < y_s$. Торможение потока при приближении к ударному слою при отсутствии внешнего теплоподвода происходит путем сжатия газа. При осуществлении теплоподвода в сверхзвуковую область, как известно, поток тормозится тем эффективней, чем выше теплоподвод, при этом возрастает температура газа [9]. Это дополнительное торможение вызывает снижение массовой скорости перед ударным слоем, т.е. уменьшение $v(y)$ и снижение местного числа Маха (рис. 2, 3). Из-за снижения числа Маха падает сжатие в ударной волне, а значит и торможение потока. После перехода в дозвуковую область ($y < y_s$) внешний подвод тепла в поток, как известно [9], увеличивает скорость потока и массовая скорость становится тем выше, чем интенсивней подводится тепло. Что касается местного числа Маха, то рост массовой скорости в дозвуковой области при увеличении теплоподвода не компенсируется ростом температуры газа. Таким образом, местное число Маха хотя убывает при $y \rightarrow -\infty$, но становится тем выше, а при $y \rightarrow \infty$ тем ниже, чем интенсивней теплоподвод (рис. 3). Как видно из рис. 3, с, при увеличении энергоподвода кроме снижения интенсивности ударной волны χ происходит ее размывание, т.е. градиенты величин $v(y)$, $\rho(y)$ и т.д. уменьшаются. Таким образом, можно утверждать, что при $\beta(-\infty) = \beta_{lim}$ ударная волна превращается в известной степени в плавное изменение параметров газа.

Сделаем одно важное замечание. Предположим, что зона тепловыделения локализована в пространстве в дозвуковой области. Ясно, что вниз и вверх по потоку тепло будет эффективно распространяться как за счет теплопроводности, так и (вниз по потоку) за счет переноса потоком.

Теперь рассмотрим случай, когда зона тепловыделения локализована в сверхзвуковой области. Перенос тепла вниз по потоку происходит столь же эффективно. Что касается распространения тепла вверх по потоку, то, казалось бы, поскольку процесс передачи тепла происходит с тепловой скоростью, в сверхзвуковой области передачи тепла против направления массовой скорости не происходит. На самом деле это не так, потому что в газе, молекулы которого имеют максвелловское распределение по скоростям, при любом числе Маха найдутся частицы, скорость которых равновероятно направлена (т.е. в том числе и против потока) и по величине превосходит массовую скорость потока. Таких частиц, естественно, тем меньше, чем выше массовая скорость газа. Таким образом, независимо от того, является ли поток сверх- или дозвуковым, при подводе

