

01;05

Моделирование электрофизических характеристик диэлектрической среды с периодической структурой

© Ю.П. Емец

Институт электродинамики НАН Украины,
03680 Киев, Украина
e-mail: emets@irpen.kiev.ua

(Поступило в Редакцию 16 марта 2004 г.)

Изучены особенности дисперсии эффективной диэлектрической проницаемости двух неоднородных матричных систем с однонаправленными волокнами квадратного сечения. Для аналитического исследования частотных зависимостей предложены интерполяционные формулы эффективной диэлектрической проницаемости, область приложения которых определена физическим моделированием и сравнением с известными точно разрешимыми системами. Установлен аномальный характер изменения эффективного коэффициента электрических потерь в окрестности критической концентрации включений.

Введение

В работе исследуется дисперсия диэлектрической проницаемости двумерных кусочно-однородных сред с предельно высокими концентрациями волокнистых включений, свойства которых сильно отличаются от свойств матрицы. Материалы с критическими параметрами претерпевают переходы диэлектрик–металл. Методы электрической спектроскопии позволяют установить отличительные особенности, присущие эффективной диэлектрической проницаемости неоднородных систем в критической области параметров, и тем самым представляют возможность правильно интерпретировать опытные данные.

Исследования предполагают, что известны точные аналитические выражения эффективной диэлектрической проницаемости неоднородных структур с переменным составом компонентов вплоть до предельных значений. Таких решений, к сожалению, немного; среди них наиболее подробно изучены матричные среды с двоякопериодическим распределением однонаправленных волокон цилиндрического сечения (см., например, [1–3]). Однако полученные выражения эффективной диэлектрической проницаемости при больших концентрациях включений принимают громоздкий и плохо обозримый вид. После перехода к комплексным величинам проницаемости вычислительные процессы во много раз возрастают. Возникающие сложности иногда удается преодолеть с помощью приближений, предполагающих использование интерполяционных формул. Такой подход принят в настоящей работе. Показано, что предложенные для рассматриваемых систем интерполяционные формулы просты и их удобно применять в спектральном анализе; при этом они обеспечивают приемлемую точность определения эффективных параметров.

Интерполяционные формулы получены на основе дискретного представления неоднородных структур. Для этого фундаментальная периодическая область разделяется на малые ячейки, которые, будучи электрически

связанными между собой, образуют системы с последовательным, параллельным и смешанным соединениями и легко рассчитываются. Полученные таким образом выражения эффективной диэлектрической проницаемости отвечают общим требованиям. В самом деле, они удовлетворяют соотношениям взаимности (теореме Келлера) и другим условиям теории эффективных параметров неоднородных сред; они также совпадают со всеми известными точными решениями. Моделирование на проводящей бумаге подтверждает правильность интерполяционных формул в широком диапазоне изменения параметров. Ограничения, накладываемые на интерполяционные формулы, естественно вытекают из способа их получения. Они дают лишь дискретные значения эффективной диэлектрической проницаемости. Причем при малой концентрации включений соответствующие точки отстоят друг от друга на сравнительно больших расстояниях (измеряемых на оси, определяющей концентрацию). Однако по мере увеличения концентрации включений интервалы между двумя соседними точками уменьшаются и в пределе стремятся к нулю при приближении к критической точке. Следует также отметить, что интерполяционные формулы получены не строгим методом, поэтому область их приложения не очерчена точными пределами. Надо полагать, что с увеличением списка аналитически разрешимых задач этот пробел будет постепенно устранен.

Исследуются две матричные системы с двоякопериодической решеткой однонаправленных волокон квадратного сечения: одна с квадратным, а другая с шахматным расположением волокон. Системы имеют разные критические составы: в первом случае среда переходит в однородное состояние, определяемое свойствами включений; во втором в критической точке фазы занимают равные объемы (в поперечном сечении к волокнам — равные площади). Структурные различия систем приводят к различным зависимостям эффективной диэлектрической проницаемости в окрестности критической точки, что, как показано, находит свое отражение в электрическом спектре изучаемых неоднородных материалов.

Система с квадратным расположением включений

Фрагмент неограниченной в пространстве системы показан на рис. 1. В матрице с диэлектрической проницаемостью ε_1 распределены с двоякопериодическим чередованием однонаправленные волокна квадратного сечения. Волокна имеют проницаемость ε_2 . В плоскости, нормальной к осям волокон, система двумерна и при осреднении ее характеристик обладает изотропными свойствами.

При увеличении поперечных размеров волокон (их сечения) концентрация включений в системе s возрастает и в пределе принимает критическое значение $s_c = 1$, при котором двухкомпонентный материал превращается в однофазный с проницаемостью ε_2 .

Чтобы записать выражение эффективной диэлектрической проницаемости изучаемой неоднородной среды, необходимо рассмотреть периодическую ячейку системы, выделенную на рис. 1 пунктиром. Она представляет собой квадрат, который содержит одно включение. Такая ячейка преобразованиями трансляции по координатным осям прямоугольной системы координат сплошь покрывает всю плоскость без промежутков.

Периодическая ячейка делится сеткой мелких квадратов таким образом, чтобы между включением и граничным контуром ячейки был расположен только один слой квадратов. Этим условием определен их масштаб. Вычисления предполагают, что включение разделено на целое число малых квадратов. Ясно, что чем больше размеры включения и, следовательно, больше концентрация дополнительной фазы, тем на более мелкие квадраты должна быть разделена периодическая ячейка.

