

Краткие сообщения

01;07;09;10

Кристаллический микроондулятор

© Н.А. Корхмазян, Н.Н. Корхмазян, Н.Э. Бабаджанян

Армянский государственный педагогический университет им. Х. Абовяна, Ереван, Армения

(Поступило в Редакцию 20 мая 2003 г.)

Развита теория излучения в кристаллических микроондуляторах. Показано, что эти ондуляторы могут быть наиболее эффективными с практической точки зрения альтернативными источниками излучения в области длин волн $\lambda = 0.1-1.0 \text{ \AA}$.

В последние годы активно исследуется вопрос о возможном осуществлении так называемых кристаллических ондуляторов [1–5]. Как известно [6–8], если монокристалл твердого раствора $\text{Si}_{1-x}\text{Ge}_x$ выращивать таким образом, чтобы вдоль направления $(1\bar{1}1)$ концентрация раствора имела постоянный градиент, то атомные плоскости будут веерообразно расходиться, а перпендикулярные к ним атомные плоскости (111) будут изгибаться, образуя искривленный канал с определенным радиусом кривизны. В работе [5] предлагается рассматривать такой набор плоскопараллельных эквидистантных пластин, у которых направления кривизны периодически меняются, как микроондулятор (рис. 1). Такие кристаллические ондуляторы в определенных областях рентгеновского излучения по ряду технических причин могут быть предпочтительнее, чем обычные магнитные ондуляторы. Имеется в виду излучение в области длин волн $\lambda = 0.1-1 \text{ \AA}$, применяемое в структурных исследованиях.

Как видно из рис. 1, захваченная в канал релятивистская заряженная частица будет двигаться по кусочно-круговой периодической траектории с частотой колебания $\Omega = 2\pi\beta c/L$. Здесь $L = 2(a+b)$ — период ондулятора, a — толщина пластин, b — расстояние между пластинами. Кроме того, внутри пластины частица совершает также колебания с гораздо большей частотой $\Omega_k \gg \Omega$. Чтобы оценить эффективность подобных

ондуляторов, вычислим частотно-угловое распределение излучения по формуле [9]

$$\frac{dW}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c^3} |\mathbf{I}|^2, \quad \mathbf{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbf{nv}] \exp i[\omega t - \mathbf{kr}(t)] dt, \quad (1)$$

где $\mathbf{r}(t) = [x(t), 0, z = \beta ct]$ — радиус-вектор частицы; $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ — единичный вектор, направленный вдоль пролета излученного кванта; βc — продольная скорость частицы.

Для гладкошпигитой траектории частицы с точностью до малых порядка $a^2/16R \ll 1$ имеем

$$x = \begin{cases} az/2R, & 0 \leq z \leq b/2; \\ x_0 - (z(a+b)/2)^2/2R + \\ + a_k \sin \frac{\Omega_k}{\beta c} (z - b/2), & b/2 \leq z \leq (2a+b)/2; \\ a(a+b-z)/2R, & (2a+b)/2 \leq z \leq a+b. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь a_k — амплитуда колебаний в канале, которая имеет атомные размеры; R — радиус кривизны канала. Вводя новую переменную

$$z = \varphi(a+b)/\pi, \quad (3)$$

вместо (2) получим

$$x = \begin{cases} a(a+b)\varphi/2\pi R, & 0 \leq \varphi \leq \pi b/2(a+b) \equiv \varphi_1; \\ x_0 - (a+b)^2(\varphi - \pi/2)^2/2\pi^2 R + a_k \sin \frac{\Omega_k}{\Omega} (\varphi - \pi b/L), & \\ \varphi_1 \leq \pi b/2(a+b) \leq \varphi \leq \pi(2a+b)/2(a+b) \equiv \varphi_2; \\ a(a+b)(\pi - \varphi)/2\pi R, & \varphi_2 \leq \varphi \leq \pi. \end{cases} \quad (4)$$

Как известно [10], нечетные периодические функции разлагаются в ряд Фурье только по синусам

$$x(\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin m\varphi, \quad a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin m\varphi d\varphi. \quad (5)$$

