

01;05

## О расчете энергий пиннинга вихрей в длинном периодически модулированном джозефсоновском контакте

© М.А. Зеликман

Санкт-Петербургский государственный технический университет,  
195251 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: outex@city.com.ru

(Поступило в Редакцию 25 июня 2003 г.)

Предложена методика аналитического расчета джозефсоновской и магнитной энергий вихря в длинном периодически модулированном джозефсоновском контакте, а также энергии пиннинга вихря и ее составляющих, позволяющая учесть изменение формы вихря при изменении его положения. Показано, что применение этой методики в сравнении с существующими подходами ведет к существенному приближению рассчитанных значений к результатам точного компьютерного расчета. Проведен подробный анализ отклонения точной формы вихря от функции, полученной в результате решения дифференциального уравнения, приближенно заменяющего точное разностное уравнение.

### Введение

Исследования высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП), проведенные в последние годы, показали, что очень важную роль в происходящих процессах играют возникающие в образце вихревые структуры. В частности, пиннингом и взаимодействием вихрей друг с другом определяются процессы, происходящие при помещении образца ВТСП во внешнее магнитное поле.

Для расчета проникновения поля в образец обычно пользуются моделью критического состояния Бина, согласно которой все вихри в области, в которую проникло магнитное поле, находятся на грани равновесия, т.е. сила, действующая на каждый вихрь со стороны остальных, равна максимальной силе пиннинга вихря. Для вычисления профиля поля на основе модели Бина необходимо знать зависимость силы пиннинга от магнитного поля. Для проверки правильности модели Бина и установления пределов ее применимости надо понять детали структуры и поведения вихрей в образце.

Кроме того, при движении вихрей возникает особый механизм потерь энергии, отличный от обычного джоулевого нагрева. Вследствие этого даже при отсутствии обычного электрического сопротивления существуют потери энергии, т.е. сверхпроводимость нарушается. Пиннинг вихрей препятствует этому процессу. Таким образом, решение принципиальной для физики и техники проблемы повышения величин критических токов и полей также требует понимания деталей поведения вихрей, их строения, взаимодействия, механизмов и величины возможного пиннинга.

В последние годы внимание теоретиков и экспериментаторов привлекла проблема проникновения магнитного поля в длинный периодически модулированный джозефсоновский контакт. С одной стороны, это связано с возникшим интересом к искусственным структурам такого типа [1], на которых могут быть проведены теоретические предсказания. С другой стороны, эта задача

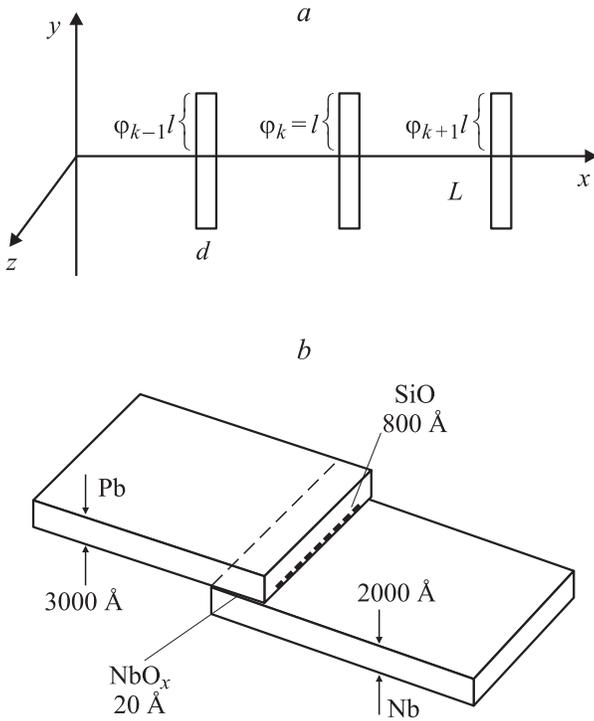
представляет собой модель, которой свойственны все процессы, имеющие место в сверхпроводящих образцах: выталкивание магнитного поля, возникновение вихрей, их пиннинг и все связанные с этим феномены, в частности проникновение в контакт внешнего магнитного поля. Математически же эта задача существенно проще аналогичной задачи для трехмерного сверхпроводника. Она может быть решена достаточно точно, что позволяет рассчитать структуру вихрей, найти энергии и силы пиннинга, проверить правильность модели Бина, а также понять различные детали происходящих процессов.

