01;05

Модуляционная неустойчивость электромагнитных возбуждений в джозефсоновском переходе в пластине конечной толщины

© А.И. Ломтев

Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина НАН Украины,
83114 Донецк, Украина
e-mail: lomtev@kinetic.ac.donetsk.ua

(Поступило в Редакцию 28 апреля 2004 г.)

В рамках нелокальной электродинамики джозефсоновского перехода в пластине конечной толщины исследована модуляционная неустойчивость осциллирующих с джозефсоновской частотой однородных плоских волн конечной амплитуды с нелинейным сдвигом частоты. Получено дисперсионное уравнение для инкремента нарастания малых амплитудных возмущений. Для указанного типа волн найдены области развития модуляционной неустойчивости. Показано, что модуляционная неустойчивость волн развивается для длинноволновых амплитудных возмущений в конечной области волновых векторов $0 < Q < Q_B(A, D, L)$, а для $Q \geq Q_B(A, D, L)$ волны являются устойчивыми.

До настоящего времени не ослабевает интерес к исследованию модуляционной неустойчивости волн в различных нелинейных системах и средах [1,2]. Известно [3,4], что сжатие нелинейной волны может происходить как в поперечном, так и в продольном направлении по отношению к направлению ее распространения. В качестве примеров можно привести самофокусировку света, предсказанную Аскарьяном [5], неустойчивость типа разбиения волны на пакеты и самосжатия волновых пакетов — модуляционную неустойчивость, которая была впервые изучена Лайтхиллом [6].

Модуляционная неустойчивость электромагнитных волн в распределенных джозефсоновских переходах описывается неустойчивостью решений уравнения sine-Gordon. Наряду с теоретическим интересом явление модуляционной неустойчивости имеет ряд практических приложений. Например, оно используется для генерации цепочек сверхкоротких оптических импульсов с высокой частотой повторения, разработки новых логических устройств.

Во многих ситуациях при исследовании модуляционной неустойчивости необходимо рассматривать пространственно нелокальные модификации уравнения sine-Gordon [7–18]. Из-за различных геометрий задач в перечисленных работах уравнения джозефсоновской электродинамики отличаются видом ядра интегрального оператора, описывающего эффект пространственно-нелокальной связи. Однако во всех этих работах пространственная нелокальность уравнений для разности фаз волновых функций на берегах перехода возникает вследствие нелокальной связи магнитного поля на границе раздела и в сверхпроводнике. Такая причина пространственной нелокальности является универсальной для электродинамики джозефсоновских контактов.

Модуляционная неустойчивость в рамках пространственно-нелокальной джозефсоновской электродинамики контакта из массивных сверхпроводников с большой толщиной $d \gg \lambda$ (λ — лондоновская глубина проникновения) впервые рассмотрена в работе [7]. Показано, что процесс нарастания малых возмущений амплитуды и фазы отвечает развитию модуляционной неустойчивости электромагнитной волны конечной постоянной амплитуды с нелинейным сдвигом частоты и с законом дисперсии мод линейного приближения. Выявлено стабилизирующее влияние пространственной нелокальности на модуляционную неустойчивость. В работе [19] для джозефсоновского перехода также из массивных сверхпроводников с толщиной $d \gg \lambda$ исследована модуляционная неустойчивость осциллирующей с джозефсоновской частотой плоской нелинейной электромагнитной волны конечной амплитуды, обусловленная нарастанием малых амплитудных возмущений и приводящая к разбиению такой волны на пакеты. В работе [20] исследована модуляционная неустойчивость диспергирующих электромагнитных волн, распространяющихся в джозефсоновском переходе, состоящем из массивных сверхпроводников толщины $d \gg \lambda$. Получено дисперсионное уравнение для инкремента нарастания малых амплитудных возмущений. Выявлено стабилизирующее влияние пространственной нелокальности на модуляционную неустойчивость в длинноволновой области. Показано существование возможности управления областью модуляционной неустойчивости дисперсионным параметром k — волновым вектором (или частотой $\omega(k)$) несущей волны линейного приближения.

В противоположном пределе для джозефсоновского перехода в ультратонкой пленке немагнитного и магнитного (двумерного и трехмерного) сверхпроводника толщиной $d \ll \lambda$ в работах [21–23] исследована модуляционная неустойчивость однородных джозефсоновских колебаний конечной амплитуды с нелинейным сдвигом частоты, порождаемая нарастанием малых амплитудных возмущений. В работе [24] в рамках нелокальной джозефсоновской электродинамики исследована модуляционная неустойчивость диспергирующих электромагнитных волн, распространяющихся в джозефсоновском переходе в тонкой сверхпроводящей пленке толщиной $d \ll \lambda$. Для диспергирующих волн выявлено стабилизирующее влияние пространственной нелокальности на модуляционную неустойчивость в длинноволновой области. Продемонстрирована возможность управления областью модуляционной неустойчивости при помощи дисперсионного параметра — волнового вектора k (или частоты $\omega(k)$) волн линейного приближения.