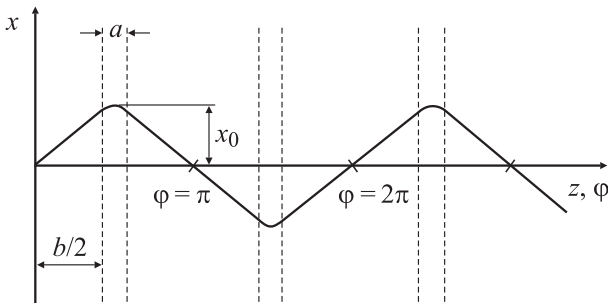


Рис. 1. Кривая представляет траекторию движения частицы в кристаллическом ондуляторе.

С учетом того, что $x(\varphi + \pi) = -x(\varphi)$, получим, что отличными от нуля оказываются только коэффициенты Фурье с нечетными номерами. Поэтому вместо (5) имеем

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \sin(2n-1)\varphi,$$

$$a_{2n-1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(2n-1)\varphi d\varphi. \quad (6)$$

Вклад в коэффициент a_{2n-1} от колебаний в канале имеет вид

$$\frac{2}{n} a_k \int_0^{\pi} \sin \frac{\Omega_k}{\Omega} (\varphi - \pi b/L) \sin(2n-1)\varphi d\varphi. \quad (7)$$

В практически осуществимых случаях амплитуда a_k более чем на два порядка меньше, чем x_0 , и, кроме того, $\Omega_k \gg \Omega$. Поэтому для малых n , для которых $(2n-1) \ll \Omega_k/\Omega$ и первый синус в (7) быстро осциллирует, этим вкладом можно пренебречь. Другими словами, для низших гармоник ондулятора колебаниями внутри кристалла можно пренебречь.

Подставляя $z = \beta ct$ в (3), для φ находим $\varphi = \Omega t$, что необходимо подставить в первую формулу в (6). Подынтегральную векторную величину в (1) представим в виде

$$[\mathbf{nv}] = \mathbf{A} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{B}_{2n-1} \cos(2n-1)\Omega t,$$

$$\mathbf{A} = \beta c \sin \theta (\mathbf{i} \sin \varphi - \mathbf{j} \cos \varphi),$$

$$\mathbf{B}_{2n-1} = U_{2n-1} (\mathbf{j} \cos \theta - \mathbf{k} \sin \theta \sin \varphi),$$

$$U_{2n-1} = (2n-1)\Omega a_{2n-1}, \quad (8)$$

где $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ — орты по осям x, y, z .

Жесткое излучение релятивистских частиц в основном происходит в пределах углов $\theta \approx \sqrt{1-\beta^2} = 1/\gamma$ к направлению скорости. Угол наклона прямолинейных участков траектории равен $a/2R$. Поэтому для получения интерференции из разных участков траектории необходимо выполнение условия

$$a/2R \leq 1/\gamma. \quad (9)$$

Подставляя (4) в (6), для коэффициентов Фурье находим

$$a_{2n-1} = -\frac{(-1)^n}{2n-1} \frac{1}{2\pi R} \left[a^2 + \frac{8}{\pi^2} \frac{(a+b)^2}{(2n-1)^2} \right]$$

$$\times \sin \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)a}{a+b}. \quad (10)$$

Из этой формулы видно, что с увеличением номера гармоники величина a_{2n-1} уменьшается. С другой

стороны, из теории ондуляторного излучения известно, что интенсивность излучения пропорциональна a_{2n-1}^2 . Поэтому ограничимся исследованием двух первых гармоник. Тогда с учетом (6) и (8) имеем

$$[\mathbf{nv}] = \mathbf{A} + \mathbf{B}_1 \cos \Omega t + \mathbf{B}_3 \cos 3\Omega t;$$

$$x = a_1 \sin \Omega t + a_3 \sin 3\Omega t. \quad (11)$$

Экспоненту в (1) с точностью до нескольких процентов можно представить в виде

$$\exp i(\omega t - \mathbf{kr}) = \left[1 - ik_x a_1 \sin \Omega t + \frac{1}{2} (-ik_x a_1 \sin \Omega t)^2 - ik_x a_3 \sin 3\Omega t \right] \exp i\omega(1 - \beta \cos \theta)t, \quad (12)$$

