01;04;10

Кинетическое уравнение для релятивистского электронного пучка, распространяющегося в плотных и разреженных газоплазменных средах продольно внешнему магнитному полю

© Е.К. Колесников, А.С. Мануйлов

Санкт-Петербургский государственный университет
Научно-исследовательский институт математики и механики им. В.И. Смирнова,
198504 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: Kolesnikov_evg@mail.ru

(Поступило в Редакцию 9 декабря 2003 г.)

Сформулировано кинетическое уравнение для исследования поперечной динамики аксиально-симметричного параксиального релятивистского электронного пучка, распространяющегося в газоплазменной среде продольно внешнему магнитному полю, учитывающее воздействие на пучок самосогласованного электромагнитного поля, эффекты неламинарности и вращения пучка на выходе из инжектора, а также рассеяние и потери энергии электронов пучка в столкновениях с частицами нейтральной компоненты фонового газа.

1. Кинетическая постановка задачи об эволюции релятивистского электронного пучка в процессе транспортировки в рассеивающей газоплазменной среде

Новые области применения релятивистских электронных пучков (РЭП) делают актуальным дальнейшее исследование динамики транспортировки РЭП в газоплазменных средах [1–24]. Вследствие сильной неравновесности процесса транспортировки РЭП в газоплазменной среде, а также определяющего влияния, которое оказывает на этот процесс коллективное электромагнитное поле, возбуждаемое зарядами и токами частиц пучка и плазмы, естественной методологической основой для построения моделей транспортировки РЭП в газоплазменной среде является аппарат кинетических уравнений Власова–Больцмана с самосогласованным полем и следующих из них уравнений для моментов функции распределения частиц пучка.

Кинетическое уравнение, описывающее поперечную динамику параксиальных азимутально-симметричных РЭП в плотных газоплазменных средах, впервые было сформулировано в работе [6].

Основной задачей настоящей статьи является получение кинетического уравнения, описывающего поперечную динамику параксиальных РЭП, обобщающего результат [6] на случай распространения пучка продольно внешнему магнитному полю как в плотной газоплазменной среде, так и в разреженной плазме в режиме ионной фокусировки (ИФ).

При кинетическом описании пучок характеризуется функцией распределения $\Phi_b(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, имеющей смысл плотности математического ожидания числа релятивистских электронов в шестимерном фазовом пространстве координат r и релятивистских импульсов $\mathbf{p} = m_0\gamma\mathbf{v}$ (m_0 — масса покоя электрона, $\mathbf{v}$ — его скорость, $\gamma = 1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ — лоренц-фактор).

Эволюция функции распределения частиц пучка в процессе транспортировки в общем случае описывается кинетическим уравнением Власова–Больцмана [22–24]

$$\frac{\partial \Phi_b}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \Phi_b + e\left[\mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})\right] \nabla_{\mathbf{p}} \Phi_b = I_{sc}, \quad (1)$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ — соответственно напряженность электрического и индукция магнитного самосогласованных полей, величина I_{sc} в правой части уравнения (1) (так называемый интеграл столкновений) характеризует эффект изменения функции распределения в результате столкновений частиц пучка с частицами нейтральной компоненты фона.

Уравнение (1) должно решаться совместно с уравнениями Максвелла для самосогласованного электромагнитного поля

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (5)$$

В уравнениях (2)–(5)

$$\rho = \rho_b + \rho_p, \quad \mathbf{J} = \mathbf{J}_b + \mathbf{J}_p, \quad (6)$$

где ρ_b и $\mathbf{J}_b$ — плотности заряда и тока частиц пучка, определяющиеся соответствующими моментами функции распределения Φ_b

$$\rho_b = e\int \Phi_b(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)\, d\mathbf{p}, \quad (7)$$

$$\mathbf{J}_b = e\int \frac{\mathbf{p}}{\gamma m_0}\Phi_b(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)\, d\mathbf{p}; \quad (8)$$

ρ_p и $\mathbf{J}_p$ — плотности заряда и тока, индуцируемых в плазме.