Тем более актуальным представляется исследование развития модуляционной неустойчивости нелинейных электромагнитных возбуждений, распространяющихся в джозефсоновском переходе в пластине конечной толщины (при произвольном отношении d/λ), которое до сих пор не проводилось.

Одной из нелинейных систем, в которых также может проявляться модуляционная неустойчивость, является переход Джозефсона в сверхпроводящей пластине конечной толщины при произвольном отношении d/λ, когда динамика разности фаз волновых функций на берегах контакта $\varphi(x,t)$ в пренебрежении диссипацией и затравочным мейсснеровским током описывается нелинейным интегродифференциальным уравнением sine-Gordon с пространственной нелокальностью [17]

$$\sin\varphi(x,t) + \frac{1}{\omega_J^2}\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\lambda_J^2}{\pi\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-x')\,\frac{\partial\varphi(x',t)}{\partial x'}\,dx', \quad (1)$$

где ω_J и λ_J — джозефсоновские частота и глубина проникновения соответствнно, а интегральное ядро $K(x)$ имеет вид

$$K(x) = K_0\left(\frac{|x|}{\lambda}\right) + \frac{1}{d\lambda^2}\int\limits_0^{\infty}\frac{dkJ_0(kx)}{\kappa^3[\kappa + k\coth(\kappa d)]}. \quad (2)$$

Здесь $K_0(|x|/\lambda)$ и $J_0(kx)$ — функции Макдональда и Бесселя нулевого порядка, $\kappa = (\lambda^{-2}+k^2)^{1/2}$. В формуле (2) первое слагаемое отвечает пределу контакта, состоящего из двух массивных сверхпроводников толщиной $d \gg \lambda$, и является ядром интегрального члена уравнения, впервые полученного в [7] и эксплуатируемого в работе [8]. В противоположном пределе перехода, из ультратонких пленок толщиной $d \ll \lambda$, сумма обоих слагаемых приводит к ядру интегрального члена уравнения, впервые рассмотренного и исследованного в [9–11], полученного позже в работе [12] и равного

$$K(x) = \frac{\lambda_{\text{eff}}}{\pi}\int\limits_0^{\infty} dk\,\frac{1}{1+2k\lambda_{\text{eff}}}\,J_0(kx),$$

где $\lambda_{\text{eff}} = \lambda^2/2d$ — пирловская глубина проникновения.

В линейном приближении при аппроксимации $\sin\varphi(x,t) \approx \varphi(x,t)$ уравнение (1) имеет решение вида однородных джозефсоновских осцилляций с бесконечно малой амплитудой a_0

$$\varphi_0(t) = a_0\exp(\pm i\omega_J t). \quad (3)$$

Нелинейность уравнения (1) порождается синусоидальной зависимостью джозефсоновского тока сквозь переход от разности фаз волновых функций на берегах этого перехода.

При аппроксимации в уравнении (1) $\sin\varphi(x,t) \approx \approx \varphi(x,t) - \varphi(x,t)^3/3!$ рассмотрим эволюцию нелинейных осциллирующих с джозефсоновской частотой ω_J волн малой, но конечной амплитуды типа бризера в переходе. Представим разность фаз $\varphi(x,t)$ в виде

$$\varphi(x,t) = u(x,t)\exp(-i\omega_J t) + u^*(x,t)\exp(i\omega_J t),$$
$$|u(x,t)| \ll 1. \quad (4)$$

Учтем в уравнении (1) нижайший порядок нелинейности на основной частоте ω_J и ограничимся прибилижением медленно меняющейся во времени амплитуды $u(x,t)$, когда справедливо неравенство $|\partial^2 u(x,t)/\partial t^2| \ll 2\omega_J|\partial u(x,t)/\partial t|$. Тогда из уравнения (1) при подстановке в него поля (4) для амплитуды $u(x,t)$ получим нелинейное нелокальное „уравнение Шредингера“

$$i\,\frac{2}{\omega_J}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}|u(x,t)|^2u(x,t) + \frac{\lambda_J^2}{\pi\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-x')\,\frac{\partial u(x',t)}{\partial x'}\,dx' = 0, \quad (5)$$

которое имеет точное решение вида однородной плоской нелинейной волны с постоянной амплитудой A

$$u_0(t) = A\exp(iA^2\omega_J t/4), \quad A \ll 1. \quad (6)$$

Исследуем устойчивость такого решения. О характере распада плоской волны (6) можно судить по развитию ее малых возмущений. С этой целью допустим, что случайно возникло малое возмущение амплитуды $\psi(x,t)$, когда

$$u(x,t) = [A + \psi(x,t)]\exp(iA^2\omega_J t/4), \; |\psi(x,t)| \ll A. \quad (7)$$