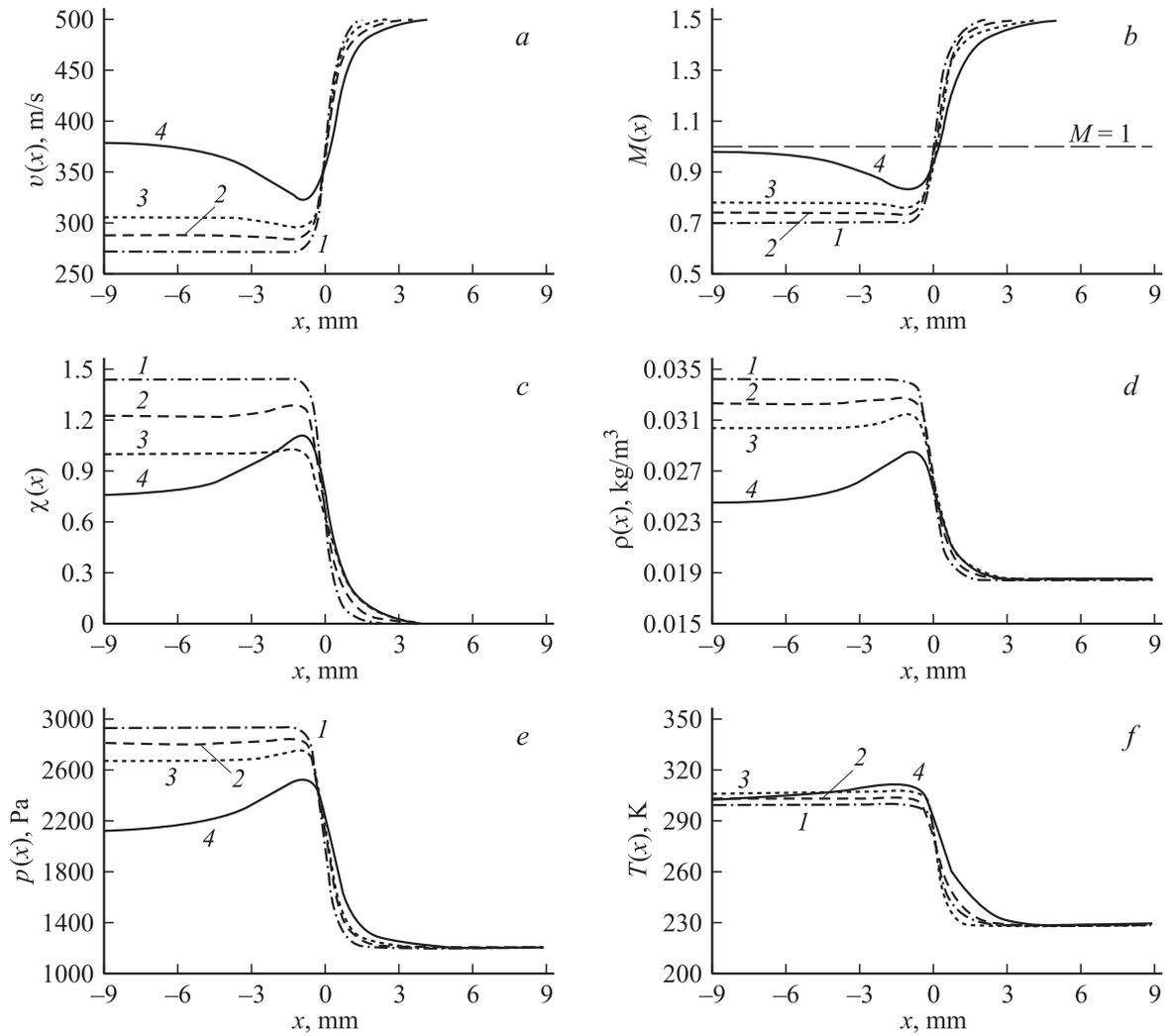


Рис. 3. Профили скорости (а), местного числа Маха (b), интенсивности (с), плотности (d), давления (e) и температуры (f) при различной величине энерговклада β . $\beta(-\infty)/\beta_{\text{lim}} = 0$ (1), 0,25 (2), 0,5 (3), $\beta(-\infty) = \beta_{\text{lim}}$ (4).

энергии в пространственно ограниченную область тепло распространяется и вверх и вниз по потоку, при этом вверх по потоку менее эффективно. Отражением этого факта является то, что если взять плотность объемной мощности $Q(\xi)$ пространственно ограниченного источника, например в виде $Q(\xi) = Q_0(\xi)\theta(\xi - \xi_1)\theta(\xi_2 - \xi)$, где $\theta(\xi)$ — тета-функция Хэвисайда, то функция $\Delta E(\xi)$, определенная формулой (4), экспоненциально убывает до нуля при $\xi > \xi_2$ и постоянна при $\xi < \xi_1$. Данные рассуждения позволяют понять, почему в стационарном решении подвод энергии к сверхзвуковому потоку в ограниченной области изменяет характер течения вверх по потоку от области энерговыделения.

Рассмотрим теперь течение газа в двух различных случаях, когда два источника тепла имеют одинаковую суммарную мощность, но один $Q_1(y)$ расположен в сверхзвуковой области течения, а другой $Q_2(y)$ — в дозвуковой области. Справа от точки $y = y_s$ влияние источника Q_2 меньше влияния источника Q_1 , поскольку,

как мы видели, вверх по потоку тепло распространяется неэффективно. Согласно этому, в сверхзвуковой области замедление газа из-за подвода тепла будет выше в первом случае (для Q_1). Поэтому торможение потока в сверхзвуковой области будет интенсивней в первом случае и функция $v_2(y) > v_1(y)$ при $y \rightarrow \infty$. Местное же число Маха, очевидно, $M_1(y) < M_2(y)$. Более заметное снижение числа Маха в первом случае приводит к более интенсивному ослаблению ударной волны, а значит к ослаблению торможения газа сжатием потока в ударном слое. В силу этого существует точка, где $v_1(y_{21}) = v_2(y_{21})$. При переходе в дозвуковую область ускорение потока из-за подвода тепла будет эффективней для Q_1 до тех пор, пока $y \geq y_{21}$. Это происходит потому, что большая часть тепла от источника Q_1 переносится вниз по потоку за счет массовой скорости и теплопроводности, в то время как от источника Q_2 часть тепла распространяется вверх по потоку, а значит менее эффективно. При $y \leq y_{21}$ влияние Q_1 и Q_2 на

