

01;03

О временной эволюции формы поверхности, деформированной в начальный момент заряженной капли вязкой жидкости

© А.Н. Жаров, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 14 мая 2004 г.)

В линейном приближении по амплитуде начальной деформации, представленной конечной суммой осесимметричных мод, равновесной сферической формы заряженной капли вязкой несжимаемой жидкости найдено решение задачи о расчете ее капиллярных осцилляций. Показано, что в используемом приближении форма капли как функция времени, а также поля скоростей и давлений жидкости в ней представлены бесконечными рядами по корням дисперсионного уравнения и конечными суммами по номерам изначально возбужденных мод. В асимптотиках малой, умеренной и большой вязкости бесконечные ряды по корням дисперсионного уравнения можно асимптотически корректно заменить конечным числом слагаемых и найти компактные, удобные для дальнейшего анализа аналитические выражения, которые могут быть использованы для отыскания приближений более высоких порядков малости по амплитуде начального отклонения.

1. Исследование капиллярных осцилляций и устойчивости заряженной капли несжимаемой жидкости представляет интерес в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями [1–3], в связи с чем такая задача неоднократно решалась как в линейной, так и в нелинейной постановках. Однако задача аналитического расчета нелинейных осцилляций заряженной капли до сих пор решалась лишь в приближении идеальной жидкости [4–9], нелинейные анализы осцилляций вязких капель до сих пор выполняются лишь численными методами [10,11]. Попытка аналитического асимптотического расчета нелинейных осцилляций капли с произвольной вязкостью, предпринятая в [12], привела к весьма громоздким выражениям на финальной стадии анализа и трудностям чисто математического плана. Представляется, однако, что в предельных ситуациях весьма большой и весьма малой вязкости отмеченные в [12] трудности удастся обойти. В этой связи в настоящем рассмотрении решается задача об исследовании временной эволюции формы заряженной капли вязкой жидкости, деформированной в начальный момент времени, в линейном по амплитуде осцилляций приближении и получаются асимптотики большой и малой вязкости. Следует отметить, что в ранее проведенных рассмотрениях линейных осцилляций заряженной капли вязкой жидкости основным результатом линейной теории являлось дисперсионное уравнение задачи, анализ которого позволял судить о режимах осцилляций и об устойчивости капли [1,13,14], а начальные условия вообще не входили в постановку задачи. Исследования временной эволюции формы осциллирующей капли сводились к выписыванию асимптотических выражений для декрементов затухания. В связи со сказанным проводимый в настоящей работе анализ представляет качественно иной подход к анализу осцилляций капли вязкой жидкости в рамках линейной теории, являясь по сути линейной стадией решения задачи о расчете нелинейных осцилляций вязкой капли.

2. Пусть сферическая капля радиуса r_0 идеально проводящей несжимаемой вязкой жидкости с плотностью ρ , кинематической вязкостью ν , коэффициентом поверхностного натяжения σ несет электрический заряд Q . Поле скоростей течения жидкости в капле обозначим $\mathbf{U}(r, \vartheta, t)$, поле давлений — $P(r, \vartheta, t)$, потенциалы электрического поля в окрестности капли и на ее поверхности обозначим $\phi(r, \vartheta, t)$ и $\phi_S(t)$ соответственно. Уравнение поверхности капли, совершающей осесимметричные осцилляции в любой момент времени t , запишем в сферической системе координат r, ϑ, φ в виде

$$F(r, \vartheta, t) = r - r_0 - \xi(\vartheta, t), \quad (1)$$

с начальным условием

$$t = 0: \quad \xi = \varepsilon \sum_{m \in \Omega} h_m P_m(\mu), \quad \mu \equiv \cos \vartheta, \quad (2)$$

где ε — малый параметр, характеризующий амплитуду начального возмущения; $P_m(\mu)$ — полином Лежандра порядка m ; Ω — множество индексов изначально возбужденных мод; h_m — константы, учитывающие парциальный вклад m -й моды в формирование начальной формы капли, такие что $\sum_{m \in \Omega} h_m = O(1)$.

Математическая формулировка задачи о расчете капиллярных колебаний заряженной капли, форма которой определяется (1), (2), вязкой несжимаемой электропроводной жидкости имеет вид [13,14]

$$\partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{U}; \quad \text{div } \mathbf{U} = 0; \quad \Delta \phi = 0;$$

$$t = 0: \quad \mathbf{U} = 0;$$

$$r \rightarrow 0: \quad \mathbf{U} < \infty;$$

$$r \rightarrow +\infty: \quad \nabla \phi \rightarrow 0;$$

$$r = r_0 + \xi(\vartheta, t): \quad \phi = \phi_S(t); \quad \partial_t F + (\mathbf{U} \cdot \nabla) F = 0;$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{U} &= 0; \\ -p + 2\rho\nu\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} - p_Q + p_\sigma &= 0; \\ \int_S \mathbf{n} \cdot \nabla \phi \, dS &= -4\pi Q; \end{aligned}$$

$$S = \{r, \vartheta, \varphi | r = r_0 + \xi; 0 \leq \vartheta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\};$$

$$\int_V r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{4\pi}{3} r_0^3;$$

$$V = \{r, \vartheta, \varphi | 0 \leq r \leq r_0 + \xi; 0 \leq \vartheta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\};$$

$$\int_V \mathbf{r} r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi = 0,$$

где символ ∂_t означает частную производную по переменной t ; \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$ — единичные векторы нормали и касательной к поверхности капли; p_σ и p_Q — давления сил поверхностного натяжения и электрического поля собственного заряда определяются выражениями

$$p_Q = \frac{1}{8\pi} (\nabla \phi)^2, \quad p_\sigma = \sigma (\nabla \cdot \mathbf{n}).$$

3. Поскольку выписанная система уравнений является нелинейной, то для отыскания ее решения в рамках метода прямого разложения [15] все искомые величины задачи представим в виде рядов по малому параметру ε

$$\xi(\vartheta, t) = \varepsilon \xi^{(1)}(\vartheta, t) + O(\varepsilon^2);$$

$$\mathbf{U}(r, \vartheta, t) = \varepsilon U_r^{(1)}(r, \vartheta, t) \mathbf{e}_r + \varepsilon U_\vartheta^{(1)}(r, \vartheta, t) \mathbf{e}_\vartheta + O(\varepsilon^2);$$

$$p(r, \vartheta, t) = p^{(0)}(r, \vartheta, t) + \varepsilon p^{(1)}(r, \vartheta, t) + O(\varepsilon^2);$$

$$\phi(r, \vartheta, t) = \phi^{(0)}(r, t) + \varepsilon \phi^{(1)}(r, \vartheta, t) + O(\varepsilon^2);$$

$$\phi_S(t) = \phi_S^{(0)}(t) + \varepsilon \phi_S^{(1)}(t) + O(\varepsilon^2).$$

а) Подставляя эти разложения в выписанную систему уравнений и приравнявая коэффициенты при нулевой степени малого параметра, получим систему уравнений нулевого порядка малости

$$\Delta \phi^{(0)} = 0;$$

$$r \rightarrow +\infty: \quad \nabla \phi^{(0)} \rightarrow 0;$$

$$r = r_0: \quad \int_{-1}^1 r_0^2 \partial_r \phi^{(0)} d(\cos \vartheta) = -2Q; \quad \phi^{(0)} = \phi_S^{(0)}(t);$$

$$-p^{(0)} - p_Q^{(0)} + p_\sigma^{(0)} = 0.$$

Решая ее, найдем

$$\phi^{(0)} = \frac{Q}{r}; \quad \phi_S^{(0)} = \frac{Q}{r_0}; \quad p^{(0)} + \frac{Q^2}{8\pi r_0^4} = \frac{2\sigma}{r_0}. \quad (3)$$