В дальнейшем ограничимся изучением специальных режимов транспортировки РЭП в газоплазменной среде, для которых в основной части („теле“) пучка плотности заряда и тока плазмы могут быть рассмотрены как известные функции координат либо могут быть явным образом выражены через плотности заряда и тока пучка. К указанному случаю относятся, в частности, режимы зарядовой или магнитной нейтрализации пучка, распространяющегося в плазме с плотностью электронов n_Φ, значительно превышающей плотность электронов пучка n_b.

В режиме зарядовой и токовой нейтрализации имеем

$$\rho_p = (1-\alpha_c)\rho_b, \quad \mathbf{J}_p = (1-\alpha_m)\mathbf{J}_b,$$

где α_c и α_m — соответственно коэффициенты зарядовой и токовой (магнитной) нейтрализации.

Второй рассматриваемый здесь режим транспортировки — это режим ионной фокусировки (ИФ) в разреженной плазме импульсного РЭП большой плотности $(n_b \gg n_\Phi)$ [9,11–13]. Основной особенностью режима ИФ является наличие достаточно низкого давления в фоновой газоплазменной среде, когда электроны в предварительно созданном плазменном канале при воздействии поперечной компоненты электрического поля фронтальной части РЭП покидают область, занимаемую пучком, не создавая значительной дополнительной ионизации фоновой плазмы. Эта ситуация имеет место при выполнении условия [9]

$$\lambda_i \gg R_b,$$

где λ_i — характерная длина развития лавинной ионизации, R_b — характерный радиус пучка.

Кроме того, длительность импульса пучка τ_b должна удовлетворять условию $\tau_b \gg \tau_e$, где τ_e — характерное время вытеснения электронов плазмы из области РЭП его электрическим полем. При этом поле пучка выбрасывает электроны фоновой плазмы из области прохождения пучка и основная часть РЭП распространяется на фоне ионов плазмы, которые при дополнительном ограничении на длительность импульса пучка ($\tau_b \ll \tau_i$, где τ_i — характерное время колебаний ионов в области пучка) в процессе прохождения РЭП остаются неподвижными [9,11].

В указанных случаях уравнения (1)–(5) с учетом соотношений (6)–(8) представляют собой замкнутую систему уравнений для нахождения функции распределения электронов пучка $\Phi_b(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ и самосогласованного электромагнитного поля.

2. Параксиальное приближение. Разделение задач о продольном и поперечном движении частицы пучка

В общем случае решение сформулированной в разделе 1 системы уравнений (1)–(5) при соответствующих начальных и граничных условиях является весьма сложной задачей. Однако в конкретных случаях эту систему, как правило, удается существенно упростить с помощью дополнительных предположений о свойствах пучка. В частности, в задачах транспортировки пучков основной практический интерес представляет случай так называемого параксиального пучка, частицы которого движутся под малыми углами к направлению некоторой оси z и, следовательно, выполнено соотношение

$$\frac{v_\perp}{v_z} \equiv \nu \ll 1, \tag{9}$$

где $v_\perp$ — поперечная оси z компонента скорости частицы пучка.

Покажем, что в ситуации (9) уравнения (1)–(5) существенно упрощаются. Рассмотрим уравнение движения одиночного электрона пучка

$$\frac{dp}{dt} = e\left[\mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{v}\times\mathbf{B}^*)\right] + \mathbf{G}_{sc}, \tag{10}$$

где $\mathbf{B}^* = \mathbf{B} + \mathbf{B}_0$; $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ — напряженность электрического и индукция магнитного коллективных полей системы плазма–пучок; $\mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{e}_z$ — индукция внешнего магнитного поля, которое предполагается однородным и направленным вдоль оси z; $\mathbf{G}_{sc}$ — флуктуирующая сила, обусловленная столкновениями электрона пучка с частицами фоновой среды.

Введем в рассмотрение скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля φ и $\mathbf{A}^*$, связанные с векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}^*$ известными соотношениями

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}^*}{\partial t}, \tag{11}$$

$$\mathbf{B}^* = \nabla\times\mathbf{A}^*, \tag{12}$$

где $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}$, $\mathbf{A}_0$ — векторный потенциал внешнего магнитного поля, φ и $\mathbf{A}$ — потенциалы коллективного электромагнитного поля.