В целом фундаментальная периодическая ячейка разделена на $(n+2)^2$ квадратов, включение содержит n^2 квадратов, где n — целое число; $n = 0, 1, 2, \dots$. При

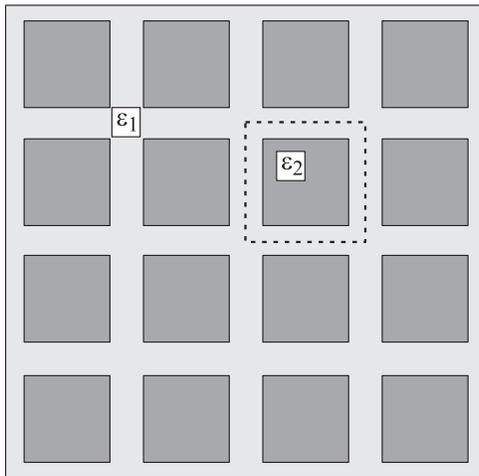


Рис. 1. Фрагмент композитного диэлектрического материала с квадратной укладкой длинных волокон квадратного сечения. Пунктир — расчетная ячейка.

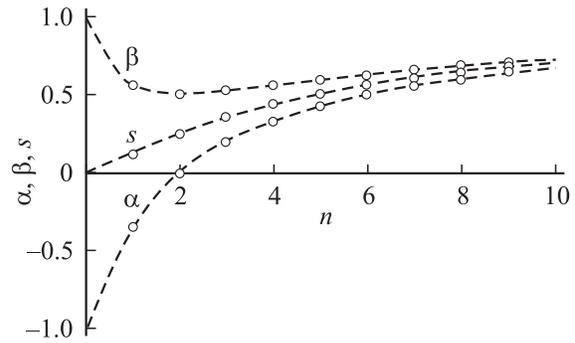


Рис. 2. Зависимости функций $\alpha(n)$, $\beta(n)$ и концентрации включений $s(n)$ от начальных значений n .

$n = 0$ включение отсутствует; если $n \rightarrow \infty$, то включение заполняет всю ячейку и среда переходит в однородный состав с диэлектрической проницаемостью ε_2 . Концентрация включений определяется формулой

$$s = \left(\frac{n}{n+2} \right)^2 \quad (0 \leq s \leq s_c), \quad (1)$$

где s_c — критическая концентрация включений, $s_c = 1$.

Согласно формуле (1) концентрация включений принимает дискретные значения через разные интервалы, которые при непрерывном увеличении числа n неограниченно уменьшаются.

Вычисления, схема которых кратко описана в конце настоящего раздела, дают следующее выражение эффективной диэлектрической проницаемости рассматриваемой неоднородной системы

$$\varepsilon_{\text{eff}} = \varepsilon_1 \left[\frac{1 - \alpha\Delta}{1 + \alpha\Delta} \frac{1 - \beta\Delta}{1 + \beta\Delta} \right]^{1/2}. \quad (2)$$

Здесь α и β — функции числа n

$$\alpha = \frac{n-2}{n+2}, \quad \beta = \frac{n^2+4}{(n+2)^2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots); \quad (3)$$

Δ — относительная диэлектрическая проницаемость

$$\Delta = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \quad (-1 \leq \Delta \leq 1). \quad (4)$$

Функции α , β и s связаны между собой алгебраическими соотношениями

$$\alpha^2 - 2\beta + 1 = 0, \quad s = \frac{1}{2}(\alpha + \beta). \quad (5)$$

Зависимости $\alpha(n)$, $\beta(n)$ и $s(n)$ для первых десяти значений n графически показаны на рис. 2. Функция $\beta(n)$, как видно, имеет минимум, $\beta_{\min} = 1/2$ при $n = 2$; в этом случае $\alpha = 0$ и $s = 1/4$. При неограниченном росте n все три функции $\alpha(n)$, $\beta(n)$ и $s(n)$ стремятся к одному и тому же пределу

$$\alpha, \beta, s \rightarrow 1 \quad (6)$$

с асимптотическим представлением

$$\alpha, \beta, s \approx 1 - \frac{4}{n}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Отметим некоторые основные свойства, характеризующие выражение эффективной диэлектрической проницаемости (2).

1. Выражение (2) удовлетворяет соотношению взаимности (теореме Келлера)

$$\varepsilon_{\text{eff}}(\Delta)\varepsilon_{\text{eff}}(-\Delta) = \varepsilon_1^2. \quad (8)$$

2. Выполняется условие однородности первого порядка

$$\varepsilon_{\text{eff}}(k\varepsilon_1, k\varepsilon_2) = k\varepsilon_{\text{eff}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \quad (9)$$

где k — произвольная постоянная.

Соотношение (9) является следствием линейности уравнений электрического поля.

3. Из мультипольных разложений следует, что выражение эффективной диэлектрической проницаемости должно удовлетворять дифференциальному соотношению

$$\left. \frac{d}{d\Delta} \left(\frac{\varepsilon_{\text{eff}}}{\varepsilon_1} \right) \right|_{\Delta=0} = -2s. \quad (10)$$

Это условие также выполняется.

4. Если концентрация включений принимает значения $s = 0$ ($n = 0$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$), или $s = s_c = 1$ ($n \rightarrow \infty$, $\alpha = \beta = 1$), то среда становится однородной с диэлектрической проницаемостью соответственно ε_1 и ε_2 .

5. При концентрации включений $s = 1/4$ ($\alpha = 0$, $\beta = 1/2$) выражение эффективной диэлектрической проницаемости (2) упрощается, принимая вид

$$\varepsilon_{\text{eff}} = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{2 - \Delta}{2 + \Delta}}. \quad (11)$$

Эта формула была получена Обносовым из точного решения краевой задачи [4]. Как можно убедиться, формула (11) имеет наиболее простой вид из всех возможных содержательных ее представлений. Неудивительно поэтому, что именно для данного случая было найдено точное выражение эффективного параметра. Попытки получения других точных решений исследуемой системы, насколько известно автору, не были столь успешными. Результаты численных расчетов рассматриваемой системы при концентрации $s = 1/4$, приведенные в книге Бахвалова и Панасенко [5, с. 132, рис. 11, б] для параметров $\varepsilon_1 = 1$ и $\varepsilon_2 = 10$ ($\Delta = -9/11$), показали, что $\varepsilon_{\text{eff}} = 1.548$. Вычисления по формуле (11) дают $\varepsilon_{\text{eff}} = 1.5442$, что свидетельствует об исключительно хорошем совпадении результатов аналитического и численного расчетов.