Периодически модулированный джозефсоновский контакт (рис. 1, *a*) представляет собой тонкий слой диэлектрика (плоскость  $xz$ ) между двумя сверхпроводниками, пересеченный параллельными друг другу бесконечными вдоль оси  $z$  полосами диэлектрика толщины  $2l$  вдоль оси  $y$  и ширины  $d$  вдоль оси  $x$ , периодически расположенными вдоль оси  $x$  на расстоянии  $L$  друг от друга. Внешнее магнитное поле, а также оси вихрей направлены вдоль оси  $z$ . На рис. 1, *b* показана структура искусственно создаваемого периодически модулированного джозефсоновского контакта [1]. На участках между полосами величина скачка фазы между сторонами контакта медленно меняется с координатой, в то время как при переходе через полосу она меняется скачком. Обозначим усредненное по  $k$ -му участку между полосами значение скачка через  $\varphi_k$  (рис. 1, *a*). Распределение величин  $\varphi_k$  описывает установившееся токовое состояние.

В работах [2,3] показано, что энергия стационарного вихря на  $1m$  его длины равна

$$E = E_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} (\varphi_{k+1} - \varphi_k)^2 + I(1 - \cos \varphi_k) \right], \quad (1)$$

где  $E_0 = h j_c \lambda^2 / 4e l$ ,  $I = 2Ll / \lambda^2$  — так называемый параметр пиннинга,  $\lambda = \sqrt{hc^2 / 8\pi j_c e d}$  — джозефсоновская длина,  $j_c$  — критическая плотность тока,  $e$  — заряд электрона,  $h$  — постоянная Планка.



**Рис. 1.** *a* — модель периодически модулированного джозефсоновского контакта (линия — проекция плоскости контакта на плоскость  $xy$ ); *b* — структура искусственно созданного периодически модулированного джозефсоновского контакта.

Далее везде будем считать энергии выраженными в единицах  $E_0$ . Первый член в (1) описывает магнитную энергию вихря, а второй — энергию джозефсоновских контактов.

Равновесные состояния вихря, соответствующие экстремуму его энергии, описываются следующей системой разностных уравнений, получаемых из условия  $\partial E / \partial \varphi_m = 0$ :

$$\varphi_{m+1} - 2\varphi_m + \varphi_{m-1} = I \sin \varphi_m. \quad (2)$$

Система уравнений, аналогичная (2), описывает также поведение плоских вихрей в трехмерной джозефсоновской среде [4].

Система уравнений (2) была впервые получена Френкелем и Конторовой для описания поведения краевых дислокаций в кристалле [5]. Она вследствие ее дискретности дает возможность анализировать поведение солитонов с учетом их пиннинга. Этот пиннинг определяется конечной величиной энергии, необходимой для смещения центра вихря из одной ячейки в другую.

Точное аналитическое решение нелинейной системы конечно-разностных уравнений (2) найти не удастся. При малых значениях параметра  $I$  распределение становится квазинепрерывным и система (2) преобразуется в дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = I \sin \varphi, \quad (3)$$

где  $x$  измеряется в единицах  $L$ .

Значения джозефсоновской и магнитной энергий вихря  $E_J$  и  $E_H$ , полученные из квазинепрерывного подхода при стремлении параметра  $I$  к нулю, действительно приближаются к их точным значениям. Однако требует серьезного анализа вопрос, могут ли значения энергии пиннинга быть получены из такого приближенного рассмотрения. Дело в том, что джозефсоновская и магнитная компоненты энергии пиннинга, равные разностям соответствующих энергий при разных положениях вихря, имеют существенно больший порядок малости по  $I$  и могут находиться за пределами погрешности приближения. Как будет показано далее, компоненты энергии пиннинга пропорциональны  $\exp(-\pi^2/\sqrt{I})$ , т.е. не могут быть разложены в степенной ряд по  $I$ , что подтверждает обоснованность сомнений.

В работе [6] проведены анализ возможностей применения различных приближенных подходов на базе уравнения (3) для расчета величин энергий и сопоставление результатов, полученных в разной степени приближения, друг с другом, а также с точным решением исходной задачи. На основе этого анализа в [6] сделаны следующие выводы.

Точный компьютерный расчет энергий вихря показал, что а) значения магнитной и джозефсоновской энергий вихря различаются, б) магнитная и джозефсоновская компоненты энергии пиннинга близки по величине и имеют разные знаки, так что суммарная энергия пиннинга на порядок меньше ее составляющих.

Теоретический анализ показывает, что полная энергия вихря, имеющего форму, описываемую решением системы конечно-разностных уравнений (2) в предположении неизменности его формы при смещении, не зависит от его положения относительно ячеек среды. Иначе говоря, энергия пиннинга равна нулю. Эта ситуация соответствует точному равенству величин джозефсоновской и магнитной составляющих энергии пиннинга и противоположности их знаков. Отличие же суммарной энергии пиннинга от нуля определяется изменением формы вихря в зависимости от его положения, причем величина этой энергии существенно меньше ее джозефсоновской и магнитной составляющих. Именно такое соотношение и наблюдается при точном компьютерном расчете.