б) Выделяя слагаемые, содержащие малый параметр в первой степени, и учитывая векторное тождество [16]

$$\Delta \mathbf{U} = \text{grad}(\text{div } \mathbf{U}) - \text{rot}(\text{rot } \mathbf{U}),$$

получим задачу первого порядка малости, которая будет иметь вид

$$\begin{aligned} \partial_t U_r^{(1)} &= -\frac{1}{\rho} \partial_r p^{(1)} + \nu \left(\frac{1}{r^2} \partial_{\vartheta\vartheta} U_r^{(1)} + \frac{\text{ctg}(\vartheta)}{r^2} \partial_\vartheta U_r^{(1)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r} \partial_{r\vartheta} U_\vartheta^{(1)} - \frac{\text{ctg}(\vartheta)}{r} \partial_r U_\vartheta^{(1)} - \frac{1}{r^2} \partial_\vartheta U_\vartheta^{(1)} - \frac{\text{ctg}(\vartheta)}{r^2} U_\vartheta^{(1)} \right); \end{aligned}$$

$$\partial_t U_\vartheta^{(1)} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \partial_\vartheta p^{(1)} + \nu \left(\partial_{rr} U_\vartheta^{(1)} + \frac{2}{r} \partial_r U_\vartheta^{(1)} - \frac{1}{r} \partial_{r\vartheta} U_r^{(1)} \right);$$

$$\partial_r U_r^{(1)} + \frac{2}{r} U_r^{(1)} + \frac{1}{r} \partial_\vartheta U_\vartheta^{(1)} + \frac{\text{ctg}(\vartheta)}{r} U_\vartheta^{(1)} = 0; \quad \Delta \phi^{(1)} = 0$$

$$t = 0: \quad \xi^{(1)} = \varepsilon \sum_{m \in \Omega} h_m P_m(\mu); \quad \mathbf{U}^{(1)} = 0;$$

$$r \rightarrow 0: \quad \mathbf{U}^{(1)} < \infty; \quad r \rightarrow +\infty: \quad \nabla \phi^{(1)} \rightarrow 0;$$

$$r = r_0: \quad \partial_t \xi^{(1)} = U_r^{(1)}; \quad \partial_r U_\vartheta^{(1)} + \frac{1}{r} \partial_\vartheta U_r^{(1)} - \frac{1}{r} U_\vartheta^{(1)} = 0;$$

$$\begin{aligned} -p^{(1)} + 2\rho\nu \partial_r U_r^{(1)} - \frac{1}{4\pi} \partial_r \phi^{(0)} (\partial_r \phi^{(1)} + \xi^{(1)} \partial_{rr} \phi^{(0)}) \\ - \frac{\sigma}{r_0^2} (2 + \Delta_\Omega) \xi^{(1)} = 0; \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 (r_0 \partial_r \phi^{(1)} + \xi^{(1)} (r_0 \partial_{rr} \phi^{(0)} + 2\partial_r \phi^{(0)})) d(\mu) = 0;$$

$$\phi^{(1)} + \xi^{(1)} \partial_r \phi^{(0)} = \phi_S^{(1)}(t);$$

$$\int_{-1}^1 \xi^{(1)} d(\mu) = 0; \quad \int_{-1}^1 \xi^{(1)} P_1(\mu) d(\mu) = 0, \quad (4)$$

где Δ_Ω — угловая часть оператора Лапласа.

4. В системе (4) выполним преобразование Лапласа по времени, т.е. от функций перейдем к их изображениям [17],

$$F(S) = \int_0^{+\infty} f(t) \exp(-St) dt; \quad f = U_r^{(1)}; \quad f = U_\vartheta^{(1)};$$

$$f = p^{(1)}; \quad f = \xi^{(1)}; \quad f = \phi^{(1)}; \quad f = \phi_S^{(1)}.$$

Изображения Лапласа разложим по бесконечному набору полиномов Лежандра

$$U_r^{(1)}(r, \vartheta, S) = \sum_{n=0}^{+\infty} U_{rn}^{(1)}(r, S) P_n(\mu);$$

$$U_\vartheta^{(1)}(r, \vartheta, S) = \sum_{n=0}^{+\infty} U_{\vartheta n}^{(1)}(r, S) \partial_\vartheta P_n(\mu);$$

$$\xi^{(1)}(\vartheta, S) = \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n^{(1)}(S) P_n(\mu);$$

$$\phi^{(1)}(r, \vartheta, S) = \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n^{(1)}(r, S) P_n(\mu);$$

$$p^{(1)}(r, \vartheta, S) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n^{(1)}(r, S) P_n(\mu). \quad (5)$$

В результате система (4) примет вид

$$SU_{rn}^{(1)}(r, S) = -\frac{1}{\rho} \partial_r p_n^{(1)}(r, S) + \nu n(n+1) \times \left(\frac{1}{r} \partial_r U_{\vartheta n}^{(1)}(r, S) + \frac{1}{r^2} U_{\vartheta n}^{(1)}(r, S) - \frac{1}{r^2} U_{rn}^{(1)}(r, S) \right); \quad (6)$$

$$SU_{\vartheta n}^{(1)}(r, S) = -\frac{1}{\rho r} p_n^{(1)}(r, S) + \nu \left(\partial_{rr} U_{\vartheta n}^{(1)}(r, S) + \frac{2}{r} \partial_r U_{\vartheta n}^{(1)}(r, S) - \frac{1}{r} \partial_r U_{rn}^{(1)}(r, S) \right); \quad (7)$$

$$\partial_r U_{rn}^{(1)}(r, S) + \frac{2}{r} U_{rn}^{(1)}(r, S) - \frac{n(n+1)}{r} U_{\vartheta n}^{(1)}(r, S) = 0; \quad (8)$$

$$r \rightarrow 0: \quad U_{rn}^{(1)}(r, S) < \infty; \quad U_{\vartheta n}^{(1)}(r, S) < \infty; \quad (9)$$

$$r = r_0: \quad S \xi_n^{(1)}(S) - h_n = U_{rn}^{(1)}; \quad (10)$$

$$\partial_r U_{\vartheta n}^{(1)}(r, S) + \frac{1}{r} U_{rn}^{(1)}(r, S) - \frac{1}{r} U_{\vartheta n}^{(1)}(r, S) = 0; \quad (11)$$

$$-p_n^{(1)}(r, S) + 2\rho\nu \partial_r U_{rn}^{(1)}(r, S) - \frac{1}{4\pi} \partial_r \phi^{(0)}(\partial_r \phi_n^{(1)}(r, S) + \xi_n^{(1)}(S) \partial_{rr} \phi^{(0)}) + \frac{\sigma}{r_0^2} (n+2)(n-1) \xi_n^{(1)}(S) = 0; \quad (12)$$

$$\int_{-1}^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n^{(1)}(S) P_n(\mu) d(\mu) = 0;$$

$$\int_{-1}^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n^{(1)}(S) P_n(\mu) P_1(\mu) d(\mu) = 0; \quad (13)$$

$$\partial_{rr} \phi_n^{(1)}(r, S) + \frac{2}{r} \partial_r \phi_n^{(1)}(r, S) - n(n+1) \phi_n^{(1)}(r, S) = 0; \quad (14)$$

$$r \rightarrow +\infty: \quad \partial_r \phi_n^{(1)}(r, S) \rightarrow 0; \quad \phi_n^{(1)}(r, S) \rightarrow 0; \quad (15)$$

$$r = r_0: \quad \int_{-1}^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (r_0 \partial_r \phi_n^{(1)}(r, S) + \xi_n^{(1)}(S) (r_0 \partial_{rr} \phi^{(0)} + 2\partial_r \phi^{(0)}) P_n(\mu) d(\mu) = 0; \quad (16)$$

$$\phi_n^{(1)}(r, S) + \xi_n^{(1)}(S) \partial_r \phi^{(0)} = \phi_S^{(1)}(S) \delta_{n0}, \quad (17)$$

где δ_{n0} — символ Кронекера.