6. При концентрации включений, близкой к критической $s \rightarrow s_c$, ($n \rightarrow \infty$), выражение (2) в соответствии с асимптотическими формулами (7) имеет представление

$$\varepsilon_{\text{eff}} \approx \varepsilon_1 \frac{1 - s\Delta}{1 + s\Delta}. \quad (12)$$

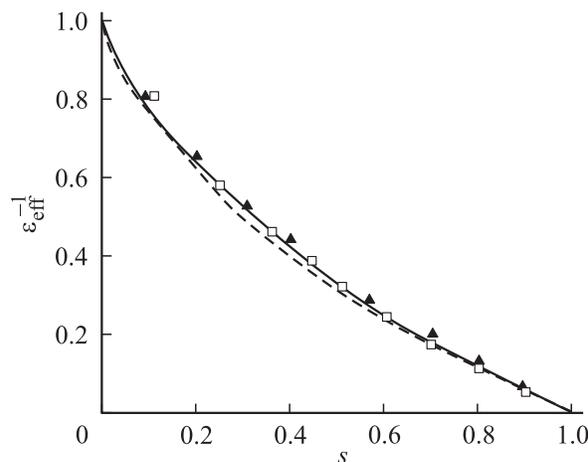


Рис. 3. Функция $\varepsilon_{\text{eff}}^{-1}(s)$, построенная по формуле (2) при $\Delta = -1$ для системы, показанной на рис. 1 (сплошная линия). Пунктир построен по точному решению из работы [8]. Светлые квадраты и темные треугольники — результаты двух различных экспериментов.

Совершенно иным методом эта формула (12) была получена в работе [6] (в терминах теории теплопроводности; при ее выводе краевая задача решалась методами теории возмущений с применением двухточечной аппроксимации Паде). Экспериментальные исследования показывают, что формула (12) имеет довольно высокую точность для всех значений s при $\Delta = -1$ [7].

7. Значения эффективной диэлектрической проницаемости, определяемые выражением (2), подтверждаются опытными данными, которые получены с помощью физического моделирования изучаемой системы на электропроводной бумаге. Моделирование основано на наличии хорошо известной аналогии, существующей между электростатическим полем и электрическим полем стационарных токов в проводящей среде. Результаты экспериментов графически представлены на рис. 3.

Сплошная кривая на рис. 3 определяет значения функции $\varepsilon_{\text{eff}}^{-1}(s) = \varepsilon_{\text{eff}}^{-1}(s)/\varepsilon_1$, построенной по формуле (2) в случае идеально проводящего включения, $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$ ($\Delta = -1$) (звездочка, указывающая относительность значений функции, опущена). Экспериментальные значения указаны светлыми квадратами. Кроме того, для рассматриваемых условий на рисунке показаны данные экспериментов, взятые из [6] (заимствованные в свою очередь из работы [7]). Экспериментальные значения в последнем случае представлены треугольниками. В целом вычисления по интерполяционной формуле (2) хорошо согласуются с экспериментальными данными. Наибольшие расхождения между опытными и расчетными значениями эффективной диэлектрической проницаемости наблюдаются при малой концентрации включений $s < 0.2$.

Пунктир на рис. 3 построен для принятых условий по формулам точного решения задачи, полученного в работе [8]. В точном решении фигурируют гипергеомет-

рические функции, которые вычислялись приближенно методом квадратур при сохранении трех членов ряда, что, как оказалось, недостаточно. При более высоких степенях приближения точное решение совпадает с результатами экспериментов на моделях во всем диапазоне изменения концентрации включений.

Интерполяционная формула (2) относительно проста, особенно в случае больших концентраций включений (см. асимптотическое представление (12)), поэтому ее удобно использовать в исследованиях дисперсии диэлектрической проницаемости сильнонеоднородных сред.

Чисто алгебраический способ получения интерполяционной формулы (2) предполагает следующую процедуру. Фундаментальная периодическая ячейка системы делится на элементарные квадратные блоки так, как это было описано в начале настоящего раздела. Последовательно объединенные квадратные элементы образуют слои, которые соединены параллельно. Две такие схемы можно получить, когда внешнее электрическое поле в периодической ячейке в одном случае направлено вдоль горизонтальной оси, оси x , а в другом — вдоль вертикальной оси, оси y . В результате для двух схем получаем два выражения эквивалентных диэлектрических проницаемостей $\varepsilon'_e(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и $\varepsilon''_e(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Эффективную диэлектрическую проницаемость ячейки можно представить симметричным тензором с диагональными членами $\varepsilon'_e(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и $\varepsilon''_e(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Второй инвариант тензора (его детерминант) $I_2 = \varepsilon'_e(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\varepsilon''_e(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ позволяет определить выражение эффективной диэлектрической проницаемости системы как среднее геометрическое двух эквивалентных проницаемостей [8]. Такой прием определения эффективной диэлектрической проницаемости, не претендуя на строгость, позволяет простыми вычислениями получить известные точные решения и удовлетворить всем условиям, которые налагаются общими положениями теории неоднородных сред.

Определение электрического поля в рассматриваемой системе путем решения краевой задачи в общем случае, когда компоненты обладают произвольными свойствами и размеры включений не фиксированы, наталкивается на непреодолимые сложности.

Система с шахматным расположением включений

Структура этой системы показана на рис. 4. Она отличается от системы, представленной на рис. 1, менее плотной упаковкой включений. При увеличении размеров включений до предельных размеров рассматриваемая двухкомпонентная система приобретает структуру шахматной доски.