Таким образом, различие по величине джозефсоновской и магнитной составляющих энергии вихря, а также противоположность знаков джозефсоновской и магнитной составляющих энергии пиннинга и примерное равенство их модулей можно считать характерными особенностями данной задачи. При использовании приближенных подходов, основанных на решении дифференциального уравнения, желательно также получить эти особенности.

Отличие дискретной задачи от непрерывной в данном случае определяется тремя моментами: а) дискретность суммирования в выражении (1) для энергий; б) существование разностных членов в суммируемых выражениях, например  $(\varphi_{k+1} - \varphi_k)^2$  в (1); в) нахождение формы вихря из системы конечно-разностных уравнений (2).

Отказ от всех трех пунктов, т.е. переход в (1) от суммы к интегралу, замена конечных разностей в (1) на производные, а системы конечно-разностных уравнений (2) — на дифференциальное уравнение (3), означал бы полный отказ от учета дискретности. В этом случае джозефсоновская и магнитная энергии  $E_J$  и  $E_H$  оказываются равны друг другу, а обе компоненты энергии пиннинга, естественно, равны нулю.

При использовании метода расчета энергий пиннинга, учитывающего только дискретность суммирования в выражении (1) для энергий (пункт а), джозефсоновская и магнитная энергии  $E_J$  и  $E_H$  оказываются равными друг другу и определяются теми же выражениями, что и в непрерывном подходе, однако компоненты энергии пиннинга уже не равны нулю, но в точности равны друг другу [3].

Сохранение же разностных членов в выражении для магнитной энергии (пункты а и б) приводит к различию значений магнитной и джозефсоновской энергии вихря и к различию знаков магнитной и джозефсоновской компонент энергии пиннинга вихря [6]. Таким образом, этот подход сохраняет обе выделенные особенности, что является шагом по направлению к точному решению.

Однако сравнение результатов применения этого подхода с величинами энергий, полученными при точном численном решении системы разностных уравнений (2) (т.е. при учете всех трех пунктов — а, б и в), позволяет обнаружить следующие существенные отличия.

1) Соответствующие двум подходам значения магнитных и джозефсоновских энергий различаются, причем есть отличия в соотношении величин энергий: в приближенной модели магнитная энергия  $E_H$  при всех значениях  $I$  меньше джозефсоновской, а в точном решении соотношение обратное.

2) Точные значения джозефсоновской  $\Delta E_J$  и магнитной  $\Delta E_H$  составляющих энергии пиннинга во много раз больше значений, полученных на базе приближенного подхода.

3) Точные значения  $\Delta E_J$  и  $\Delta E_H$  близки друг к другу по величине. Из приближенного же подхода следует, что  $\Delta E_J$  на порядок больше  $\Delta E_H$ .

В настоящей работе используется модификация приближенного подхода, предложенного в [6], позволяющая устранить эти расхождения. Кроме того, находит объяснение обнаруженный в [6] факт удовлетворительного совпадения результатов приближенного и точного расчетов суммарной энергии пиннинга при резком несогласии результатов отдельно по джозефсоновской и магнитной составляющим.

## Основные уравнения

Для нахождения энергии пиннинга вихрей необходимо найти величину дискретной суммы (1) при различных положениях вихря. Используя разложение суммы

$\delta$ -функций в ряд Фурье

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(i2\pi nx) = \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(i2\pi nx), \quad (4)$$

представим выражение (1) в виде

$$\begin{aligned} E &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\varphi_k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi(x + \alpha)) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k) dx \\ &= \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi(x)) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(i2\pi n(x - \alpha)) dx, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\alpha$  — координата центра вихря относительно края ячейки: например, если центр вихря находится на границе двух ячеек, то  $\alpha = 0$ , если же он в центре ячейки, то  $\alpha = 0.5$ .

Если функция  $f(x)$  четная, то выражение (5) принимает вид

$$E = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(2\pi n\alpha) \operatorname{Re} \int_0^{\infty} f(\varphi(x)) \exp(i2\pi nx) dx. \quad (6)$$

В качестве  $\varphi(x)$  может использоваться решение дифференциального уравнения (3), заменяющего собой дискретную систему (2), для одиночного вихря имеющее вид,

$$\varphi(x) = 4 \operatorname{arctg}(\exp(-x\sqrt{I})). \quad (7)$$

График функции (7) приведен на рис. 2. Это решение соответствует вихрю в непрерывной среде. Использование для расчета пиннинга приближенного решения, не учитывающего дискретность среды, является неким допущением, искажающим истинную картину. На рис. 3 показан график функции, представляющей собой деленную на  $I$  разность между точным решением системы уравнений в конечных разностях (2) и функцией (7). Этот график остается одним и тем же при различных значениях  $I$ , что говорит о том, что величина этой разности пропорциональна  $I$ . В качестве следующего приближения надо было бы найти решение дифференциального уравнения, более точно заменяющего дискретное уравнение (2), и подставить его в (6). Анализ этой