Подстановка выражений (11), (12) в уравнения Максвелла (2)–(5) при дополнительном условии Лоренца $\big(\nabla\circ\mathbf{A}^* + (1/c)\partial\varphi/\partial t\big) = 0$ приводит в случае $B_0 = \text{const}$ к системе уравнений Даламбера для потенциалов φ и $\mathbf{A}$

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \tag{13}$$

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}. \tag{14}$$

В дальнейшем ограничимся квазистационарной постановкой задачи, предполагая, что характерное время изменения параметров пучка $\tau_b \approx f(\partial f/\partial t)^{-1}$ удовлетворяет условию

$$\tau_b > \frac{R_\perp}{c}\nu^{-\frac{1}{2}}, \tag{15}$$

где $R_\perp = f/|\nabla_\perp f|$ — характерный поперечный масштаб изменения параметров системы.

Тогда, учитывая, что в параксиальном приближении между продольным и поперечным градиентами связанных с пучком величин существует соотношение $|\partial f/\partial z/\nabla_\perp f| \approx \nu$, уравнения (13), (14) с точностью до членов первого порядка малости по параметру ν могут быть записаны в виде

$$\Delta_\perp \varphi = -4\pi\rho + O(\nu), \tag{16}$$

$$\Delta_\perp \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + O(\nu), \tag{17}$$

где $\Delta_\perp$ — оператор Лапласа по поперечным координатам.

Подставим теперь выражения (11) и (12) в уравнение движения (10) и спроектируем полученное уравнение на плоскость, перпендикулярную оси z. Тогда получим уравнение

$$\frac{d}{dt}(m_0\gamma\mathbf{v}_\perp) = e\left[-\nabla_\perp\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}_\perp}{\partial t} + \frac{1}{c}(\mathbf{v}\times\nabla\times\mathbf{A}^*)_\perp\right] + (\mathbf{G}_{sc})_\perp. \tag{18}$$

Как показывает анализ в параксиальном пучке с точностью до членов первого порядка малости по параметру ν, имеем $1/c(\mathbf{v}\times\nabla_\perp\times\mathbf{A}^*) \approx v_z/c\nabla_\perp A_z + (\mathbf{v}_\perp/c) + \mathbf{i}_z B_0$ (где $\mathbf{i}_z$ — орт оси z), а нестационарным членом $1/c(\partial\mathbf{A}_\perp/\partial t)$ в правой части (18) при выполнении условия квазистационарности (15) можно пренебречь. Тогда с точностью до членов первого порядка малости уравнение (18) может быть записано в виде

$$\frac{d}{dt}m_0\gamma\mathbf{v}_\perp = e\left[-\nabla_\perp(\varphi - \beta A_z) + \frac{\mathbf{v}_\perp}{c}\times\mathbf{i}_z B_0\right] + (\mathbf{G}_{sc})_\perp. \tag{19}$$

Закон продольного движения частицы пучка в параксиальном приближении может быть найден из уравнения энергии

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \mathbf{vF}, \tag{20}$$

которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = e\mathbf{vE} + \mathbf{vG}_{sc} = ev_zE_z + e\mathbf{v}_\perp\mathbf{E}_\perp + \mathbf{vG}_{sc}, \tag{21}$$

где $\varepsilon = m_0c^2\gamma$ — релятивистская энергия.

Выражения E_z и $\mathbf{E}_\perp$ через потенциалы с помощью соотношения (11) и учитывая условия параксиальности (9) и квазистационарности (15), можно показать, что первое слагаемое в правой части (21) является величиной порядка $\nu^{1/2}$, а второе слагаемое — порядка ν. Таким образом, с точностью до членов первого порядка малости по параметру ν полевыми членами в правой части (21) можно пренебречь. Тогда в рассматриваемом случае уравнение (21) приближенно может быть записано в виде

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \mathbf{v}\,\mathbf{G}_{sc}. \tag{22}$$

В условиях, когда в каждом столкновении с частицей фона частица пучка теряет малую часть своей энергии, при вычислении энергетических потерь на интервалах времени $\Delta t \gg \tau_{sc}$ (τ_{sc} — среднее время между столкновениями) правая часть уравнения (22) может быть аппроксимирована непрерывной функцией $(-d\varepsilon/dt)_{sc}$, являющейся известной функцией энергии частицы пучка для данной фоновой среды. Таким образом, в предположении о непрерывности энергетических потерь уравнение энергии может быть записано следующим образом:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \left(-\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{sc}. \tag{23}$$