Из уравнения (5) для малого возмущения амплитуды $\psi(x,t)$ следует линейное уравнение

$$i\,\frac{2}{\omega_J}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}A^2[\psi(x,t) + \psi^*(x,t)] + \frac{\lambda_J^2}{\pi\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-x')\,\frac{\partial\psi(x',t)}{\partial x'}\,dx' = 0. \quad (8)$$

Полагая в уравнении (8) $\psi(x,t) = v(x,t) + iw(x,t)$, для действительной и мнимой частей возмущения амплитуды получаем систему уравнений

$$\frac{2}{\omega_J}\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \frac{\lambda_J^2}{\pi\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-x')\,\frac{\partial w(x',t)}{\partial x'}\,dx' = 0,$$

$$-\frac{2}{\omega_J}\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + A^2v(x,t) + \frac{\lambda_J^2}{\pi\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-x')\,\frac{\partial v(x',t)}{\partial x'}\,dx' = 0. \quad (9)$$

Для возмущений амплитуды вида (произвольные возмущения можно представить как суперпозицию таких полей)

$$v(x,t) = V(Q,\Omega)\exp\left[i(Qx - \Omega t)\right],$$
$$w(x,t) = W(Q,\Omega)\exp\left[i(Qx - \Omega t)\right] \tag{10}$$

из системы уравнений (9) следует дисперсионное уравнение $\widetilde{\Omega} = \widetilde{\Omega}(\widetilde{Q})$

$$\widetilde{\Omega}^2(\widetilde{Q}) = 2^{-1}L\widetilde{Q}^2 I(\widetilde{Q})\left[2L\widetilde{Q}^2 I(\widetilde{Q}) - A^2\right], \tag{11}$$

где $I(\widetilde{Q})$ определяется соотношением

$$I(\widetilde{Q}) = \frac{1}{\sqrt{1+\widetilde{Q}^2}} + \frac{1}{\pi D}\int_0^\infty (1+\widetilde{Q}^2\cosh^2 x)^{-3/2}\Big[\sqrt{1+\widetilde{Q}^2\cosh^2 x} + \widetilde{Q}\cosh x \coth\Big(D\sqrt{1+\widetilde{Q}^2\cosh^2 x}\Big)\Big]^{-1} dx \tag{12}$$

и также введены безразмерные величины $\widetilde{Q} = \lambda Q$, $\widetilde{\Omega} = \Omega/\omega_J$, $L = \lambda_J^2/2\lambda^2$, $D = d/\lambda$.

Дисперсионное уравнение (11) с учетом соотношения (12) для инкремента нарастания возмущения всегда имеет положительное решение $\mathrm{Im}\,\widetilde{\Omega}(\widetilde{Q}) > 0$ в области волновых векторов $0 < \widetilde{Q} < \widetilde{Q}_B$, в которой малые возмущения амплитуды (10) нарастают со временем, при этом развивается модуляционная неустойчивость однородной плоской нелинейной электромагнитной волны (6). В области волновых векторов $\widetilde{Q} \geq \widetilde{Q}_B$ $\mathrm{Im}\,\widetilde{\Omega}(\widetilde{Q}) \equiv 0$ и волна является устойчивой. Пограничный волновой вектор $\widetilde{Q}_B$ определяется из уравнения

$$\widetilde{Q}_B^2 I(\widetilde{Q}_B) = \frac{A^2}{2L}. \tag{13}$$

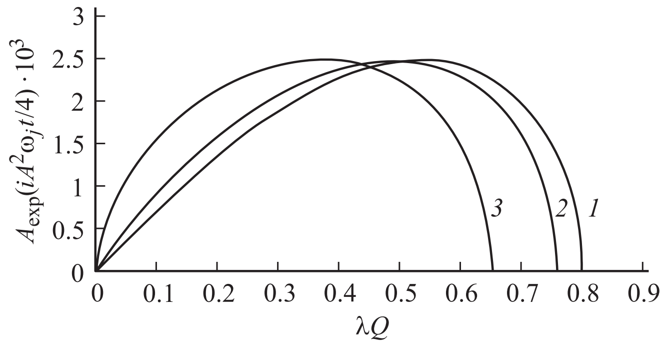
Максимальное значение инкремента нарастания возмущений равно

$$\left(\mathrm{Im}\,\widetilde{\Omega}(\widetilde{Q}_m)\right)_{\max} = \frac{A^2}{4} \tag{14}$$

и достигается при значении волнового вектора $\widetilde{Q}_m$, являющегося корнем уравнения

$$\widetilde{Q}_m^2 I(\widetilde{Q}_m) = \frac{A^2}{4L}. \tag{15}$$

Осциллирующая с джозефсоновской частотой ω_J однородная плоская нелинейная волна в процессе развития модуляционной неустойчивости будет эволюционировать в цепочку импульсов — малоамплитудных бризеров, частота повторения которых определяется периодом модуляции исходной волны $L_0 = 2\pi/Q$, где



Области модуляционной неустойчивости однородной плоской нелинейной электромагнитной волны (6) при фиксированных значениях амплитуды $A = 10^{-1}$ и параметра $L = 10^{-2}$ в зависимости от величины параметра $D = 10^3$ (*1*), 1 (*2*), 10^{-3} (*3*).