Решение системы (6)–(17) начнем с решения уравнений (13), которые с учетом условия ортогональности полиномов Лежандра приводят к условиям $\xi_0^{(1)}(S) = \xi_1^{(1)}(S) = 0$. Используя эти условия и решение нулевого порядка малости (3), нетрудно найти решение системы уравнений (14)–(17), которое имеет вид

$$\phi_S^{(1)}(S) = 0; \quad \phi_n^{(1)}(r, S) = \frac{Q}{r_0^2} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{n+1} \xi_n^{(1)}(S). \quad (18)$$

Для того чтобы найти поля скоростей жидкости и давления в капле из уравнения неразрывности (8), выразим $U_{\vartheta n}^{(1)}(r, S)$

$$U_{\vartheta n}^{(1)}(r, S) = \frac{r}{n(n+1)} \left(\partial_r U_{rn}^{(1)}(r, S) + \frac{2}{r} U_{rn}^{(1)}(r, S) \right), \quad (19)$$

а из уравнения (22) $p_n^{(1)}(r, S)$

$$p_n^{(1)}(r, S) = -S\rho r U_{\vartheta n}^{(1)}(r, S) + \rho\nu r \left(\partial_{rr} U_{\vartheta n}^{(1)}(r, S) + \frac{2}{r} \partial_r U_{\vartheta n}^{(1)}(r, S) - \frac{1}{r} \partial_r U_{rn}^{(1)}(r, S) \right). \quad (20)$$

Выражения (19) и (20) подставим в (6), после чего оно примет вид [18]

$$\left(\partial_{rr} + \frac{4}{r} \partial_r - \frac{(n-1)(n+2)}{r^2} \right) \times \left(\partial_{rr} + \frac{4}{r} \partial_r - \frac{(n-1)(n+2)}{r^2} - \frac{S}{\nu} \right) U_{rn}^{(1)}(r, S) = 0. \quad (21)$$

Решение уравнения (21), удовлетворяющее условиям ограниченности (9), имеет вид

$$U_{rn}^{(1)}(r, S) = A_n(S) r^{n-1} + B_n(S) \frac{1}{r} j_n \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} r \right), \quad (22)$$

где $A_n(S)$, $B_n(S)$ — произвольные постоянные; j_n — модифицированная сферическая функция Бесселя первого рода порядка n .

Подставляя (22) в (19) и (20), найдем $U_{\vartheta n}^{(1)}(r, S)$ и $p_n^{(1)}(r, S)$

$$U_{\vartheta n}^{(1)}(r, S) = \frac{1}{n(n+1)} \left(A_n(S) (n+1) r^{n-1} + B_n(S) \frac{1}{r} j_n \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} r \right) + B_n(S) \partial_r j_n \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} r \right) \right); \quad (23)$$

$$p_n^{(1)}(r, S) = -A_n(S) \frac{S\rho}{n} r^n. \quad (24)$$

Подставим теперь (3), (18), (22)–(24) в уравнения (10)–(12) и получим систему трех уравнений для отыскания зависимостей $A_n(S)$, $B_n(S)$, $\xi_n^{(1)}(S)$

$$r_0 (S \xi_n^{(1)}(S) - h_n) = A_n(S) r_0^n + B_n(S) j_n(\chi);$$

$$2A_n(S) (n-1)(n+1) r_0^n + B_n(S) ((n-1)(n+2) j_n(\chi)$$

$$+ \chi^2 \partial_{\chi\chi} j_n(\chi)) = 0;$$

$$\omega_n^2 r_0^3 \xi_n^{(1)}(S) + A_n(S) r_0^n (2\nu n(n-1) + r_0^2 S)$$

$$+ 2\nu B_n(S) (\chi \partial_\chi j_n(\chi) - j_n(\chi)) = 0; \quad (25)$$

$$\chi = \sqrt{\frac{S}{\nu}} r_0; \quad \omega_n^2 = \frac{\sigma}{\rho r_0^3} n(n-1) \left(n+2 - \frac{Q^2}{4\pi\sigma r_0^3} \right).$$

Используя рекуррентные соотношения для модифицированных сферических функций Бесселя [19]

$$\partial_\chi j_n(\chi) = j_{n+1}(\chi) + \frac{n}{\chi} j_n(\chi);$$

$$\partial_\chi j_n(\chi) = j_{n-1}(\chi) - \frac{n+1}{\chi} j_n(\chi);$$

$$\partial_{\chi\chi} j_n(\chi) = \left(1 + \frac{n(n-1)}{\chi^2}\right) j_n(\chi) - \frac{2}{\chi} j_{n+1}(\chi);$$

из системы (25) найдем функции $\xi_n^{(1)}(S)$, $A_n(S)$, $B_n(S)$ и, подставляя их в выражения (22)–(24), получим

$$\xi_n^{(1)}(S) = \left(S + 2(n-1)(2n+1) \frac{v}{r_0^2} + 2(n-1)^2(n+1)\right) \times \frac{v}{r_0^2} \left(1 - \frac{\chi}{2} \frac{j_n(\chi)}{j_{n+1}(\chi)}\right)^{-1} \frac{h_n}{D_n(S)};$$

$$U_{rn}^{(1)}(r, S) = \left(\left(2(n^2-1) + \frac{r_0^2 S}{v}\right) \frac{1}{2\chi} \frac{j_n(\chi)}{j_{n+1}(\chi)} - 1\right) \times \left(1 - \frac{\chi}{2} \frac{j_n(\chi)}{j_{n+1}(\chi)}\right)^{-1} \frac{\omega_n^2 h_n}{D_n(S)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1} + 2(n^2-1) \times \left(1 - \frac{2}{\chi} \frac{j_{n+1}(\chi)}{j_n(\chi)}\right)^{-1} \frac{\omega_n^2 v}{r_0 S j_n(\chi)} \frac{h_n}{D_n(S)} \frac{1}{r} j_n\left(\sqrt{\frac{S}{v}} r\right);$$

$$U_{\vartheta n}^{(1)}(r, S) = \left(\left(2(n^2-1) + \frac{r_0^2 S}{v}\right) \frac{1}{2\chi} \frac{j_n(\chi)}{j_{n+1}(\chi)} - 1\right) \times \left(1 - \frac{\chi}{2} \frac{j_n(\chi)}{j_{n+1}(\chi)}\right)^{-1} \frac{\omega_n^2 h_n}{n D_n(S)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1} + 2(n-1) \left(1 - \frac{2}{\chi} \frac{j_{n+1}(\chi)}{j_n(\chi)}\right)^{-1} \frac{\omega_n^2 v}{r_0 S j_n(\chi)} \frac{h_n}{n D_n(S)} \times \left(\frac{n+1}{r} j_n\left(\sqrt{\frac{S}{v}} r\right) + \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{v}} j_{n+1}\left(\sqrt{\frac{S}{v}} r\right)\right);$$

$$p_n^{(1)}(r, S) = -\left(\left(2(n^2-1) + \frac{r_0^2 S}{v}\right) \frac{1}{2\chi} \frac{j_n(\chi)}{j_{n+1}(\chi)} - 1\right) \times \left(1 - \frac{\chi}{2} \frac{j_n(\chi)}{j_{n+1}(\chi)}\right)^{-1} \frac{S \rho \omega_n^2 h_n r^n}{n D_n(S) r_0^{n-1}};$$

$$D_n(S) = S^2 + 2(n-1)(2n+1) \frac{Sv}{r_0^2} + 2(n-1)^2(n+1) \frac{Sv}{r_0^2} \left(1 - \frac{\chi}{2} \frac{j_n(\chi)}{j_{n+1}(\chi)}\right)^{-1} + \omega_n^2. \quad (26)$$