Как и в предыдущем случае, матрица и включения имеют соответственно диэлектрические проницаемости ε_1 и ε_2 . Фундаментальная периодическая ячейка, выделенная на рис. 5 пунктиром, содержит два включения. Ячейка выбирается из условия, что при трансляции ее по

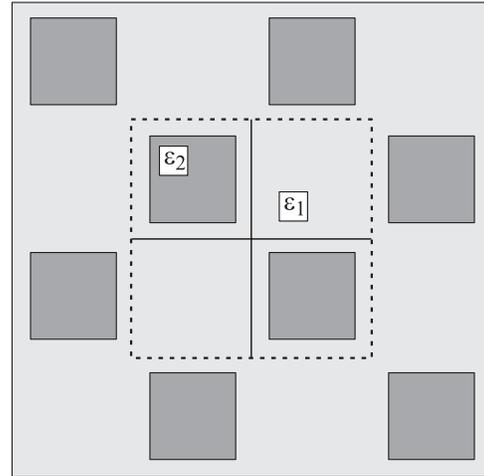


Рис. 4. Фрагмент композитного диэлектрического материала с шахматным расположением длинных волокон квадратного сечения. Пунктир — расчетная ячейка.

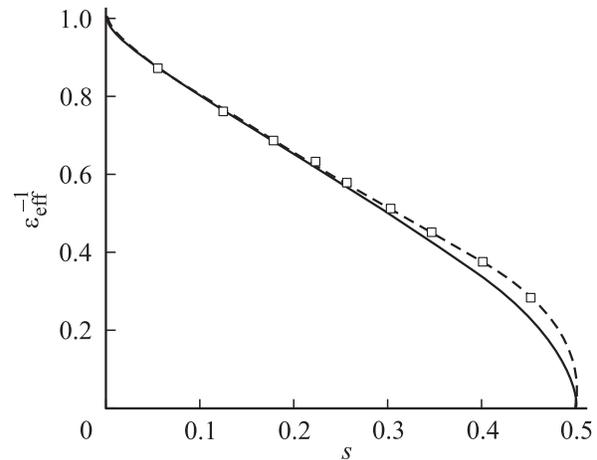


Рис. 5. Функция $\varepsilon_{\text{eff}}^{-1}(s)$, построенная по формуле (14) при $\Delta = -1$ для системы, показанной на рис. 4 (сплошная линия). Пунктир построен по точному решению из работы [8]. Светлые квадраты — результаты экспериментов.

осям прямоугольной системы координат вся плоскость сплошь, без промежутков, покрывается однотипными элементами; при этом элементарная ячейка имеет минимально возможные размеры.

Выделенная периодическая ячейка в свою очередь состоит из четырех ячеек меньшего размера двух типов: с включениями и без включений (на рис. 5 они разграничены сплошными линиями). В этом отношении рассматриваемую систему в целом можно представить как систему со структурой шахматной доски с двумя видами диэлектрических проницаемостей, обозначенных условно ε_a (ячейка с включением) и ε_b (ячейка без включения). Следовательно, эффективную диэлектрическую проницаемость системы можно определить известной формулой

$$\varepsilon_{\text{eff}} = \sqrt{\varepsilon_a \varepsilon_b}. \quad (13)$$

Ячейка с включением в системе, рассмотренной в предыдущем разделе, служила фундаментальной периодической ячейкой и использовалась для расчета эффективной диэлектрической проницаемости, поэтому в качестве величины ϵ_a можно взять выражение (2). Для ячейки без включений в рассматриваемой системе в качестве величины ϵ_b естественно принять значение диэлектрической проницаемости матрицы ϵ_1 . Таким образом, формула (13) принимает явный вид

$$\epsilon_{\text{eff}} = \epsilon_1 \left[\frac{1 - \alpha\Delta}{1 + \alpha\Delta} \frac{1 - \beta\Delta}{1 + \beta\Delta} \right]^{1/4}. \quad (14)$$

Это и есть интерполяционная формула неоднородной системы с шахматным расположением включений. От соответствующего выражения системы с квадратным расположением включений (2) формула (14) отличается степенью корня и концентрацией, которая в данном случае в два раза меньше. В дальнейшем, чтобы отметить последнее отличие для концентрации включений в системе с шахматным расположением включений, принято обозначение s_μ . Имеем, таким образом,

$$s_\mu = \frac{s}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{n+2} \right)^2 \quad (0 \leq s_\mu \leq s_{\mu c}), \quad (15)$$

где $s_{\mu c}$ — критическая концентрация включений: $s_{\mu c} = 1/2$; остальные обозначения сохраняют свои прежние значения, определенные в предыдущем разделе.

Выражение эффективной диэлектрической проницаемости (14) обладает следующими характерными свойствами.

1. Легко убедиться, что выражение (14) удовлетворяет условиям пунктов 1–3 (соотношениям (8)–(10)) предыдущего раздела.

2. При $s_\mu = 0$ ($n = 0$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$) среда однородна и имеет проницаемость ϵ_1 . Если $s_\mu = s_{\mu c} = 1/2$ ($n \rightarrow \infty$, $\alpha = \beta = 1$), то система имеет структуру стандартной двухкомпонентной шахматной доски с эффективной диэлектрической проницаемостью

$$\epsilon_{\text{eff}} = \epsilon_1 \sqrt{\frac{1 - \Delta}{1 + \Delta}}. \quad (16)$$

3. В частном случае, при $s_\mu = 1/8$ ($n = 2$, $\alpha = 0$, $\beta = 1/2$) выражение (14) принимает простейший вид

$$\epsilon_{\text{eff}} = \epsilon_1 \left(\frac{2 - \Delta}{2 + \Delta} \right)^{1/4}. \quad (17)$$

Используя в качестве малого параметра концентрацию включений, формулу (17) приближенно можно записать так:

$$\epsilon_{\text{eff}} \approx \epsilon_1 \frac{1 - \Delta/8}{1 + \Delta/8} \quad (s_\mu = 1/8). \quad (18)$$

Выражение (18) совпадает с формулой (12), которая аппроксимацией Паде распространена на весь диапазон изменения концентрации включений, и с формулой

эффективной диэлектрической проницаемости системы с малой концентрацией однонаправленных цилиндрических нитей кругового сечения [1,9]. Последнее обстоятельство отражает известное положение теории: чем меньше концентрация включений, тем в меньшей степени форма включений влияет на выражение эффективных параметров в среднем изотропной среде.