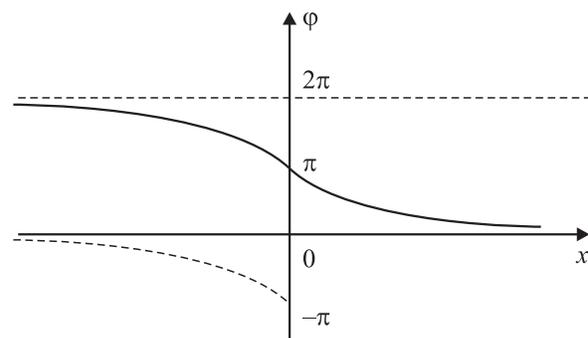
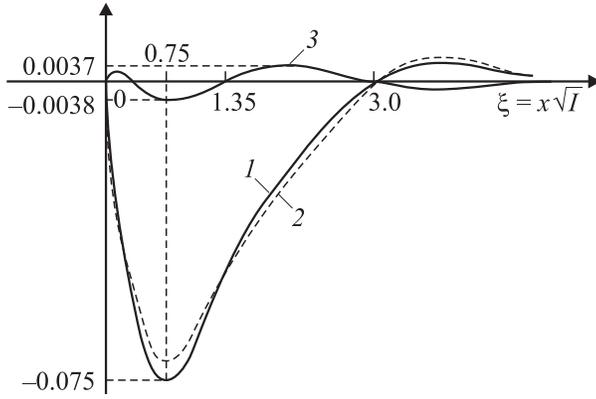


Рис. 2. Решение (7) дифференциального уравнения (3) для уединенного вихря.



**Рис. 3.** Графики численно рассчитанной функции  $\varphi_{lc}(\xi)$  (1), аппроксимирующей ее функции  $\rho(\xi)$  (2) и их разности  $\rho(\xi) - \varphi_{lc}(\xi)$  (3).

возможности проведен в Приложении. Оказывается, точное решение такого дифференциального уравнения во всей области найти не удастся. Аппроксимация же такого решения простыми гладкими функциями, хотя и приводит к уточнению значения энергии вихря, но не позволяет получить уточненные значения энергии пиннинга и ее составляющих, поскольку эти величины очень чувствительны к форме вихря. Иначе говоря, приближенное уточнение формы вихря не ведет к повышению точности вычисления составляющих энергии пиннинга.

В настоящей работе предлагается другой, более простой и достаточно эффективный путь нахождения уточненных значений энергий. Основная идея такова. Искомое точное решение должно минимизировать полную энергию, описываемую выражением (1). Функция (7) содержит характерную безразмерную длину  $1/\sqrt{I}$ , которая возникает при решении дифференциального уравнения (3), являющегося неким приближением точного уравнения (2). В качестве следующего приближения выберем функцию (7), заменив величину  $\sqrt{I}$  на некоторую обратную длину  $\xi$ , и найдем значение  $\xi$ , при котором выражение (1) имеет минимум.

Такой подход при математической простоте позволяет, как будет видно из дальнейшего, получить результаты, значительно более близкие к точному решению. Кроме того, в его пользу свидетельствует факт различия характерных длин для уравнений (2) и (3), который легко обнаружить в области малых  $\varphi$ . Там решение (7) дифференциального уравнения (3) принимает вид  $\varphi(x) = 4 \exp(-x\sqrt{I})$ , а разностное уравнение (2) линеаризуется и имеет точное решение

$$\varphi_k = C \left( 1 + \frac{I}{2} - \sqrt{I + \frac{I^2}{4}} \right)^k \approx C \exp \left( -k\sqrt{I} \left( 1 - \frac{I}{24} \right) \right). \quad (8)$$

Как видно из этих соотношений, решения разностного и дифференциального уравнений даже в области малых  $\varphi$  имеют разные характерные длины.