Из выражений (26) видно, что они имеют особые точки, положение которых определяется условием $D_n(S_n^{(k)}) = 0$. Уравнение же $D_n(S_n^{(k)}) = 0$ представляет

собой дисперсионное уравнение задачи и имеет бесконечное число решений, в каждом из которых функция $(1/D_n(S_n^{(k)}))$ имеет полюс первого порядка. Кроме того, каждое из выражений (26) при $S \rightarrow \infty$ стремится к нулю, что позволяет в формуле обратного преобразования Лапласа

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(S) \exp(St) dS$$

интеграл вдоль прямой $\text{Re } S = \gamma$ заменить контурным интегралом, охватывающим всю левую часть комплексной плоскости и применить к этому интегралу теорему о вычетах (Extr). В результате формула обращения примет вид

$$f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \text{Extr}[F(S) \exp(St), S_k]. \quad (27)$$

Подставляя (26) в (5), используя формулу обращения (27) и начальные условия, найдем выражения для отклонения поверхности капли от равновесной сферической и полей давления и скоростей течения жидкости в капле

$$\xi^{(1)}(\vartheta, t) = \sum_{n \in \Omega} \xi_n^{(1)}(t) h_n P_n(\mu);$$

$$U_r^{(1)}(r, \vartheta, t) = \sum_{n \in \Omega} U_{rn}^{(1)}(r, t) h_n P_n(\mu);$$

$$U_\vartheta^{(1)}(r, \vartheta, t) = \sum_{n \in \Omega} U_{\vartheta n}^{(1)}(r, t) h_n \partial_\vartheta P_n(\mu);$$

$$p_n^{(1)}(r, \vartheta, t) = \sum_{n \in \Omega} p_n^{(1)}(r, t) h_n P_n(\mu); \quad (28)$$

где

$$\xi_n^{(1)}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_\xi(S_n^{(k)}) \exp(S_n^{(k)} t);$$

$$U_{rn}^{(1)}(r, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a(S_n^{(k)}) \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1} + b(S_n^{(k)}) \frac{1}{r} \frac{j_n(\eta_n^{(k)} r)}{j_n(\eta_n^{(k)} r_0)} \right) \times \exp(S_n^{(k)} t);$$

$$U_{\vartheta n}^{(1)}(r, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a(S_n^{(k)}) \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1} + b(S_n^{(k)}) \left(\frac{1}{r} \frac{j_n(\eta_n^{(k)} r)}{j_n(\eta_n^{(k)} r_0)} + \frac{\eta_n^{(k)}}{n+1} \frac{j_{n+1}(\eta_n^{(k)} r)}{j_n(\eta_n^{(k)} r_0)} \right) \right) \frac{\exp(S_n^{(k)} t)}{n};$$

$$\eta_n^{(k)} \equiv \sqrt{S_n^{(k)} v^{-1}};$$

$$p_n^{(1)}(r, t) = -\rho r_0 \sum_{k=1}^{+\infty} a(S_n^{(k)}) S_n^{(k)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \frac{\exp(S_n^{(k)} t)}{n};$$

$$\begin{aligned}
a_\xi(S_n^{(k)}) &= \left(S_n^{(k)} + 2(n-1)(2n+1) \frac{\nu}{r_0^2} \right. \\
&+ 2(n-1)^2(n+1) \frac{\nu}{r_0^2} \left(1 - \frac{\chi}{2} \frac{j_n(\chi)}{j_{n+1}(\chi)} \right)^{-1} \left. \right) \frac{1}{\partial_S D_n(S_n^{(k)})}; \\
a(S_n^{(k)}) &= \left(\left(2(n^2-1) + \frac{r_0^2 S_n^{(k)}}{\nu} \right) \frac{1}{2\chi} \frac{j_n(\chi)}{j_{n+1}(\chi)} - 1 \right) \\
&\times \left(1 - \frac{\chi}{2} \frac{j_n(\chi)}{j_{n+1}(\chi)} \right)^{-1} \frac{\omega_n^2}{\partial_S D_n(S_n^{(k)})}; \\
b(S_n^{(k)}) &= 2(n^2-1) \left(1 - \frac{2}{\chi} \frac{j_{n+1}(\chi)}{j_n(\chi)} \right)^{-1} \frac{\omega_n^2 \nu}{r_0 S_n^{(k)} \partial_S D_n(S_n^{(k)})}; \\
\partial_S D_n(S_n^{(k)}) &= 2S_n^{(k)} + 2(n-1)(2n+1) \frac{\nu}{r_0^2} \\
&+ (n-1)^2(n+1) \frac{\nu}{r_0^2} \left(2 + \frac{(2n+1)\chi}{2} \frac{j_n(\chi)}{j_{n+1}(\chi)} \right. \\
&+ \left. \frac{\chi^2}{2} \left(1 - \left(\frac{j_n(\chi)}{j_{n+1}(\chi)} \right)^2 \right) \right) \left(1 - \frac{\chi}{2} \frac{j_n(\chi)}{j_{n+1}(\chi)} \right)^{-2}. \quad (29)
\end{aligned}$$

Отметим, что в выражениях (29), определяющих коэффициенты разложений (28) $\xi_n^{(1)}(t)$, $U_{rn}^{(1)}(r, t)$, $U_{\partial n}^{(1)}(r, t)$, $p_n^{(1)}(r, t)$, суммирование ведется по бесконечному набору корней уравнения $D_n(S_n^{(k)}) = 0$.

5. Рассмотрим случай маловязкой жидкости, т.е. ситуацию, в которой вязкость жидкости является настолько малой, что аргумент сферической модифицированной функции Бесселя принимает достаточно большие значения, чтобы было справедливо асимптотическое разложение [19]

$$\begin{aligned}
j_n(\chi) &= \frac{\exp(\chi)}{2\chi} \left(1 - \frac{n(n+1)}{2\chi} \right. \\
&+ \left. \frac{n(n^2-1)(n+2)}{8\chi^2} + O\left(\frac{1}{\chi^3}\right) \right); \quad \chi \rightarrow \infty. \quad (30)
\end{aligned}$$

Выпишем выражения для $a_\xi(S_n^{(k)})$, $a(S_n^{(k)})$, $b(S_n^{(k)})$, $D_n(S_n^{(k)})$, ограничиваясь двумя первыми слагаемыми в ряде (30)

$$\begin{aligned}
a_\xi(S_n^{(k)}) &= \left(S_n^{(k)} + 2(n-1)(2n+1) \frac{\nu}{r_0^2} + O(\nu^{3/2}) \right) \\
&\times \frac{1}{\partial_S D_n(S_n^{(k)})}; \\
a(S_n^{(k)}) &= - \left(1 + 2(n^2-1) \frac{\nu}{r_0^2 S_n^{(k)}} + O(\nu^{3/2}) \right) \frac{\omega_n^2}{\partial_S D_n(S_n^{(k)})}; \\
b(S_n^{(k)}) &= \left(2(n^2-1) \frac{\nu}{r_0 S_n^{(k)}} + O(\nu^{3/2}) \right) \frac{\omega_n^2}{\partial_S D_n(S_n^{(k)})}; \\
D_n(S_n^{(k)}) &= (S_n^{(k)})^2 + 2(n-1)(2n+1) \frac{S_n^{(k)} \nu}{r_0^2} \\
&+ \omega_n^2 + O(\nu^{3/2}). \quad (31)
\end{aligned}$$