параметры потока примерно одинаково и асимптотически массовые скорости сравниваются. Поэтому при $y \rightarrow -\infty$ $v_1(y) > v_2(y)$ и $v_1(-\infty) = v_2(-\infty)$. Совершенно аналогично можно проанализировать влияние формы, интенсивности и расположения источников выделения тепла на другие параметры потока. Из вышеприведенных рассуждений можно, в частности, сделать вывод, что при подводе одинакового количества тепла в сверхзвуковую область (перед ударной волной) ударная волна уширяется сильнее, чем при подводе в дозвуковую (за ударной волной).

Полученные формулы позволяют достаточно детально исследовать характерные изменения структуры ударной волны, возникающие за счет внесения тепла в окрестности фронта ударной волны.

Приложение

Приближенная формула для скорости (приближенное решение уравнения (7))

$$v_h(y) \approx v_1 \left\{ \frac{1 + \gamma M^2}{(\gamma + 1)M^2} + \frac{v_2 \frac{d\beta(y)}{dy}}{4(\beta_{\text{lim}} - \beta(y))Mv_1} + \text{th} \left[v_1 \frac{\int_0^y \sqrt{M(\beta_{\text{lim}} - \beta(z))} dz}{\gamma M v_2} + \theta \right] \sqrt{\frac{\beta_{\text{lim}} - \beta(y)}{\gamma^2 M^3}} \right\}, \quad (26)$$

$$\theta = -\text{arth} \left[\gamma \sqrt{M^3} \frac{\frac{1 + \gamma M^2}{(\gamma + 1)M^2} - \frac{v(0)}{v_1} + \frac{d\beta(0)}{dy} \frac{v_2}{4(\beta_{\text{lim}} - \beta(0))Mv_1}}{\sqrt{\beta_{\text{lim}} - \beta(0)}} \right]. \quad (27)$$

Ширина ударного фронта

$$\Delta_Q = \frac{8\mu\gamma}{3\rho_1 a_1 (\gamma + 1)} \frac{v_1 - v_2}{\left(\frac{dv(y)}{dy} \right)_{y=0}}. \quad (28)$$

Приближенная формула для оценки смещения фронта ударной волны

$$\Delta_s \approx \frac{8\mu\gamma}{3\rho_1 a_1 (\gamma + 1)} \times \frac{1}{c_3} \left[\frac{c_4}{2} + \sqrt{\left(\frac{c_4}{2} \right)^2 + \omega^2 + c_0 - \frac{v(0)}{v_1} c_4 - \frac{v(0)}{v_1}} \right],$$

$$c_3 \equiv \frac{1}{v_1} \frac{dv(y)}{dy} \Big|_{y=0} = \frac{M}{v(0)} \left\{ [v_1 - v(0)] \left[\frac{v(0)}{v_1} - \omega^2 \right] - c_0 v_1 \right\},$$

$$c_4 = \frac{1}{\gamma^2 M^3 c_3} \frac{d\beta(y)}{dy} \Big|_{y=0}, \quad (29)$$

где $\left(\frac{dv(y)}{dy} \right)_{y=0}$ вычисляется по формуле (7).

Точное решение уравнения (21) (приближение слабых волн) для экспоненциального вида интегрального теплоподвода (24)

$$v(z) = v_1 \left(1 - \alpha \begin{cases} \Psi_-(z) & \text{при } z < 0 \\ \Psi_+(z) & \text{при } z \geq 0 \end{cases} \right), \quad (30)$$

где

$$\Psi_-(z) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sqrt{1 - \bar{\beta}} + \frac{\xi}{L} \left[\frac{K_{v+1}(\xi) - C - I_{v+1}(\xi)}{K_v(\xi) + C - I_v(\xi)} \right] \right\},$$

$$\xi = L \sqrt{\frac{\bar{\beta} e^{\frac{z}{L}}}{2}}, \quad v = L \sqrt{1 - \bar{\beta}},$$

$$C_- = \frac{\xi_0 K_{v+1}(\xi_0) + L(1 - \sqrt{1 - \bar{\beta}} - 2\psi_0) K_v(\xi_0)}{\xi_0 I_{v+1}(\xi_0) + L(-1 + \sqrt{1 - \bar{\beta}} + 2\psi_0) I_v(\xi_0)},$$