Учитывая, что в параксиальном приближении продольная компонента скорости частицы пучка $v_z = v(1 + O(\nu^2))$, а скорость частицы связана с ее энергией ε соотношением $v = c(1 - m^2c^4/\varepsilon^2)^{1/2}$, получим уравнение

$$\frac{dz}{dt} = c\left(1 - m^2c^4/\varepsilon^2(t)\right)^{1/2}. \tag{24}$$

Интегрируя (24) при начальных условиях $t = \tau$, $z = 0$, найдем закон продольного движения частицы с временем инжекции τ

$$z = c\int\limits_\tau^t \left(1 - m^2c^4/\varepsilon^2(t')\right)^{\frac{1}{2}} dt', \tag{25}$$

где зависимость $\varepsilon(t)$ определяется решением уравнения (23)

$$t - \tau = \int\limits_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{d\varepsilon'}{[-d\varepsilon(\varepsilon')/dt]_{sc}}, \tag{26}$$

ε_0 — начальная энергия частицы на выходе из инжектора.

Как следует из уравнений (25), (26), в рассматриваемом приближении продольное движение частиц пучка не зависит от поперечного и носит детерминированный характер.

Отметим, что принятое при выводе уравнений (25), (26) предположение о непрерывном характере потерь энергии в столкновениях является, вообще говоря, корректным только в условиях доминирующей роли потерь энергии на ионизацию и возбуждение атомов среды. При экстремально высоких энергиях электронов пучка ($\varepsilon \geq \varepsilon_{cr}$, где ε_{cr} — критическая энергия для данного вещества [23]), когда основными становятся потери энергии на тормозное излучение, предположение о непрерывном характере энергетических потерь может оказаться неверным из-за сильных статических флуктуаций в потерях энергии, свойственных радиационному механизму торможения высокоэнергетических электронов [23].

3. Кинетическое уравнение для функции распределения частиц сегмента параксиального пучка, распространяющегося в рассеивающей газоплазменной среде продольно внешнему магнитному полю

Как следует из сказанного выше, в параксиальном приближении продольное движение частиц пучка является детерминированным. В отличие от продольного движения поперечная динамика частиц носит стохастический характер, и состояние пучка в соответствующем фазовом подпространстве может быть охарактеризовано только статистически.

Представим пучок в виде совокупности тонких поперечных сегментов S^τ, каждый из которых инжектируется в момент времени $t = \tau$ и содержит фиксированное число частиц.

Предположим, что на выходе из инжектора пучок является моноэнергетичным, а среда, в которой он распространяется, однородной. Тогда в соответствии с уравнениями (25), (26) при сделанных предположениях все частицы сегментов S^τ одинаковым образом эволюционируют по координате z и в любой момент времени имеют одинаковую энергию $\varepsilon(t)$ и релятивистскую массу $m^* = m\gamma = \varepsilon(t)/c^2$, причем в процессе распространения сегменты S^τ не пересекаются.

Для фиксированного сегмента S^τ введем в рассмотрение функцию распределения частиц сегмента $f^\tau(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t)$ по поперечным координатам $\mathbf{r}_\perp$ и импульсам $\mathbf{p}_\perp$, эволюция которой будет описываться кинетическим уравнением

$$\frac{\partial f^\tau}{\partial t} + \mathbf{v}_\perp \nabla_{\mathbf{r}_\perp} f^\tau + \mathbf{F}_\perp \nabla_{\mathbf{p}_\perp} f^\tau = I_{sc}, \tag{27}$$

где $\mathbf{v}_\perp = d\mathbf{r}_\perp/dt = \mathbf{p}_\perp/m\gamma$; $\mathbf{F}_\perp$ — поперечная компонента силы, действующей на частицу пучка со стороны самосогласованного электромагнитного поля; I_{sc} — интеграл столкновений.