Из (31) видно, что в приближении малой вязкости дисперсионное уравнение $D_n(S_n^{(k)}) = 0$ имеет только два комплексно-сопряженных корня $S_n^+ = -\delta_n + i\omega_n$ и $S_n^- = -\delta_n - i\omega_n$, где $\delta_n = (n-1)(2n+1)\nu/r_0^2$, поэтому в выражениях (29) вместо бесконечных сумм будем иметь сумму по двум значениям $S_n^{(1)} = S_n^+$ и $S_n^{(2)} = S_n^-$. При этом коэффициенты (29) примут более простой вид

$$\begin{aligned}
\xi_n^{(1)}(t) &= \left(\cos(\omega_n t) + \frac{\delta_n}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right) \exp(-\delta_n t); \\
U_{rn}^{(1)}(r, t) &= - \left(\frac{r}{r_0} \right)^{n-1} \left(\omega_n \sin(\omega_n t) - 2(n^2-1) \frac{\nu}{r_0^2} \cos(\omega_n t) \right) \\
&\times \exp(-\delta_n t) - (n^2-1) \frac{\nu}{r_0 r} \left(\frac{j_n(\sqrt{S_n^-} \nu^{-1} r)}{j_n(\sqrt{S_n^-} \nu^{-1} r_0)} \exp(-i\omega_n t) \right. \\
&+ \left. \frac{j_n(\sqrt{S_n^+} \nu^{-1} r)}{j_n(\sqrt{S_n^+} \nu^{-1} r_0)} \exp(i\omega_n t) \right) \exp(-\delta_n t); \\
U_{\partial n}^{(1)}(r, t) &= - \frac{\exp(-\delta_n t)}{n} \left\{ \left(\frac{r}{r_0} \right)^{n-1} \left(\omega_n \sin(\omega_n t) - 2(n^2-1) \right. \right. \\
&\times \left. \left. \frac{\nu}{r_0^2} \cos(\omega_n t) \right) + (n^2-1) \frac{\nu}{r_0 r} \left(\frac{j_n(\sqrt{S_n^-} \nu^{-1} r)}{j_n(\sqrt{S_n^-} \nu^{-1} r_0)} \exp(-i\omega_n t) \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{j_n(\sqrt{S_n^+} \nu^{-1} r)}{j_n(\sqrt{S_n^+} \nu^{-1} r_0)} \exp(i\omega_n t) \right) + (n-1) \frac{\sqrt{\omega_n} \sqrt{\nu}}{r_0} \right. \\
&\times \left(\frac{j_{n+1}(\sqrt{S_n^-} \nu^{-1} r)}{j_n(\sqrt{S_n^-} \nu^{-1} r_0)} \sqrt{-i} \exp(-i\omega_n t) + \frac{j_{n+1}(\sqrt{S_n^+} \nu^{-1} r)}{j_n(\sqrt{S_n^+} \nu^{-1} r_0)} \right. \\
&\times \left. \left. \sqrt{i} \exp(i\omega_n t) \right) + 2(n-1) \frac{\nu}{r_0^2} \left(\frac{j_{n+1}(\sqrt{S_n^-} \nu^{-1} r)}{j_n(\sqrt{S_n^-} \nu^{-1} r_0)} \right. \right. \\
&\times \left. \left. \exp(-i\omega_n t) + \frac{j_{n+1}(\sqrt{S_n^+} \nu^{-1} r)}{j_n(\sqrt{S_n^+} \nu^{-1} r_0)} \exp(i\omega_n t) \right) \right\}; \\
p_n^{(1)}(r, t) &= \rho \omega_n^2 r_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^n \frac{\exp(-\delta_n t)}{n} \\
&\times \left(\cos(\omega_n t) + \frac{(n-1)\nu}{\omega_n r_0^2} \sin(\omega_n t) \right). \quad (32)
\end{aligned}$$

Можно видеть, что в выписанных выражениях оставлены отношения сферических цилиндрических функций, а не заменены согласно (30). Это обстоятельство связано с тем, что в центре капли, при $r \rightarrow 0$, аргументы сферических цилиндрических функций, стоящих в (32) числителях, будут малыми и асимптотическое разложение (30) будет несправедливо.

Отметим, что выражения (32) при стремлении вязкости жидкости к нулю переходят в хорошо известные

выражения, справедливые для идеальной жидкости,

$$\xi_n^{(1)}(t) = \cos(\omega_n t); \quad p_n^{(1)}(r, t) = \frac{\rho \omega_n^2 r_0}{n} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos(\omega_n t);$$

$$U_{rn}^{(1)}(r, t) = -\left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1} \omega_n \sin(\omega_n t);$$

$$U_{\vartheta n}^{(1)}(r, t) = -\left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1} \frac{\omega_n}{n} \sin(\omega_n t).$$

6. Рассмотрим случай умеренно вязкой жидкости, когда в разложении модифицированной сферической цилиндрической функции [19]

$$j_n(\chi) = \frac{\chi^n}{(2n+1)!!} \left(1 + \frac{\chi^2}{1! \cdot 2! \cdot (2n+3)} + \frac{\chi^4}{2! \cdot 2^2 \cdot (2n+3)(2n+5)} + \dots \right) \quad (33)$$

ее аргумент χ достаточно мал, чтобы в выражении, стоящем в скобках, каждый последующий член ряда был меньше предыдущего и выполнялось условие $\text{Re } \chi^2 < 0$, чтобы ряд был знакопеременным, его можно было оборвать на нескольких первых слагаемых, и вместе в тем вязкость такова, что еще существуют периодические осцилляции капли.

Ограничиваясь в (33) первыми двумя слагаемыми, можно найти выражения для коэффициентов $a_\xi(S_n^{(k)})$, $a(S_n^{(k)})$, $b(S_n^{(k)})$ и для $D_n(S_n^{(k)})$ в виде

$$a_\xi(S_n^{(k)}) = \left(\frac{3(4n^3 + 8n^2 + 6n + 3)}{(2n+1)^2(2n+5)} S_n^{(k)} + \frac{2(n-1)(2n^2 + 4n + 3)}{2n+1} \frac{v}{r_0^2} + O\left(\frac{1}{v}\right) \right) \frac{1}{\partial_S D_n(S_n^{(k)})};$$

$$a(S_n^{(k)}) = -\left(\frac{8n^3 + 24n^2 + 22n + 9}{(2n+1)^2(2n+5)} + \frac{2(n^2 - 1)(2n+3)}{2n+1} \frac{v}{S_n^{(k)} r_0^2} + O\left(\frac{1}{v}\right) \right) \frac{\omega_n^2}{\partial_S D_n(S_n^{(k)})};$$

$$b(S_n^{(k)}) = -\frac{2(n^2 - 1)}{2n+1} \left(\frac{2}{(2n+1)(2n+5)} - (2n+3) \frac{v}{r_0^2 S_n^{(k)}} + O\left(\frac{1}{v}\right) \right) \frac{r_0 \omega_n^2}{\partial_S D_n(S_n^{(k)})};$$

$$D_n(S_n^{(k)}) = \frac{3(4n^3 + 8n^2 + 6n + 3)}{(2n+1)^2(2n+5)} (S_n^{(k)})^2 + \frac{2(n-1)(2n^2 + 4n + 3)}{2n+1} \frac{S_n^{(k)} v}{r_0^2} + \omega_n^2 + O\left(\frac{1}{v}\right). \quad (34)$$