В работе [6] на базе формул (6) и (7) получены следующие выражения для составляющих энергии вихря с  $n = 0, \pm 1$ :

$$E_{J0} = 4\sqrt{I}; \quad E_{J1} = 16\pi^2 \exp \left( -\frac{\pi^2}{\sqrt{I}} \right) \cos(2\pi\alpha); \quad (9a)$$

$$E_{H0} = 4\sqrt{I} - \frac{1}{9}I^{3/2} + \frac{7}{1350}I^{5/2} + \dots;$$

$$E_{H1} = -16 \exp(-\pi^2/\sqrt{I}) (2.43766 - I/12) \cos(2\pi\alpha). \quad (9b)$$

При замене в формулах (9)  $\sqrt{I}$  на  $\xi$  следует иметь в виду, что параметр пиннинга  $I$  появится в них двумя путями: 1) как результат подстановки решения (7), 2) как коэффициент в выражении для джозефсоновской энергии в (1). Сохраняя в формулах (9) значения  $I$ , появившиеся вторым путем, получим для суммарной энергии вихря

$$E_S = \frac{4I}{\xi} + 4\xi - \frac{\xi^3}{9} + 16 \exp(-\pi^2/\xi) \left( \frac{\pi^2 I}{\xi^2} - 2.4 + \xi^2/12 \right) \cos 2\pi\alpha. \quad (10)$$

При выводе формулы (10) мы ограничились первыми двумя членами в выражении (9б) для магнитной энергии  $E_{H0}$ . В то же время последний член в правой части (10), отвечающий за пиннинг, сохранен, хотя по величине он на много порядков меньше отброшенных. При вычислении поправок к джозефсоновской и магнитной энергиям вихря этим членом можно пренебречь. Тогда минимум полной энергии  $E_S$  достигается при

$$\xi = \sqrt{I}(1 + I/24) = \sqrt{I} + \Delta, \quad (11)$$

где  $\Delta = I^{1.5}/24$ .

При этом новые значения джозефсоновской и магнитной энергий вихря равны

$$\tilde{E}_{J0} = E_{J0} - 4\Delta = 4\sqrt{I} - \frac{I^{3/2}}{6}, \quad (12)$$

$$\tilde{E}_{H0} = E_{H0} + 4\Delta = 4\sqrt{I} + \frac{I^{3/2}}{18}. \quad (13)$$

При вычислении энергии пиннинга и ее составляющих последний член в правой части (10) должен быть сохранен, так как именно он отвечает за изменение энергии вихря при изменении его положения. Теоретический анализ, проведенный в [6], показал, что полная энергия вихря, форма которого описывается решением системы разностных уравнений в предположении неизменности его формы при смещении, не зависит от его положения относительно ячеек среды. Иначе говоря, энергия пиннинга в этом случае была бы равна нулю. Отличие же суммарной энергии пиннинга от нуля определяется изменением формы вихря в зависимости от его расположения. Формулы (9) для  $E_{J1}$  и  $E_{H1}$ ,

определяющие энергию пиннинга в [6], получены как раз в предположении независимости формы вихря от его координат, поэтому отличие энергии пиннинга от нуля в [6] связано с отклонением функции (7) от точного решения уравнения (2). Из вышесказанного следует, что есть основания ожидать значительного улучшения результатов при учете изменения формы вихря с координатой.

Важным преимуществом предлагаемой методики является то, что она дает возможность учесть изменение формы вихря при расчете его энергии в различных положениях. Минимизация выражения (10) при учете последнего члена справа приводит к тому, что минимумы при различных положениях центра вихря относительно центра ячейки достигаются при разных значениях  $\xi$ , т. е. при различных формах вихря,

$$\xi(\alpha) = \sqrt{I} + \Delta - \delta \cos 2\pi\alpha, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{2\pi^2}{\sqrt{I}} \exp\left(-\frac{\pi^2}{\sqrt{I}}\right) \left(1 + \frac{\pi^2}{24}\sqrt{I}\right) (\pi^2 - 2.43766 - 2\sqrt{I}) \\ &\approx \frac{147}{\sqrt{I}} \exp\left(-\frac{\pi^2}{\sqrt{I}}\right) \left(1 + \frac{\sqrt{I}}{7}\right). \end{aligned} \quad (15)$$

Отметим, что при выводе (15) мы учли следующий порядок по  $\sqrt{I}$ . При этом множитель  $(1 + \pi^2\sqrt{I}/24)$  возникает при сохранении второго члена в разложении по  $\Delta$  функции  $\exp(-\pi^2/(\sqrt{I} + \Delta))$ .

Для равновесных положений вихря, т. е. для случаев, когда центр вихря находится на границе двух ячеек или в центре ячейки,  $\cos 2\pi\alpha$  равен соответственно  $+1$  и  $-1$ . Тогда джозефсоновская и магнитная составляющие энергии пиннинга определяются выражениями

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{E}_J &= \Delta E_J \left(1 + \frac{\pi^2}{24}\sqrt{I}\right) + 8\delta \\ &= \frac{16\pi^2}{\sqrt{I}} \exp\left(-\frac{\pi^2}{\sqrt{I}}\right) \left(1 + \frac{\pi^2}{24}\sqrt{I}\right) (\pi^2 - 2.43766) \\ &\approx 8\delta \left(1 + 0.27\sqrt{I}\right), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\Delta\tilde{E}_H = \Delta E_H \left(1 + \frac{\pi^2}{24}\sqrt{I}\right) - 8\delta \approx -8\delta \left(1 + 0.07\sqrt{I}\right), \quad (17)$$