$0 < Q < Q_B = \widetilde{Q}_B/\lambda$. Так как мы не рассматривали фазовые возмущения, самосжатия волновых пакетов наблюдаться не будет.

На рисунке показаны области модуляционной неустойчивости однородной плоской нелинейной электромагнитной волны (6) при фиксированных величинах амплитуды A и параметра L для трех значений параметра D. Видно, что с уменьшением параметра D область модуляционной неустойчивости сужается.

Итак, в работе показано, что модуляционная неустойчивость плоской нелинейной волны (6) развивается для длинноволновых амплитудных возмущений в конечной области волновых векторов $0 < Q < Q_B$. Для возмущений амплитуды в области волновых векторов $Q \geq Q_B$ однородная плоская нелинейная электромагнитная волна (6) является устойчивой.

Экспериментально развитие модуляционной неустойчивости возможно наблюдать в длинных переходах Джозефсона в пластинах конечной толщины для произвольного отношения d/λ при возбуждении в них осциллирующих с джозефсоновской частотой волн малой, но конечной амплитуды.

В заключение выражаю благодарность Ю.Е. Кузовлеву за полезные консультации и признательность Ю.В. Медведеву и И.Б. Краснюку за внимание и поддержку.

Список литературы

[1] *Hall B., Lisak M., Anderson D., Semenov V.E.* // Phys. Lett. A. 2004. Vol. 321. N 4. P. 255–262.
[2] *Xu Wen-cheng, Zhang Shu-min, Chen Wei-cheng, Luo Ai-ping, Liu Song-hao.* // Optics Commun. 2001. Vol. 1999. N 5–6. P. 355–360.
[3] *Карпман В.И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 176 с.
[4] *Кадомцев Б.Б.* Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1976. 240 с.
[5] *Аскарьян Г.А.* // ЖЭТФ. 1962. Т. 42. Вып. 6. С. 1567–1572.
[6] *Lighthill M.J.* // J. Inst. Math. Appl. 1965. Vol. 1. N 2. P. 269–273.

[7] *Алиев Ю.М., Силин В.П., Урюпин С.А.* // Сверхпроводимость. 1992. Т. 5. № 2. С. 228–235.
[8] *Gurevich A.* // Phys. Rev. B. 1992. Vol. 46. N 5. P. 3187–3190.
[9] *Иванченко Ю.М., Соболева Т.К.* // Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 51. Вып. 2. С. 100–102.
[10] *Ivanchenko Yu.M., Soboleva T.K.* // Phys. Lett. A. 1990. Vol. 147. N 1. P. 65–69.
[11] *Иванченко Ю.М., Соболева Т.К.* // ФТТ. 1990. Т. 32. Вып. 7. С. 2029–2033.
[12] *Mints R.G., Snapiro I.B.*// Phys. Rev. B. 1995. Vol. 51. N 5. P. 3054–3057.
[13] *Ломтев А.И.* // Письма в ЖЭТФ. 1999. Т. 69. Вып. 2. С. 132–138.
[14] *Ломтев А.И.* // ФТТ. 2000. Т. 42. Вып. 1. С. 16–22.
[15] *Ломтев А.И.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 9. С. 63–67.
[16] *Кулик И.О., Янсон И.К.* Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах. М.: Наука, 1970. 272 с.
[17] *Кузовлев Ю.В., Ломтев А.И.* // ЖЭТФ. 1997. Т. 111. Вып. 5. С. 1803–1809.
[18] *Ломтев А.И.* // ЖЭТФ. 1998. Т. 113. Вып. 6. С. 2256–2262.
[19] *Абдуллаев Ф.Х.* // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23. Вып. 2. С. 8–11.
[20] *Ломтев А.И.* // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. Вып. 4. С. 6–14.
[21] *Ломтев А.И.* // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 8. С. 72–78.
[22] *Ломтев А.И.* // ФТТ. 2003. Т. 45. Вып. 8. С. 1358–1363.
[23] *Ломтев А.И.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 64–68.
[24] *Ломтев А.И.* // ФТТ. 2003. Т. 45. Вып. 12. С. 2131–2135.