Из выражения (34) хорошо видно, что дисперсионное уравнение $D_n(S_n^{(k)}) = 0$ в случае умеренной вязкости

жидкости, как и для случая малой вязкости, имеет только два комплексно-сопряженных корня:

$$S_n^+ = -\delta_n + i\gamma_n; \quad S_n^- = -\delta_n - i\gamma_n;$$

$$\gamma_n = \alpha_n \frac{v}{r_0^2} \sqrt{\beta_n \frac{r_0^4 \omega_n^2}{v^2} - 1}; \quad \delta_n = \alpha_n \frac{v}{r_0^2};$$

$$\alpha_n = \frac{(2n+1)(2n+5)(n-1)(2n^2 + 4n + 3)}{3(4n^3 + 8n^2 + 6n + 3)};$$

$$\beta_n = \frac{3(4n^3 + 8n^2 + 6n + 3)}{(2n+5)(n-1)^2(2n^2 + 4n + 3)^2}. \quad (35)$$

Поэтому в выражениях (29) вместо бесконечной суммы будем иметь сумму по двум значениям $S_n^{(1)} = S_n^+$ и $S_n^{(2)} = S_n^-$. Учитывая это, а также разложения (33) и (34) несложно получить асимптотические выражения для отклонения поверхности капли от равновесной сферической формы и полей скоростей и давлений жидкости в капле

$$\xi_n^{(1)}(t) = \exp(-\delta_n t) \cdot \left(\cos(\gamma_n t) + \frac{\alpha_n v}{r_0^2 \gamma_n} \sin(\gamma_n t) \right);$$

$$U_{rn}^{(1)}(r, t) = \frac{\alpha_n \omega_n^2}{\gamma_n r_0^2} \frac{n+1}{2n^2 + 4n + 3} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1} \left(r^2 - \frac{n(n+2)}{n^2 - 1} r_0^2 \right) \times \exp(-\delta_n t) \sin(\gamma_n t);$$

$$U_{\vartheta n}^{(1)}(r, t) = \frac{\alpha_n \omega_n^2}{\gamma_n r_0^2} \frac{n+3}{(2n^2 + 4n + 3)n} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1} \times \left(r^2 - \frac{n(n+2)}{(n-1)(n+3)} r_0^2 \right) \exp(-\delta_n t) \sin(\gamma_n t);$$

$$p_n^{(1)}(r, t) = \frac{\rho \omega_n^2 r_0}{\gamma_n} \frac{8n^3 + 24n^2 + 22n + 9}{3n(4n^3 + 8n^2 + 6n + 3)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \times \exp(-\delta_n t) \left(\frac{(4n+3)(8n^4 + 28n^3 + 34n^2 + 20n + 9)}{(2n^2 + 4n + 3)(8n^3 + 24n^2 + 22n + 9)} \times \delta_n \sin(\gamma_n t) + \gamma_n \cos(\gamma_n t) \right). \quad (36)$$

7. Наконец, можно выделить область больших значений вязкости (таких, что $v^2/(r_0^4 \omega_n^2) \gg \beta_n$, когда периодические движения жидкости исчезают и капля может совершать только аperiodические движения. Воспользовавшись, как и в предыдущем случае, разложением (33), можно найти, что два корня дисперсионного S_n^+ и S_n^- отределятся выражениями

$$S_n^+ = -\frac{2n+1}{2(n-1)(2n^2 + 4n + 3)} \frac{r_0^2 \omega_n^2}{v}; \quad S_n^- \cong -2\alpha \frac{v}{r_0^2}$$

и в широком диапазоне значений вязкости для них будет справедливо соотношение $|S_n^-| \gg |S_n^+|$ (рис. 1). В такой ситуации при построении асимптотического решения можно вообще ограничиться лишь одним корнем, тем,

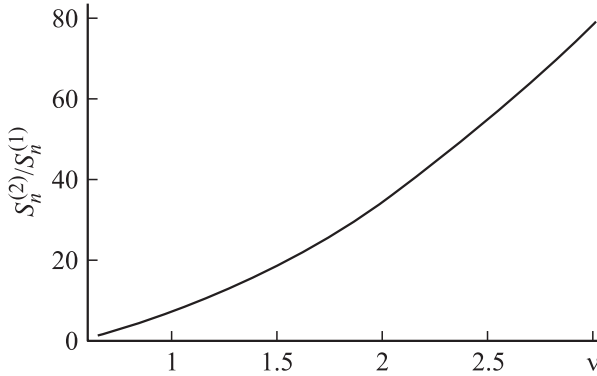


Рис. 1. Зависимость отношения второго $S_n^{(2)}$ и $S_n^{(1)}$ первого корней дисперсионного уравнения $D_n(S_n^{(k)}) = 0$ от безразмерной вязкости жидкости ν , рассчитанная для области большой вязкости, когда периодические движения жидкости в капле исчезают, при $W = 1$, $n = 2$.

величина которого убывает с ростом вязкости S_n^+ . В этом случае выражения (36) примут вид

$$\xi_n^{(1)}(t) = \exp(S_n^+ t);$$

$$p_n^{(1)}(r, t) = \rho \omega_n^2 r_0 \frac{(n+1)(2n+3)}{n(2n^2+4n+3)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \exp(S_n^+ t);$$

$$U_{rn}^{(1)}(r, t) = \frac{\omega_n^2}{2\nu} \frac{n+1}{2n^2+4n+3} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1} \times \left(r^2 - \frac{n(n+2)}{n^2-1} r_0^2\right) \exp(S_n^+ t);$$

$$U_{\partial n}^{(1)}(r, t) = \frac{\omega_n^2}{2\nu} \frac{n+3}{(2n^2+4n+3)n} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1} \times \left(r^2 - \frac{n(n+2)}{(n-1)(n+3)} r_0^2\right) \exp(S_n^+ t). \quad (37)$$

Отметим, что выражения (37) хорошо согласуются с точным решением (29), только в те моменты времени, для которых будет выполнено соотношение $|S_n^-|t \gg 1$. При малых же временах, когда величина $|S_n^-|t$ сравнима с единицей, получающиеся решения для компонент поля скорости ($U_{rn}^{(1)}(r, t)$, $U_{\partial n}^{(1)}(r, t)$) очень сильно отличаются от своих истинных значений и пользоваться (37) нельзя.

8. Для удобства численного анализа полученного решения задачи о капиллярных колебаниях заряженной осесимметричной вязкой капли перейдем к безразмерным переменным, принимая $\rho = \sigma = r_0 = 1$. Тогда все физические величины задачи будут выражаться в своих характерных масштабах. Так, масштабами длины, плотности, времени, частоты, скорости, давления и кинематической вязкости будут соответственно величины: r_0 , ρ , $\sqrt{\rho r_0^3 / \sigma}$, $\sqrt{\sigma / \rho r_0^3}$, $\sqrt{\sigma / \rho r_0}$, σ / r_0 , $\sqrt{\sigma r_0 / \rho}$.

Примем, что радиус каплей меняется в пределах от $r_0 = 10^{-4}$ до 10^{-1} см. Поверхностное натяжение и плотность жидкостей в среднем составляют $\sigma = 50$ dyne/cm и $\rho = 1$ g/cm³. При принятых значениях физических параметров характерный масштаб измерения времени составит $5 \cdot 10^{-7} - 10^{-3}$ s, масштаб измерения частоты $2 \cdot 10^2 - 10^7$ s⁻¹, масштаб измерения скорости 20–700 cm/s, масштаб давления $5 \cdot 10^2 - 5 \cdot 10^5$ dyne/cm, масштаб вязкости $7 \cdot 10^{-2} - 2$ cm²/s.