где  $\Delta E_J$  и  $\Delta E_H$  — составляющие энергии пиннинга по [6], задаваемые выражениями

$$\begin{aligned} \Delta E_J &= 32\pi^2 \exp\left(-\frac{\pi^2}{\sqrt{I}}\right), \\ \Delta E_H &= -32 \exp\left(-\pi^2/\sqrt{I}\right) (2.43766 - I/12). \end{aligned} \quad (18)$$

Суммарная энергия пиннинга равна

$$\tilde{E}_P = \Delta\tilde{E}_J + \Delta\tilde{E}_H = E_P \left(1 + \frac{\pi^2}{24}\sqrt{I}\right) \approx 1.6\delta\sqrt{I}, \quad (19)$$

где

$$E_P = 32 \exp(-\pi^2/\sqrt{I}) (\pi^2 - 2.43766 + I/12) \quad (20)$$

— энергия пиннинга согласно [6].

Таким образом, как суммарная энергия пиннинга (19), так и ее составляющие (16), (17) выражаются через величину  $\delta$ .

Значения  $\Delta\tilde{E}_J$  и  $\Delta\tilde{E}_H$  противоположны по знаку и примерно равны по модулю, так что суммарная энергия пиннинга  $\tilde{E}_P$  по модулю намного меньше каждой из своих составляющих. Именно такой результат дает точный компьютерный расчет энергий пиннинга.

Из формул (16) и (17) видно, что, как и предсказывалось теоретически в [6], основной вклад в джозефсоновскую и магнитную составляющие энергии пиннинга вносят именно члены  $8\delta$ , связанные с изменением формы вихря при его смещении относительно ячейки.

## Анализ полученных результатов

В табл. 1 приведены величины джозефсоновской и магнитной энергий вихря, вычисленные по различным формулам, а также их точные значения, полученные компьютерным расчетом [6] (точнее говоря, полусуммы их значений для устойчивого и неустойчивого равновесных положений вихря). Из этих результатов видно, что уточненные формулы (12), (13) дают результаты, практически полностью совпадающие с точными значениями. Отметим, что учет в  $\xi$  и  $\Delta$  следующего порядка по  $I$

$$\xi = \sqrt{I} \left(1 + \frac{I}{24} + \frac{49I^2}{17280}\right) \quad (21)$$

ведет к еще большему согласию приближенных результатов с точными (нижние строчки в соответствующих столбцах табл. 1). Учет членов  $(\pm 4\Delta)$  в (12) и (13) приводит к правильному соотношению между джозефсоновской и магнитной энергиями вихря (магнитная энергия при всех значениях  $I$  меньше джозефсоновской).

В табл. 2 приведены значения составляющих энергии пиннинга, найденные разными способами. Из сопоставления результатов видно, что предлагаемая методика (формулы (16) и (17)) ведет к существенному улучшению согласия с точным компьютерным решением. Джозефсоновская и магнитная составляющие энергии пиннинга близки друг к другу по величине и противоположны по знаку, что соответствует как теоретическим ожиданиям, так и результатам точного компьютерного расчета.

Сами значения этих величин существенно приближаются к точным значениям. Отметим следующий важный факт. Отношение рассчитанных по формулам (16), (17) и (19) величин джозефсоновской и магнитной составляющих, а также суммарной энергии пиннинга к их точным значениям одно и то же. Иначе это можно сформулировать так: полученные формулы дают

**Таблица 1.** Значения магнитной и джозефсоновской энергий, найденные разными способами

$I$	Теория [6] формулы (9)		Корректированная теория (12), (13), (21)		Точное решение из работы [6]		Численный расчет по (1) с $\varphi_k$ из (П.9)	
	$E_{J_0}$	$E_{H_0}$	$\tilde{E}_{J_0}$	$\tilde{E}_{H_0}$	$E_J$	$E_H$	$\tilde{E}_J$	$\tilde{E}_H$
0.08	1.1314	1.1289	1.1276 1.1275	1.1326 1.1326	1.1275	1.1326	1.1277	1.1325
0.15	1.5492	1.5428	1.5395 1.5394	1.5524 1.5525	1.5393	1.5525	1.5398	1.5520
0.40	2.5298	2.5022	2.4877 2.4865	2.5439 2.5450	2.4860	2.5452	2.4890	2.5417
0.70	3.347	3.2836	3.2490 3.2444	3.3792 3.3838	3.2393	3.3853	3.252	3.373
1.00	4.000	3.894	3.833 3.822	4.055 4.067	3.806	4.073	3.840	4.041