если наложить ограничение на частоту

$$|ik_x x| \leq \frac{\omega}{c} x_0 \sin \theta \cos \varphi \leq \frac{\omega}{c} \frac{x_0}{\gamma} \leq 0.7. \quad (13)$$

Величину x_0 можно найти из рис. 1

$$x_n = \frac{a(a+2b)}{8R}, \quad (14)$$

и поэтому вместо (13) получим

$$\omega \leq \frac{5.6cR}{a(a+2b)} \gamma. \quad (15)$$

Подставляя (11) и (12) в (1) и учитывая, что все δ -функции с ненулевыми аргументами равны нулю, получим

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^2 (k_x a_{2n-1} \mathbf{A} + \mathbf{B}_{2n-1}) \int_{-\infty}^{\infty} \exp i[\omega(1 - \beta \cos \theta) - (2n-1)\Omega]t dt + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} (k_x a_1)^2 \mathbf{A} + k_x a_1 \mathbf{B}_1 \right)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp i[\omega(1 - \beta \cos \theta) - 2\Omega]t dt. \quad (16)$$

Здесь первые два слагаемых определяют первые две гармоники, а третье слагаемое определяет поправку к первой гармонике. Возводя это выражение в квадрат и заменяя один интеграл на $2\pi\delta$ -функцию, а другой — на время излучения $T \Rightarrow \infty$, находим

$$\mathbf{I} = \frac{\pi T}{2\beta\omega} \sum_{n=1}^2 (k_x a_{2n-1} \mathbf{A} + \mathbf{B}_{2n-1})^2 \delta \left[\cos \theta - \left(\frac{1}{\beta} - \frac{(2n-1)\Omega}{\beta\omega} \right) \right]$$

$$\times \frac{\pi T}{8\beta\omega} \left[\frac{1}{2} (k_x a_1)^2 \mathbf{A} + k_x a_1 \mathbf{B}_1 \right]^2 \delta \left[\cos \theta - \left(\frac{1}{\beta} - \frac{2\Omega}{\beta\omega} \right) \right]. \quad (17)$$

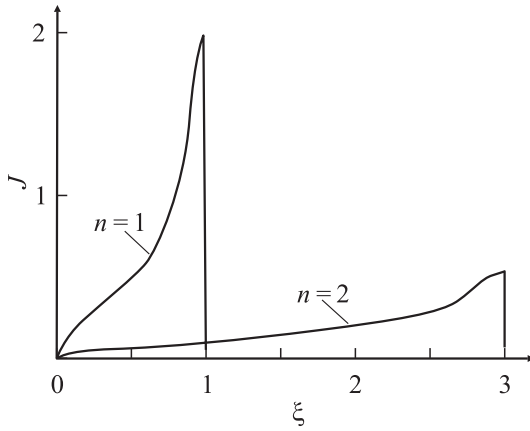


Рис. 2. Спектральное распределение излучения первых двух гармоник в кристаллическом ондуляторе. Интенсивность измерена в единицах $\Omega^3(\gamma e a_1/2c^2)^2$, а частота — в единицах $2\Omega\gamma^2$. Здесь a_1 — амплитуда первой гармоники, Ω — частота колебаний частицы.

Подставляя (17) в (1) и проведя интегрирование по углам, для спектральной плотности с единицы пути пролета частицы получим хорошо известный из теории ондуляторного излучения результат [11]

$$I_1 = \frac{dW_1}{d\omega dz} = \gamma^2 \frac{e^2 a_1^2 \Omega^3}{4c^4} \xi [1 + (1 - 2\xi)^2] \quad \xi = \omega/2\Omega\gamma^2, \\ 0 \leq \xi \leq 1; \\ I_2 = \frac{dW_2}{d\omega dz} = \gamma^2 \frac{e^2 a_1^2 \Omega^3}{4c^4} 9 \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^2 \xi \left[1 + \left(1 - \frac{2}{3}\xi\right)^2\right], \\ 0 \leq \xi \leq 3. \quad (18)$$