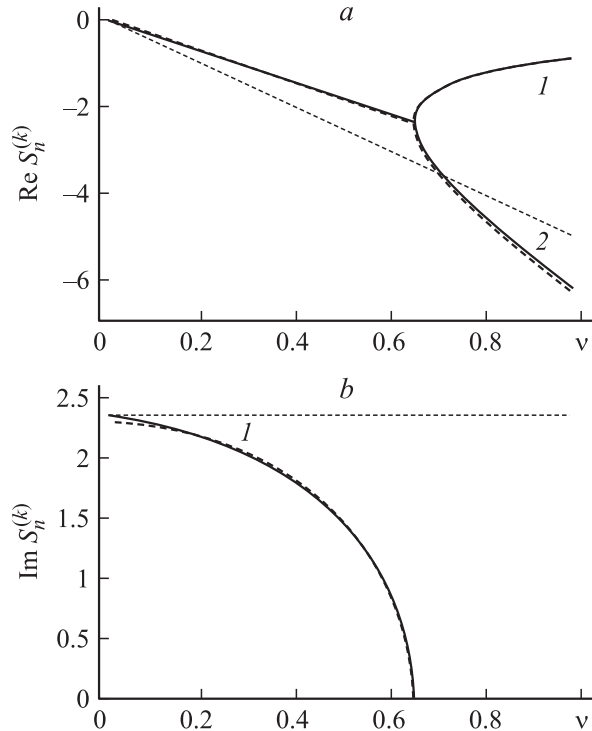


Рис. 2. Зависимости вещественной $\text{Re}(S_n^{(k)})$ (a) и мнимой $\text{Im}(S_n^{(k)})$ (b) компонент корней уравнения $D_n(S_n^{(k)}) = 0$ от безразмерной вязкости жидкости ν , рассчитанные при $W = 1$, $n = 2$ и различных k . Номер у кривой совпадает с номером корня k . Сплошная кривая — точное решение, пунктир — приближение маловязкой жидкости, штриховая — приближение умеренно вязкой жидкости.

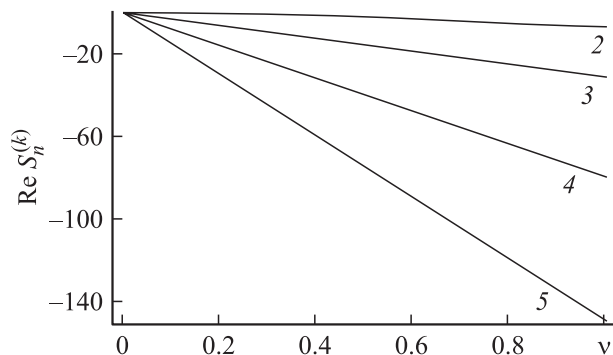


Рис. 3. Зависимости вещественных $\text{Re}(S_n^{(k)})$ компонент корней точного дисперсионного уравнения $D_n(S_n^{(k)}) = 0$ от безразмерной вязкости жидкости ν , рассчитанные при $W = 1$, $n = 2$ и различных k . Номер у кривой совпадает с номером корня k .

Величины безразмерных значений корней $S_n^{(k)}$ дисперсионного уравнения $D_n(S_n^{(k)}) = 0$ и коэффициентов $a_\xi(S_n^{(k)})$, $a(S_n^{(k)})$, $b(S_n^{(k)})$, вычисленные при $n = 2$, $W = 1$ и различных значениях безразмерной вязкости ν

k	$S_n^{(k)}$	$a_\xi(S_n^{(k)})$	$a(S_n^{(k)})$	$b(S_n^{(k)})$
$\nu = 0.01$				
1	$-0.04721 + 2.44660i$	$0.50072 - 0.00936i$	$0.03201 + 1.22244i$	$-0.03274 + 0.00305i$
2	$-0.04721 - 2.44660i$	$0.50072 + 0.00936i$	$0.03201 - 1.22244i$	$-0.03274 - 0.00305i$
3	-0.28228	-0.00061	0.01319	-0.01301
4	-0.78440	-0.00039	0.00350	-0.00319
5	-1.47743	-0.00024	0.00164	-0.00129
6	-2.36657	-0.00012	0.00083	-0.00055
7	-3.45262	-0.00005	0.00041	-0.00024
8	-4.73585	-0.00002	0.00020	-0.00011
9	-6.21638		0.00010	-0.00005
10	-7.89426		0.00005	-0.00003
11	-9.76952		0.00003	-0.00001
12	-11.84215		0.00002	
$\nu = 0.1$				
1	$-0.39951 + 2.36952i$	$0.50799 - 0.07524i$	$0.36731 + 1.12760i$	$-0.39198 + 0.10615i$
2	$-0.39951 - 2.36952i$	$0.50799 + 0.07524i$	$0.36731 - 1.12760i$	$-0.39198 - 0.10615i$
3	-2.91160	-0.01548	0.09730	-0.05222
4	-7.87661	-0.00045	0.00671	-0.00317
5	-14.78764	-0.00003	0.00099	-0.00048
6	-23.67140		0.00023	-0.00011
7	-34.52866		0.00007	-0.00004
8	-47.35961		0.00003	-0.00001
9	-62.16433		0.00001	
$\nu = 1$				
1	-0.90254	1.16747	8.81096	-9.86465
2	-6.21851	-0.16697	-0.43380	1.47210
3	-29.93916	-0.00050	0.02192	-0.00703
4	-78.80501		0.00078	-0.00035
5	-147.88167		0.00010	-0.00005
6	-236.71521		0.00002	-0.00001

При использованном обезразмеривании все величины задачи будут зависеть от параметра $W = Q^2/(4\pi)$, характеризующего устойчивость капли по отношению к собственному заряду [1]; безразмерной кинематической вязкости жидкости ν ; малого параметра ε ; множества значений индексов изначально возбужденных мод Ω и констант h_n ($n \in \Omega$), учитывающих парциальный вклад n -й моды в формирование начальной формы капли.

Численный анализ точного дисперсионного уравнения (см. (26)) $D_n(S_n^{(k)}) = 0$, проведенный при использованном обезразмеривании, указывает на то, что оно имеет бесконечное число корней. Среди корней дисперсионного уравнения при малой и умеренной вязкости ν и $W < 4$ имеются два комплексно-сопряженных корня $S_n^{(1)}$ и $S_n^{(2)}$ с отрицательной вещественной частью, мнимая часть $\text{Im}(S_n^{(2)}) = -\text{Im}(S_n^{(1)})$ которых определяет частоту колебаний поверхности капли (см. выражения (29)), а вещественная $\text{Re}(S_n^{(1)}) = \text{Re}(S_n^{(2)})$ — декремент затухания. Остальные корни $S_n^{(k)}$ уравнения $D_n(S_n^{(k)}) = 0$ с $k \geq 3$ являются отрицательными вещественными и определяют декременты затухания.

Вещественные части корней $S_n^{(1)}$ и $S_n^{(2)}$ при увеличении вязкости жидкости увеличиваются по абсолютной величине, а мнимые уменьшаются до полного исчезновения периодического движения при $\nu \approx 0.65$ (рис. 2). При $\nu > 0.65$ корни $S_n^{(1)}$ и $S_n^{(2)}$ оба становятся чисто вещественными отрицательными, один из которых убывает по абсолютной величине, асимптотически приближаясь к оси абсцисс с ростом ν (как показано на рис. 2), а другой увеличивается по модулю, асимптотически стремясь к линейному росту с увеличением вязкости (рис. 2 и 3). Корни $S_n^{(k)}$ с более высокими номерами k с увеличением вязкости жидкости быстро уменьшаются по линейному закону (рис. 2).