4. Область приложения интерполяционной формулы (14) можно установить, сравнивая ее с точным решением, полученным при условии, когда в диэлектрической среде в шахматном порядке расположены квадратные включения с идеальной проводимостью: $\epsilon_2 \rightarrow \infty$ ($\Delta = -1$) [8] (строго говоря, решение построено в терминах электропроводных сред с идеальными диэлектрическими включениями, что несущественно в силу электростатической аналогии).

Соответствующее решение дается формулой [8]

$$\epsilon_{\text{eff}} = \epsilon_1 \frac{K(k)}{K(k')}, \quad (19)$$

где $K(\cdot)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, k и k' — модули эллиптических интегралов

$$k = \sqrt{\frac{1-g}{2}}, \quad k' = \sqrt{\frac{1+g}{2}} \quad (0 \leq g \leq 1). \quad (20)$$

Параметр g связан с концентрацией s_μ следующим соотношением:

$$s_\mu = g \left[\frac{B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{5}{4}; g^2\right)}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) F\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; g^2\right)} \right]^2, \quad (21)$$

где $B(\cdot)$ — бета-функция, $\Gamma(\cdot)$ — гипергеометрическая функция.

При некоторых частных значениях параметров формулы (19)–(21) несколько упрощаются. Например, при $g = 1/\sqrt{2}$ гипергеометрические функции в соотношении (21) преобразуются к виду [10]

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{5}{4}; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{(2)^{1/4}} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(5/4)}{[\Gamma(7/8)]^2},$$

$$F\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(3/4)}{[\Gamma(5/8)]^2}, \quad (22)$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

В результате имеем

$$s_\mu = \frac{\pi^2}{4} \left[\sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \right]^{-2} = 0.171573. \quad (23)$$

По таблицам эллиптических интегралов [11] для этих условий находим значение эффективной диэлектрической проницаемости $\epsilon_{\text{eff}} = 1.4684\epsilon_1$. Интерполяционная формула (14) при той же концентрации (23) дает величину $\epsilon_{\text{eff}} = 1.44948\epsilon_1$. Параметры ϵ_{eff} , рассчитанные по точной и интерполяционной формулам, дают близкие значения; они отличаются на величину порядка 1%.

Еще один пример, позволяющий оценить точность интерполяционной формулы (14), имеем в случае, когда эллиптические интегралы в выражении (19) удовлетворяют соотношению [10]

$$K' \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right) = 2K \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right). \quad (24)$$

Из выражений (19)–(21) тогда следует

$$\varepsilon_{\text{eff}} = 2\varepsilon_1, \quad g = 0.941, \quad s_\mu = 0.305. \quad (25)$$

При концентрации, указанной в (25), интерполяционная формула (14) дает значение $\varepsilon_{\text{eff}} = 2.0408\varepsilon_1$, которое отличается от точного на величину порядка 2%.

5. Рассматриваемая система, как и предыдущая, моделировалась на электропроводной бумаге. Результаты экспериментов графически представлены на рис. 5. Здесь сплошная кривая — ход функции $\varepsilon_{\text{eff}*}^{-1}(s_\mu) = \varepsilon_{\text{eff}}^{-1}(s_\mu)/\varepsilon_1$, которая, как и аналогичная кривая для системы с квадратным расположением включений, построена для случая, когда дисперсная фаза имеет идеальную проводимость $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$ ($\Delta = -1$). Экспериментальные данные представлены на рисунке светлыми квадратами. Из приведенных графиков следует, что данные, полученные из опытов и расчетов по формуле (14), совпадают при малых и средних значениях концентрации включений ($s_\mu < 0.3$). При больших значениях концентрации ($s_\mu > 0.3$) можно говорить о качественном соответствии экспериментальных данных и расчетных значений эффективной диэлектрической проницаемости системы по формуле (14). Пунктир на рис. 5 построен по точным формулам (19)–(21); он, как видно, совпадает с экспериментальными значками для всех значений концентрации включений и характеризуется более резким изменением в окрестности критической точки.

Дисперсия диэлектрической проницаемости

В общем случае реальные диэлектрики обладают хотя и малой, но конечной проводимостью. В переменном электрическом поле свойства таких материалов описываются комплексной диэлектрической проницаемостью. По характерным особенностям электрического спектра матричные композитные материалы можно условно разделить на два вида: 1) диэлектрические материалы, у которых матрица электропроводна и, следовательно, они обладают сквозной проводимостью; 2) диэлектрические материалы, у которых электропроводностью обладают только включения; сквозная проводимость таких материалов наступает при критической концентрации, когда включения соприкасаются друг с другом. При низких частотах дисперсия диэлектрической проницаемости этих двух видов композитных диэлектриков существенно различна. Для первой разновидности материалов эффективные значения стационарной диэлектрической

проницаемости и коэффициента электрических потерь неограниченно возрастают при стремлении частоты к нулю. Для материалов второй группы названные характеристики принимают конечные значения, причем эффективный коэффициент потерь стремится к нулю. Этот вопрос был исследован в работах [12,13] в тех случаях, когда концентрация включений мала или принимает некоторые фиксированные значения. Если же в системе возможен переход диэлектрик–металл, т.е. фактически осуществляется переход от первого вида материалов ко второму, то диэлектрический спектр резко перестраивается. Особенности перехода одного вида электрического спектра к другому представляют теоретический интерес. Задача остается не изученной из-за сложности известных точных решений, которые не поддаются аналитическому исследованию в комплексной плоскости. Это затруднение легко преодолевается с помощью интерполяционных формул (2) и (14). Хотя полученный таким образом результат дает лишь приближенное решение проблемы (в силу ограничений, накладываемых при выводе формул (2) и (14)), тем не менее удается весьма просто установить основные закономерности изменения частотных зависимостей диэлектрической проницаемости при достижении критической точки.