**Таблица 2.** Значения составляющих энергии пиннинга, найденные разными способами

$I$	Теория [6] формулы (18), (20)			Корректированная теория формулы (16), (17), (19)			Точное решение		
	$\Delta E_H$	$\Delta E_J$	$E_P$	$\tilde{\Delta E}_H$	$\tilde{\Delta E}_J$	$\tilde{E}_P$	$\Delta E_H$	$\Delta E_J$	$E_P$
0.08	$-5.46E-14$	$2.22E-13$	$1.67E-13$	$-3.06E-12$	$3.25E-12$	$1.86E-13$	$-7.33E-12$	$7.77E-12$	$4.45E-13$
0.15	$-6.647E-10$	$2.705E-9$	$2.04E-9$	$-2.77E-8$	$3.009E-8$	$2.36E-9$	$-6.095E-8$	$6.617E-8$	$5.22E-9$
0.40	$-1.285E-5$	$5.27E-5$	$3.99E-5$	$-3.402E-4$	$3.905E-4$	$5.03E-5$	$-6.21E-4$	$7.14E-4$	$9.29E-5$
0.70	$-5.734E-4$	$2.38E-3$	$1.81E-3$	$-1.18E-2$	$1.42E-2$	$2.43E-3$	$-1.86E-2$	$2.24E-2$	$3.90E-3$
1.00	$-3.897E-3$	$1.63E-2$	$1.24E-2$	$-6.81E-2$	$8.57E-2$	$1.75E-2$	$-9.5E-2$	$1.21E-1$	$2.60E-2$

**Таблица 3.** Значения составляющих энергии пиннинга с учетом корректирующего множителя

$I$	Корректированная теория после умножения на $1.4\sqrt[4]{I}$			Точное решение из работы [6]		
	$\tilde{\Delta E}_H \cdot \frac{1.4}{\sqrt[4]{I}}$	$\tilde{\Delta E}_J \cdot \frac{1.4}{\sqrt[4]{I}}$	$\tilde{E}_P \cdot \frac{1.4}{\sqrt[4]{I}}$	$\Delta E_H$	$\Delta E_J$	$E_P$
0.08	$-8.22E-12$	$8.7E-12$	$5.00E-13$	$-7.33E-12$	$7.77E-12$	$4.45E-13$
0.15	$-6.4E-8$	$6.9E-8$	$5.43E-9$	$-6.095E-8$	$6.617E-8$	$5.22E-9$
0.40	$-6.1E-4$	$7.0E-4$	$9.03E-5$	$-6.21E-4$	$7.14E-4$	$9.29E-5$
0.70	$-1.84E-2$	$2.22E-2$	$3.79E-3$	$-1.86E-2$	$2.24E-2$	$3.90E-3$
1.00	$-0.097$	$0.122$	$2.51E-2$	$-0.095$	$0.121$	$2.60E-2$

правильное значение отношения суммарной энергии пиннинга к величине одной из ее составляющих. Можно сделать вывод о том, что предложенная методика учета изменения формы вихря полностью адекватна задаче, а не очень существенные отклонения рассчитанных величин энергии пиннинга и ее составляющих от точных значений имеют причиной не вполне точное выражение для величины  $\delta$  (формула (15)). При выводе (15) использовались выражения (9), полученные из решения (7) дифференциального уравнения (3), которое, как уже говорилось, является лишь приближением точного разностного уравнения (2). Поэтому некоторая неточность выражения (15) не является неожиданной. Скорее, можно удивляться тому, что это выражение дает результаты, столь близкие к точным значениям.

Для лучшего совпадения результатов расчета с точными можно в выражение для  $\delta$  ввести корректирующий коэффициент, равный  $1.4\sqrt[4]{I}$ . В табл. 3 приведены результаты пересчета с учетом этого коэффициента величин энергии пиннинга и ее джозефсоновской и магнитной составляющих. Во всем рассматриваемом диапазоне получается хорошее согласие расчетных значений с точными. Следует отметить, что точный компьютерный расчет производился с точностью до 16-й значащей цифры. Детальный анализ показывает, что при такой точности вычислений расчет компонент энергии пиннинга для значений  $I < 0.08$  невозможен. Для проверки правомерности использования такого корректирующего коэффициента при меньших значениях  $I$  надо повысить точность расчетов.