Отметим, что в рассматриваемом случае из (18) следует следующее выражение для силы $\mathbf{F}_\perp$

$$\mathbf{F}_\perp = -e\nabla_\perp(\varphi - \beta A_z) + \Omega_b \mathbf{p}_\perp \times \mathbf{i}_z, \tag{28}$$

где $\Omega_b = |e|B_0/(m\gamma c)$ — гирочастота частиц пучка во внешнем магнитном поле.

В условиях доминирующей роли процессов многократно упругого рассеяния на малые углы интеграл столкновений в уравнении (27) может быть записан в виде интеграла столкновений Фоккера–Планка [22–24]

$$I_{sc} = -\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial p_{\perp\alpha}} A_\alpha f + \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2}{\partial p_{\perp\alpha}\partial p_{\perp\beta}} B_{\alpha\beta} f, \tag{29}$$

где коэффициенты Фоккера–Планка

$$A_\alpha = -\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\langle \Delta p_{\perp\alpha}\rangle}{\Delta t}, \tag{30}$$

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\langle \Delta p_{\perp\alpha}\Delta p_{\perp\beta}\rangle}{\Delta t}. \tag{31}$$

Здесь

$$\langle \Delta p_{\perp\alpha}\rangle = \int w(\mathbf{p}_\perp, \Delta\mathbf{p}_\perp, \Delta t)\Delta p_{\perp\alpha} d\Delta\mathbf{p}, \tag{32}$$

$$\langle \Delta p_{\perp\alpha}\Delta p_{\perp\beta}\rangle = \int w(\mathbf{p}_\perp, \Delta\mathbf{p}_\perp, \Delta t)\Delta p_{\perp\alpha}\Delta p_{\perp\beta} d\Delta\mathbf{p}, \tag{33}$$

где $w(\mathbf{p}_\perp, \Delta\mathbf{p}_\perp, \Delta t)$ — плотность вероятности того, что за время Δt импульс $\mathbf{p}_\perp$ в результате многократных столкновений изменится на величину $\Delta\mathbf{p}_\perp$.

Коэффициенты A_α образуют вектор скорости переноса по поперечному импульсу $\mathbf{p}_\perp$, $B_{\alpha\beta}$ — тензор обобщенных коэффициентов диффузии. Как показано в [6], в случае изотропного рассеяния коэффициенты A_α и недиагональные элементы тензора $B_{\alpha\beta}$ равны 0, а диагональные элементы тензора диффузии имеют вид

$$B_{\alpha\alpha} = \frac{m\gamma}{2} S, \tag{34}$$

где

$$S = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{\langle \Delta p_\perp^2\rangle}{2m\gamma}.$$

В случае многократного упругого рассеяния на малые углы функция S определяется величиной полного импульса и не зависит от поперечной компоненты импульса $\mathbf{p}_\perp$ [25,26]. Таким образом, в предположении об изотропности и упругом характере рассеяния интеграл столкновений (29) принимает значительно более простой вид

$$I_{sc} = \frac{m\gamma S}{2} \Delta_{\mathbf{p}_\perp} f^\tau. \tag{35}$$

Подставим выражение (28) для силы $\mathbf{F}_\perp$ и выражение (35) для интеграла столкновений в уравнение (27). Тогда, учитывая, что в рассматриваемых режимах транспортировки эффективный скалярный потенциал поперечного поля $\varphi - \beta A_z = \varphi_0 - \beta\mu A_z$, где φ_0 — потенциал электрического поля компенсирующего ионного фона, а постоянная μ выражается как

$$\mu = 1 - \frac{(1-\alpha_c)}{\beta^2(1-\alpha_m)}, \tag{36}$$

уравнение (27) запишем следующим образом:

$$\frac{\partial f^\tau}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_\perp}{\gamma m}\nabla_{\mathbf{r}_\perp} f^\tau + \big[-e\nabla_\perp(\varphi_0 - \beta\mu A_z) + \Omega_b \mathbf{p}_\perp \times \mathbf{i}_z\big]\nabla_{\mathbf{p}_\perp} f^\tau = \frac{m\gamma S}{2}\Delta_{\mathbf{p}_\perp} f^\tau, \tag{37}$$