Дисперсия диэлектрической проницаемости рассматриваемых систем исследуется при обычных допущениях и предположениях. Нестационарные электрические процессы описываются уравнениями электромагнитного поля в квазистационарном приближении, при котором длина волны внешнего гармонически изменяющегося поля значительно больше характерного размера системы. Основным механизмом поляризации в неоднородном диэлектрике выступает поляризация Максвелла–Вагнера. Это ориентационный тип поляризации и для ее исследования применима теория Дебая, описывающая релаксацию заряда в переменном электрическом поле. Соответственно можно построить диаграмму Коул–Коула.

При сделанных допущениях эффективная диэлектрическая проницаемость рассматриваемых систем определяется соотношениями (2) и (14) с комплексными величинами диэлектрической проницаемости.

1. Система с квадратным расположением включений. Соотношение (2) с комплексной эффективной диэлектрической проницаемостью

$$\hat{\varepsilon}_{\text{eff}}(\omega) = \varepsilon'_{\text{eff}}(\omega) - i\varepsilon''_{\text{eff}}(\omega), \quad (26)$$

приобретает вид

$$\hat{\varepsilon}_{\text{eff}}(\omega) = \varepsilon_1 \left[\frac{1 - \alpha \hat{\Delta}(\omega)}{1 + \alpha \hat{\Delta}(\omega)} \cdot \frac{1 - \beta \hat{\Delta}(\omega)}{1 + \beta \hat{\Delta}(\omega)} \right]^{1/2}. \quad (27)$$

Здесь $\hat{\Delta}(\omega) = \Delta'(\omega) + i\Delta''(\omega)$ — комплексный параметр, действительная и мнимая составляющие которого имеют

следующие выражения:

$$\Delta'(\omega) = \frac{4\Delta - \Gamma^2(\omega)(1 - \Delta)^2}{4 + \Gamma^2(\omega)(1 - \Delta)^2},$$

$$\Delta''(\omega) = \frac{2\Gamma(\omega)(1 - \Delta)^2}{4 + \Gamma^2(\omega)(1 - \Delta)^2}, \quad (28)$$

где $\Gamma(\omega)$ — частотный параметр, равный отношению максвелловской частоты ω_0 к круговой частоте ω внешнего электрического поля

$$\Gamma(\omega) = \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_2 \omega}, \quad (29)$$

ε_0 — электрическая постоянная; σ_2 и ε_2 — удельная электропроводность и диэлектрическая проницаемость включений; по предположению матрица не обладает электропроводностью.

В качестве переменной величины удобно использовать относительную частоту, определенную формулой

$$\Delta_\omega = \frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega} \quad (0 \leq \Delta_\omega \leq 1). \quad (30)$$

При большой концентрации включений, когда справедливо соотношение $\alpha \approx \beta \approx s$, выражение (27) упрощается. В этом случае имеем

$$\hat{\varepsilon}_{\text{eff}}(\omega) \approx \varepsilon_1 \left[\frac{1 - s\hat{\Delta}(\omega)}{1 + s\hat{\Delta}(\omega)} \right]. \quad (31)$$

Эту формулу можно получить также из выражения (12), переходя к комплексным величинам. Действительная и мнимая составляющие эффективной комплексной диэлектрической проницаемости определяются выражениями

$$\varepsilon'_{\text{eff}}(\omega) \approx \varepsilon_1 \left[\frac{1 - s^2(\Delta'^2(\omega) + \Delta''^2(\omega))}{(1 + s\Delta'(\omega))^2 + (s\Delta''(\omega))^2} \right],$$

$$\varepsilon''_{\text{eff}}(\omega) \approx \frac{2s\varepsilon_1\Delta''(\omega)}{(1 + s\Delta'(\omega))^2 + (s\Delta''(\omega))^2}. \quad (32)$$

При $\omega \rightarrow 0$ ($\Gamma(\omega) \rightarrow \infty$, $\Delta_\omega \rightarrow 0$) эффективные электростатические величины $\varepsilon'_{\text{eff}}(0)$ и $\varepsilon''_{\text{eff}}(0)$ даются выражениями

$$\varepsilon'_{\text{eff}}(0) \approx \varepsilon_1 \frac{1 + s}{1 - s}, \quad \varepsilon''_{\text{eff}}(0) = 0. \quad (33)$$

В другом предельном случае, при высоких частотах $\omega \rightarrow \infty$ ($\Gamma(\omega) \rightarrow 0$, $\Delta_\omega \rightarrow 1$), оптические значения эффективной диэлектрической проницаемости $\varepsilon'_{\text{eff}}(\infty)$ и эффективного коэффициента электрических потерь $\varepsilon''_{\text{eff}}(\infty)$ определяется так:

$$\varepsilon'_{\text{eff}}(\infty) \approx \varepsilon_1 \frac{1 - s\Delta}{1 + s\Delta}, \quad \varepsilon''_{\text{eff}}(\infty) = 0. \quad (34)$$

Согласно первому соотношению (33), при $s \rightarrow s_c = 1$ эффективная электростатическая диэлектрическая проницаемость неограниченно возрастает по закону