Аналогично для поправочного члена находим

$$\Delta I_1 = \gamma^4 \frac{e^2 a_1^2 \Omega^3}{4c^4} \xi(2 - \xi)[1 + 3(1 - \xi)^2], \quad 0 \leq \xi \leq 2. \quad (19)$$

Здесь $\xi = \omega/2\Omega\gamma^2$ — безразмерная частота. Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим кристаллический ондулятор с параметрами $a = 0.01$ см, $b = 0.7$ см, $R = 200$ см, $\gamma = 10^4$ ($E = 5$ GeV) и длиной деканализации $L_D = 0.2$ см, на которой умещается десять периодов ондулятора. Для таких параметров для коэффициентов Фурье первых двух гармоник по формуле (10) получим

$$a_1 = 7.1 \cdot 10^{-6} \text{ см}, \quad a_3 = 0.79 \cdot 10^{-6} \text{ см}, \\ (a_3/a_1)^2 = 0.012. \quad (20)$$

Длина волны излучения в интервале частот $\xi = 0.9-1.0$ для нашего случая будет порядка 0.7 \AA . Для числа таких квантов с единицы пути пробега имеем $0.5 \cdot 10^{-4}$ kV/cm. Для сравнения отметим, что для числа квантов в том же интервале частот от магнитного ондулятора с параметрами $L = 10$ см (шаг),

$H = 500$ Oe, $E \approx 13$ GeV имеем $0.36 \cdot 10^{-4}$ kV/cm. Необходимо отметить, что с целью увеличения числа испускаемых квантов магнитное поле нельзя усилить, так как условие дипольности при этом нарушается и спектр расплывается.

Из формул (18) следует, что вблизи пиковой частоты первой гармоники ($\xi = 1$) излучение второй гармоники пренебрежимо мало: $I_2/I_1 \approx 0.06$. Интенсивности обеих гармоник в зависимости от частоты приведены на рис. 2. Что же касается поправки (19), то она на рисунке не заметна, так как $\Delta I_1/I_1 = 0.013$. Заметим, что для обсуждаемого случая условия (9) и (15) хорошо выполняются. Формулы (18) пригодны также для частного случая $b = 0$. Из (10) видно, что в пределе, когда $R \rightarrow \infty$, ондуляторное излучение исчезает. Согласно (4), в этом случае для траектории частицы получим $x_k = a_k \sin \Omega_k t$, что соответствует траектории движения при каналировании. При этом мы пренебрегли несущественным сдвигом x_0 и начальной фазой $\Omega_k b/2\beta c$.

Развитая в данной работе теория показывает, что кристаллические микроондуляторы могут быть более предпочтительными с практической точки зрения альтернативными источниками излучения в области длин волн $\lambda \leq 0.1 \text{ \AA}$.

Список литературы

- [1] Corol A.V., Solov'ov A.V., Greiner W. // Int. J. Mod. Phys. E. 1999. Vol. 8. P. 49.
- [2] Mikkelsen U., Uggerhoj E. // Nucl. Instr. and Meth. 2000. Vol. B160. P. 435.
- [3] Avakian R.O., Avetyan K.T., Ispirian K.A., Melikyan E.A. Nato-Workshop. Nor Amberd (Armenia), 2001. Vol. 49. P. 277.
- [4] Avakian R.O., Gevorgian L.A., Ispirian K.A., Ispirian R.K. // Nucl. Instr. and Meth. 2001. Vol. B173. P. 112.
- [5] Авакян Р.О., Аветян К.Е., Испириан К.А., Меликян Э.Г. // Изв. НАН Армении. Физика. В печати.
- [6] Erko A., Schäfers F., Gudat W. et al. // Nucl. Instr. and Meth. 1996. Vol. 374. P. 408.
- [7] Veldkamp M., Erko A. et al. // Materials Science Forum. 1999. Vol. 308. N 3. P. 597.
- [8] Veldkamp M., Erko A. et al. // J. Appl. Phys. 1999. Vol. 38. P. 612.
- [9] Джексон Дж. Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965.
- [10] Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1964.
- [11] Корхмазян Н.А. // Изв. АН Арм. ССР. Физика. 1973. № 8. С. 405. Rad. Eff. 1981. Vol. 56. P. 33.