На основе рис. 2, б можно провести разграничение между приближениями малой, умеренной и большой вязкостей. Из рис. 2, б видно, что при $\nu > 0.1$ различие между точным решением дисперсионного уравнения и приближением умеренной вязкости весьма мало (порядка толщины линии). При $\nu < 0.05$ частота осцилляций вязкой капли лучше аппроксимируется приближением маловязкой жидкости, тогда как приближение умерен-

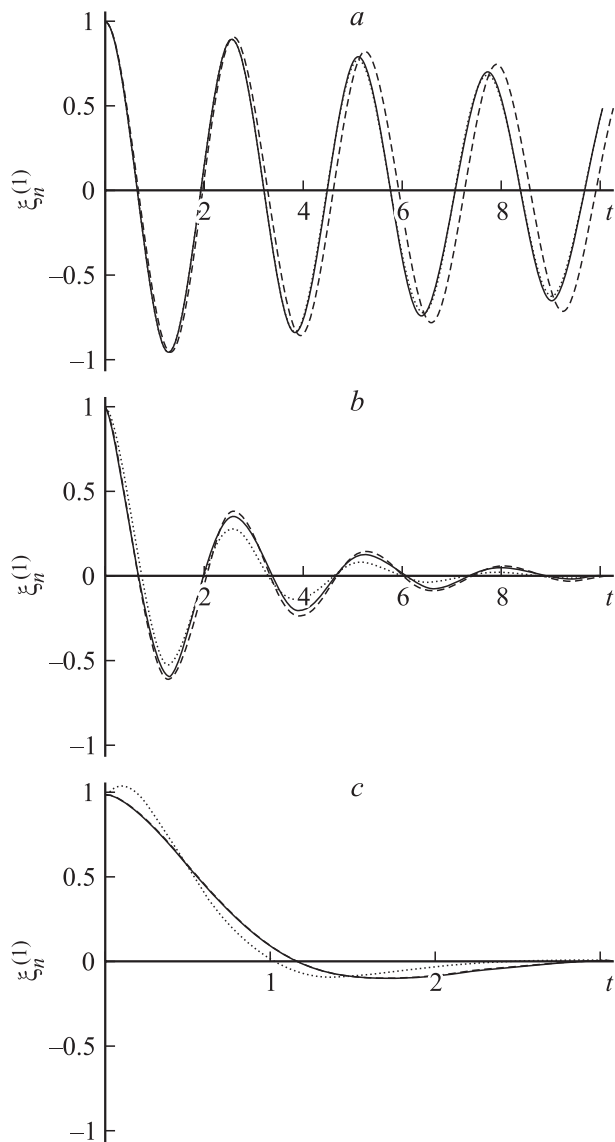


Рис. 4. Зависимость безразмерного коэффициента $\xi_n^{(1)}$ от безразмерного времени t , построенная при $W = 1$, $n = 2$. Сплошная кривая — точное выражение, пунктир — приближение малой вязкости жидкости, штриховая — приближение умеренно вязкой жидкости: a — $\nu = 0.01$, b — $\nu = 0.1$, c — $\nu = 0.4$. Когда пунктир или штриховая кривая не просматриваются, они совпадают со сплошной линией.

ной вязкости дает заниженное значение частоты в пределе $\nu \rightarrow 0$. Приближение большой вязкости естественно обозначится условием исчезновения периодических решений $\nu > 0.65$.

Численные расчеты (см. таблицу) указывают, что при увеличении номера k корня дисперсионного уравнения $D_n(S_n^{(k)}) = 0$ коэффициенты $a_\xi(S_n^{(k)})$, $a(S_n^{(k)})$, $b(S_n^{(k)})$, определяющие форму поверхности осциллирующей капли, поля скоростей и давления в ней (см. (28)–(29)), быстро стремятся к нулю, причем скорость их стремления к нулю зависит от вязкости жидкости.

Отметим также, что, согласно (29), коэффициенты $a_\xi(S_n^{(k)})$, $a(S_n^{(k)})$, $b(S_n^{(k)})$ экспоненциально уменьшаются со временем, причем декременты затухания, равные $\text{Re}(S_n^{(k)})$, с увеличением номера k быстро увеличиваются (см. таблицу). Поэтому члены рядов (29) с большими номерами k весьма быстро стремятся к нулю с ростом времени и определяющими становятся члены, соответствующие первым двум корням уравнения $D_n(S_n^{(k)}) = 0$, имеющие минимальные величины декрементов затухания. В итоге имеется хорошее численное согласие точных выражений (28) с приближенными, полученными в асимптотиках малой (32) и умеренной (36) вязкостей жидкости (рис. 4).

Представляется, что для дальнейшего нелинейного анализа целесообразно использовать приближение умеренной вязкости, которое в приближениях второго и третьего порядков малости по амплитуде начальной деформации приведет к вполне разрешаемым неоднородным задачам.

Заключение

Проведенный анализ решений задачи о расчете временной эволюции капиллярных осцилляций заряженной капли вязкой несжимаемой электропроводной жидкости, полученных в первом порядке малости по амплитуде начальной деформации, показал, что при записи аналитического решения для формы капли, полей скоростей и давлений в ней бесконечное суммирование по корням дисперсионного уравнения может быть оборвано на первых двух слагаемых. Получающиеся при этом аналитические решения достаточно компактны, чтобы сделать актуальным поиск решений более высоких порядков малости, т.е. решения до сих пор не решенной задачи о расчете нелинейных осцилляций заряженной капли вязкой жидкости.

Работа выполнена при поддержке президента РФ (грант № МК-2946-2004-1) и РФФИ (грант № 03-01-00760).

Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [2] Григорьев А.И. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 5. С. 22–27.
- [3] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЭОМ. 2000. № 4. С. 17–28.
- [4] Tsamopoulos J.A., Brown R.A. // J. Fluid Mech. 1983. Vol. 127. P. 519–537.
- [5] Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 3. С. 173–184.
- [6] Ширяева С.О. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 4. С. 15–22.
- [7] Ширяева С.О. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 2. С. 19–30.
- [8] Жаров А.Н., Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 9. С. 75–82.
- [9] Жаров А.Н., Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 12. С. 9–19.

- [10] *Basaran J.A.* // J. Fluid Mech., 1992. Vol. 241. P. 169–198.
- [11] *Becker E., Hiller W.J., Kowalewski T.A.* // J. Fluid Mech., 1994. Vol. 258. P. 191–216.
- [12] *Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Световой В.Б., Григорьев А.И.* Препринт ИМИ РАН. № 1. Ярославль, 2001. 87 с.
- [13] *Григорьев А.И., Лазарянец А.Э.* // ЖВММФ. 1992. Т. 32. № 6. С. 929–938.
- [14] *Ширяева С.О., Лазарянец А.Э., Григорьев А.И.* и др. Препринт ИМИ РАН. № 27. Ярославль, 1994. 128 с.
- [15] *Найфе А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
- [16] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1973. 832 с.
- [17] *Диткин В.А., Прудников А.П.* Операционное исчисление. М.: Высшая школа, 1975. 408 с.
- [18] *Левачева Г.А., Манькин Э.А., Полуэктов П.П.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 2. С. 17–22.
- [19] *Справочник по специальным функциям* / Под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.