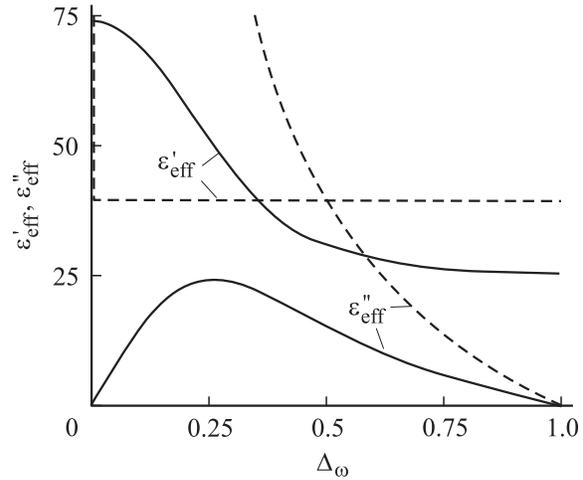


Рис. 6. Зависимости эффективной диэлектрической проницаемости эффективного коэффициента электрических потерь от относительной частоты для системы, показанной на рис. 1, с параметрами $\Delta = -0.95$ и $s = 0.9733$ (сплошные кривые) и $\Delta = -0.95$ и $s = s_c = 1$ (штриховые).

$\varepsilon'_{\text{eff}}(0) \sim 1/(1 - s)$. Эффективный коэффициент электрических потерь $\varepsilon''_{\text{eff}}(\omega)$ имеет максимум при частоте, которая сложным образом зависит от соотношения между параметрами материала — концентрации включений, их проводимости и разницы диэлектрических проницаемостей матрицы и включений, т. е. параметра Δ . Значение функции $\varepsilon''_{\text{eff}}(\omega)$ при экстремальной частоте зависит от этих же параметров. Согласно второму выражению (32), при $\Delta \rightarrow -1$ частота максимума смещается к максвелловской частоте ($\omega_{\text{max}} \rightarrow \omega_0$), значение функции $\varepsilon''_{\text{eff}}(\omega)$ при этом уменьшается. Если же концентрация включений увеличивается, то экстремальная частота смещается в низкочастотную область и значение функции $\varepsilon''_{\text{eff}}(\omega)$ возрастает. При достижении критической концентрации включений $s = s_c = 1$ коэффициент электрических потерь при $\omega \rightarrow 0$ изменяется скачком, принимая в этом случае бесконечное значение. Для иллюстрации сказанного на рис. 6 построены частотные зависимости $\varepsilon'_{\text{eff}}(\omega)$ и $\varepsilon''_{\text{eff}}(\omega)$ для системы с параметрами $s = 0.9733$ и $\Delta = -0.95$ (сплошные линии). Пунктир на этом рисунке отвечает предельному случаю $s = s_c = 1$ и $\Delta = -0.95$. Диаграмма Коул–Коула представлена полукругом, что отвечает классической теории релаксации заряда Дебая; для указанных предельных параметров полукруг имеет бесконечный радиус.

2. Система с шахматным расположением включений. Для тех же условий, которые были приняты при рассмотрении предыдущей структуры, комплексная эффективная диэлектрическая проницаемость в данном случае имеет вид

$$\hat{\varepsilon}_{\text{eff}}(\omega) = \varepsilon_1 \left[\frac{1 - \alpha\hat{\Delta}(\omega)}{1 + \alpha\hat{\Delta}(\omega)} \cdot \frac{1 - \beta\hat{\Delta}(\omega)}{1 + \beta\hat{\Delta}(\omega)} \right]^{1/4}. \quad (35)$$

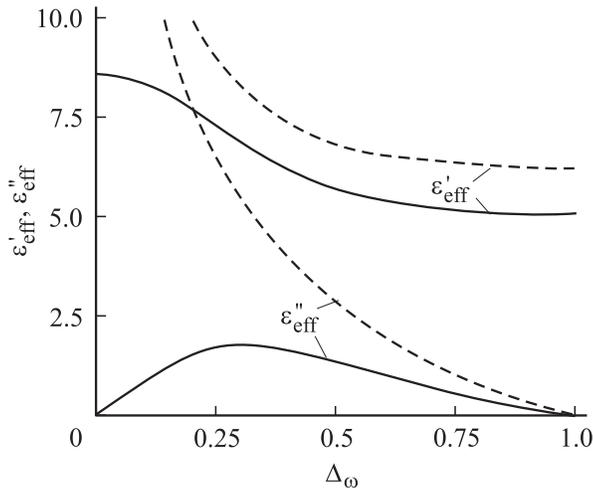


Рис. 7. Зависимости эффективной диэлектрической проницаемости и эффективного коэффициента электрических потерь от относительной частоты для системы, показанной на рис. 4, с параметрами $\Delta = -0.95$ и $s_\mu = 0.4865$ (сплошные кривые) и $\Delta = -0.95$ и $s_\mu = s_{\mu c} = 1/2$ (штриховые).

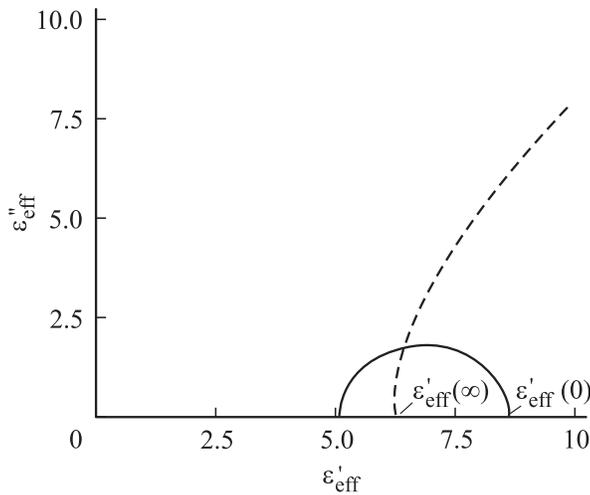


Рис. 8. Диаграммы эффективной комплексной диэлектрической проницаемости системы с параметрами, указанными к рис. 7.