где (как следует из (17)) потенциал A_z удовлетворяет уравнению

$$\Delta_\perp A_z = -\frac{4\pi}{c}(1-\alpha_m)J_b, \tag{38}$$

а потенциал φ_0 будем рассматривать как известное решение уравнения Пуассона

$$\Delta_\perp \varphi_0 = 4\pi e n_\Phi. \tag{39}$$

Введем в рассмотрение радиус экранировки самосогласованного электромагнитного поля фоновой плазмой R_c, т.е. предположим, что

$$\varphi|_{r \geq R_c} = A_z|_{r \geq R_c} \equiv 0. \tag{40}$$

Решение уравнения (38), удовлетворяющее граничному условию (40), имеет вид

$$A_z = -\frac{2}{c} J_b(1-\alpha_m) \int d\mathbf{r}'_\perp \ln \frac{|\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|}{R_c} \times \int d\mathbf{p}_\perp f^\tau(\mathbf{r}'_\perp, \mathbf{p}_\perp, t). \tag{41}$$

С учетом соотношения (41) уравнение (37) может быть рассмотрено как интегродифференциальное уравнение для функции распределения частиц сегмента пучка $f^\tau(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t)$, которое должно решаться при начальном условии

$$f^\tau(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t)|_{t=\tau} = f_0(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, \tau), \tag{42}$$

где $f_0(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t)$ — заданная функция распределения частиц пучка по поперечным координатам и импульсам на выходе из инжектора.

Полученное в настоящей статье кинетическое уравнение может быть рассмотрено как основа для решения задачи численного моделирования поперечной динамики параксиальных РЭП в газоплазменных средах при наличии внешнего продольного магнитного поля. Кроме того, указанное уравнение необходимо для разработки упрощенных моделей поперечной динамики РЭП, основанных на использовании следующих из него уравнений для моментов функции распределения частиц пучка и фазовых средних.

Список литературы

[1] *Диденко А.Н., Григорьев В.П., Усов Ю.П.* Мощные электронные пучки и их применение. М., 1977. 277 с.
[2] *Рухадзе А.А., Богданович Л.С., Росинский С.Е., Рухлин В.Г.* Физика сильноточных релятивистских электронных пучков. М., 1980. 167 с.
[3] *Миллер Р.* Введение в физику сильноточных пучков заряженных частиц. М., 1984. 432 с.
[4] *Лоусон Д.* Физика пучков заряженных частиц. М., 1980. 438 с.
[5] *Дэвидсон Р.* Теория заряженной плазмы. М., 1978. 215 с.
[6] *Lee E.P.* // Phys. Fluids. 1976. Vol. 19. N 1. P. 60–69.
[7] *Lee E.P.* // Phys. Fluids. 1978. Vol. 21. N 8. P. 1327–1343.
[8] *Uhm H.S., Lampe M.* // Phys. Fluids. 1980. Vol. 23. N 8. P. 1574–1585.
[9] *Buchanan H.L.* // Phys. Fluids. 1987. Vol. 30. N 1. P. 221–231.
[10] *Колесников Е.К., Савкин А.Д.* // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. Вып. 1. С. 54–56.
[11] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // РиЭ. 1992. Т. 37. № 4. С. 694–699.
[12] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 5. С. 68–73.
[13] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 7. С. 127–129.
[14] *Fernsler R.F., Slinker S.P., Hubbard R.F.* // Phys. Fluids. B. 1991. Vol. 3. N 9. P. 2696–2706.
[15] *Надеждин Е.Р, Сорокин Г.А.* // Физика плазмы. 1983. Т. 9. № 5. С. 988–991.
[16] *Надеждин Е.Р., Сорокин Г.А.* // Физика плазмы. 1988. Т. 14. № 5. С. 619–622.
[17] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 7. С. 108–111.
[18] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 11. С. 62–65.
[19] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // РиЭ. 1999. Т. 44. № 11. С. 1331–1333.
[20] *Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 1. С. 76–78.
[21] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 6. С. 69–71.
[22] *Либов Р.* Введение в теорию кинетических уравнений. М., 1974. 371 с.
[23] *Чандрасекар С.* Стохастические проблемы в физике и астрономии. М., 1947. 168 с.
[24] *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М., 1978. 495 с.
[25] *Джексон Д.* Классическая электродинамика. М., 1975. 702 с.
[26] *Росси Б., Ольберт С.* Введение в физику космического пространства. М., 1974. 391 с.