$$\xi_0 = L \sqrt{\frac{\bar{\beta}}{2}},$$

$$\Psi_+(z) = \sqrt{\frac{\bar{\beta} e^{-\frac{z}{L}}}{8}} \frac{J_{L-1}(\xi) + C_+ Y_{L-1}(\xi)}{J_L(\xi) + C_+ Y_L(\xi)}, \quad \xi = -L \sqrt{\frac{\bar{\beta} e^{-\frac{z}{L}}}{2}},$$

$$C_+ = -\frac{\psi_0 J_L(\xi_0) + 0.35355 \sqrt{\bar{\beta}} J_{L-1}(\xi_0)}{\psi_0 Y_L(\xi_0) + 0.35355 \sqrt{\bar{\beta}} Y_{L-1}(\xi_0)}, \quad \xi_0 = -L \sqrt{\frac{\bar{\beta}}{2}}. \quad (31)$$

При „линейном“ теплоподводе (25) вычисленная по точному решению для $\psi(z)$ скорость ударной волны выражается через функции Эйри $\text{Ai}(\xi)$ и $\text{Bi}(\xi)$

$$v(z) = v_1 \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 - \bar{\beta}} \text{th} \left[\frac{\sqrt{1 - \bar{\beta}}}{2} \left(z + L - \frac{2}{\sqrt{1 - \bar{\beta}}} \right) \times \text{arth} \left(\frac{2\psi_{L-1}}{\sqrt{1 - \bar{\beta}}} \right) \right] \right] & \text{при } z < -L, \\ \Psi(z) & \text{при } -L \leq z \leq 1, \\ \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\psi_L} - 1 \right) e^{z-L}} & \text{при } z > L, \end{cases} \quad (32)$$

где

$$\Psi(z) = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt[3]{\frac{\bar{\beta}}{L}} \frac{\text{Ai}'(\xi) + C_a \text{Bi}'(\xi)}{\text{Ai}(\xi) + C_a \text{Bi}(\xi)} \right],$$

$$\xi = \sqrt[3]{\frac{\bar{\beta}}{L}} \left(\frac{L}{\bar{\beta}} + \frac{z - L}{2} \right),$$

$$C_a = -\frac{\text{Ai}'(\xi_0) \sqrt[3]{\frac{\bar{\beta}}{L}} - \text{Ai}(\xi_0) (2\psi_0 - 1)}{\text{Bi}'(\xi_0) \sqrt[3]{\frac{\bar{\beta}}{L}} - \text{Bi}(\xi_0) (2\psi_0 - 1)},$$

$$\xi_0 = \sqrt[3]{\frac{\bar{\beta}}{L}} \left(\frac{L}{\bar{\beta}} - \frac{L}{2} \right),$$

$$\psi_{-L} = \Psi(-L), \quad \psi_L = \Psi(L). \quad (33)$$

Если интегральный теплоподвод можно описать по формуле (22) при $f(z) = (1 + e^{\frac{z}{L}})^{-1}$, то скорость $v(z)$ с хорошей точностью описывается полусуммой скоростей, вычисленных по формулам (30) и (32).

Список литературы

- [1] *Van Wie D.M., Wesner A.L., Gauthier L.R.* // Shock Wave Characteristics Measured in Gas Discharges. Proc. of the 3^d Workshop on Weakly Ionized gasses. AIAA-99-4824. Norfolk, 1999.
- [2] *Ganguly B.N., Bletzinger P.* // Weakly Ionized Gases Workshop. Colorado, 1997. Vol. 2. P. НН1–НН13.
- [3] *Бедин А.П., Мишин Г.И.* // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21. Вып. 1. С. 5–7.
- [4] *Климов А.И., Мишин Г.И.* // Письма в ЖТФ. 1990. Т. 16. Вып. 3. С. 960–962.
- [5] *Ganguly B.N., Bletzinger P., Garscadden A.* // Phys. Lett. A. 1998. Vol. 230. P. 218–222.
- [6] *Кучинский В.В., Сухомлинов В.С., Шевелев В.А., Огу-тен М.В.* // Тез. докл. совещания „Перспективы МГД и плазменных технологий в аэрокосмических приложениях“. М.: ИВТ РАН, 2000. С. 307–312.
- [7] *Голятин В.Ю., Кучинский В.В., Сухомлинов В.С.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 4. С. 25–30.
- [8] *Whitham G.B.* // J. Fluid Mech. 1958. N 4. P. 337–360.
- [9] *Вулис Л.А.* Термодинамика газовых потоков. Л.: Госэнергоиздат, 1950. 304 с.