Концентрация включений s_μ изменяется теперь в пределах $0 \leq s_\mu \leq 1/2$, причем $2s_\mu = s$ (15). Если концентрация включений велика, то справедливо соотношение $\alpha \approx \beta \approx 2s_\mu$ и выражение (35) можно приближенно записать так:

$$\hat{\epsilon}_{\text{eff}}(\omega) \approx \epsilon_1 \sqrt{\frac{1 - 2s_\mu \hat{\Delta}(\omega)}{1 + 2s_\mu \hat{\Delta}(\omega)}}. \quad (36)$$

Напомним, что для рассматриваемой системы критическая концентрация равна $s_{\mu c} = 1/2$.

Разделяя действительную и мнимую части выражения (36), получим

$$\begin{aligned} \epsilon'_{\text{eff}}(\omega) &\approx \frac{\epsilon_1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{u^2(\omega) + v^2(\omega)} + u(\omega)}, \\ \epsilon''_{\text{eff}}(\omega) &\approx \frac{\epsilon_1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{u^2(\omega) + v^2(\omega)} - u(\omega)}, \end{aligned} \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} u(\omega) &= \frac{1 - 4s_\mu^2(\Delta'^2(\omega) + \Delta''^2(\omega))}{(1 + 2s_\mu\Delta'(\omega))^2 + 2s_\mu\Delta''(\omega)^2}, \\ v(\omega) &= \frac{2s_\mu\Delta''(\omega)}{(1 + 2s_\mu\Delta'(\omega))^2 + (2s_\mu\Delta''(\omega))^2}. \end{aligned} \quad (38)$$

При $\omega \rightarrow 0$ ($\Gamma(\omega) \rightarrow \infty$, $\Delta_\omega \rightarrow 0$) эффективная электростатическая диэлектрическая проницаемость $\epsilon'_{\text{eff}}(0)$ и эффективный электростатический коэффициент электрических потерь $\epsilon''_{\text{eff}}(0)$ определяются выражениями

$$\epsilon'_{\text{eff}}(0) \approx \epsilon_1 \sqrt{\frac{1 + 2s_\mu}{1 - 2s_\mu}}, \quad \epsilon''_{\text{eff}}(0) = 0. \quad (39)$$

В высокочастотной области, при $\omega \rightarrow \infty$ ($\Gamma(\omega) \rightarrow 0$, $\Delta_\omega \rightarrow 1$), оптические значения эффективной диэлектрической проницаемости $\epsilon'_{\text{eff}}(\infty)$ и эффективного коэффициента электрических потерь $\epsilon''_{\text{eff}}(\infty)$ определяются так:

$$\epsilon'_{\text{eff}}(\infty) \approx \epsilon_1 \sqrt{\frac{1 - 2s_\mu\Delta}{1 + 2s_\mu\Delta}}, \quad \epsilon''_{\text{eff}}(\infty) = 0. \quad (40)$$

В общем частотные зависимости эффективной комплексной диэлектрической проницаемости рассматриваемой структуры ведут себя так же, как и в случае системы с квадратным расположением включений (с поправкой на корневую зависимость); соответственно при приближении к критической концентрации включений $s \rightarrow s_c = 1/2$ эффективная электростатическая диэлектрическая проницаемость данной системы изменяется по корневому закону: $\epsilon'_{\text{eff}}(0) \sim 1/\sqrt{1 - 2s_\mu}$. Для сравнения частотных зависимостей эффективной диэлектрической проницаемости двух систем на рис. 7 построены кривые $\epsilon'_{\text{eff}}(\omega)$ и $\epsilon''_{\text{eff}}(\omega)$ (сплошные линии) с параметрами ($s_\mu = s/2 = 0.48665$ и $\Delta = -0.95$). Комплексная диаграмма представлена на рис. 8. Пунктиром на двух последних рисунках приведены зависимости в предельном случае: $s_\mu = s_{\mu c} = 1/2$, $\Delta = -0.95$.

Заключение

Исследование дисперсии диэлектрической проницаемости сильнонеоднородных матричных диэлектриков удастся провести до конца благодаря интерполяционным формулам, которые просты и удобны в аналитических расчетах. Они совпадают с известными точными решениями и, главное, подтверждаются экспериментальными

данными в широком диапазоне изменения концентраций включений. Интерполяционные формулы не лишены, однако, некоторых недостатков: они не имеют строгого обоснования на основе решения краевых задач и дают дискретные значения эффективной диэлектрической проницаемости. Последнее обстоятельство существенно только при малой концентрации включений. В последнем случае лучше использовать другие модели.

Список литературы

- [1] *Perrins W.T., McKensie D.R., McPedran R.C.* // Proc. R. Soc. Lond. A. 1979. Vol. 369. P. 207–225.
- [2] *Manteufel R.D., Todreas N.E.* // Int. J. Heat Mass Transfer. 1994. Vol. 37. N 4. P. 647–655.
- [3] *Балагуров Б.Я., Кашин В.А.* // ЖЭТФ. 2000. Т. 117. Вып. 5. С. 978–989.
- [4] *Obnosov Yu.V.* // SIAM J. Appl. Math. 1999. Vol. 59. N 4. P. 1267–1287.
- [5] *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
- [6] *Andrianov I.V.* et al. // Proc. R. Soc. Lond. A. 1999. Vol. 455. P. 3401–3413.
- [7] *Cole K.S., Li Ch., Bak A.F.* // Exptl. Neurol. 1969. Vol. 24. P. 459–473.
- [8] *Емец Ю.П.* Электрические характеристики композиционных материалов. Киев: Наукова думка, 1986. 191 с.
- [9] *Емец Ю.П.* // ЖЭТФ. 1998. Т. 114. Вып. 3. С. 1121–1136.
- [10] *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции (эллиптические и автоморфные функции). М.: Наука, 1967. 300 с.
- [11] *Ахиезер Н.И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.
- [12] *Емец Ю.П.* // ЖЭТФ. 2002. Т. 121. Вып. 6. С. 1339–1351.
- [13] *Емец Ю.П.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 3. С. 42–53.