Для уточнения выражений (9) следовало бы искать решение дифференциального уравнения, более точно заменяющего дискретное уравнение (2). Анализ этой возможности проведен в Приложении. Оказывается, точное решение такого дифференциального уравнения во всей области найти не удастся. Аппроксимация же такого решения простыми гладкими функциями хотя и приводит к уточнению значения энергии вихря, но не позволяет получить уточненные значения энергии пиннинга и ее составляющих, поскольку эти величины очень чувствительны к форме вихря. Иначе говоря, приближенный поиск уточненной формы вихря не ведет к повышению точности вычисления составляющих энергии пиннинга. Этот факт заставляет еще раз обратить внимание на ту степень близости к точным результатам, которую дает предложенный подход, основанный на решении дифференциального уравнения (3), являющегося также приближенной заменой истинного разностного уравнения (2).

Проведенное исследование дает возможность ответить на вопрос, поставленный в [6]: почему точные значения суммарной энергии пиннинга несущественно отличаются от результатов применения модели непрерывного вихря (без учета изменения формы) при резком несогласии результатов отдельно по джозефсоновской и магнитной составляющим? Из вышеизложенного ясно, что основной вклад в составляющие энергии пиннинга вносит именно изменение формы вихря при его смещении. В то же время суммарная энергия пиннинга находится как разность между минимальными значениями энергии вихря в двух его положениях, соответствующими различным значениям параметра  $\xi$  (см. формулу (14)). Тогда переход к случаю, рассмотренному в [6], состоит в замене параметра  $\xi$  из (14) на  $\sqrt{I}$ , т. е. изменение его на величину, примерно равную  $\Delta = I^{1.5}/24$ . Поскольку минимум энергии соответствует равенству нулю первой производной по  $\xi$ , то ее изменение есть величина второго порядка по изменению аргумента. Поэтому величины энергий вихря в двух его равновесных положениях, а также их разность, представляющая собой полную энергию пиннинга, при пренебрежении изменением формы вихря (случай, рассмотренный в [6]), не сильно отличаются от точных значений.

## Заключение

Предложена методика аналитического расчета джозефсоновской и магнитной энергий вихря в длинном периодически модулированном джозефсоновском контакте, а также энергии пиннинга вихря и ее составляющих, позволяющая учесть изменение формы вихря при изменении его положения.

Применение этой методики в сравнении с существующими подходами ведет к существенному приближению рассчитанных значений к результатам точного компьютерного расчета. В частности, а) устанавливается правильное соотношение между джозефсоновской и

магнитной энергиями вихря (магнитная энергия меньше джозефсоновской); б) джозефсоновская и магнитная составляющие энергии пиннинга близки друг к другу по величине и противоположны по знаку, что соответствует как теоретическим ожиданиям, так и результатам точного компьютерного расчета; в) значения суммарной энергии пиннинга вихря и ее джозефсоновской и магнитной составляющих существенно приближаются к их точным значениям.

Проведен подробный анализ отклонения точной формы вихря от функции, полученной в результате решения дифференциального уравнения, приближенно заменяющего точное разностное уравнение.

Настоящее исследование проведено в рамках работ по гранту Минпромнауки (№ 40.012.1.1.1146) по теме „Управляемая сверхпроводимость“.

## Приложение. Поиск уточненной формы вихря

Получим дифференциальное уравнение, заменяющее дискретное уравнение (2) с большей точностью, чем (3). Для этого воспользуемся разложением в степенной ряд и запишем значения  $\varphi_{m+1}$  и  $\varphi_{m-1}$  в виде

$$\varphi_{m\pm 1} = \varphi_m \pm \varphi_m^I + \frac{1}{2} \varphi_m^{II} \pm \frac{1}{6} \varphi_m^{III} + \frac{1}{24} \varphi_m^{IV} + \dots \quad (\text{П.1})$$

Подставляя (П.1) в (2), получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\varphi_m^{II} + \frac{1}{12} \varphi_m^{IV} + \frac{1}{360} \varphi_m^{VI} + \dots = I \sin \varphi_m. \quad (\text{П.2})$$

Переходя к переменной  $\xi = x\sqrt{I}$  и опуская индекс, получим

$$\varphi^{II} + \frac{I}{12} \varphi^{IV} + \frac{I}{360} \varphi^{VI} + \dots = \sin \varphi. \quad (\text{П.3})$$

Пренебрегая в (П.3) всеми членами слева, кроме первого, приходим к уравнению (3). Оставляя член с  $\varphi^{IV}$ , получим следующее приближение:

$$\varphi^{II} + \frac{I}{12} \varphi^{IV} = \sin \varphi. \quad (\text{П.4})$$

Таким образом, уравнение (3) заменяет разностное уравнение (2) с точностью до первого порядка по  $I$ .

Представив решение уравнения (П.4) в виде  $\varphi = \varphi_0(\xi) + I\varphi_1(\xi)$ , где  $\varphi_0(\xi)$  — решение (7) уравнения (3), получим дифференциальное уравнение для  $\varphi_1$

$$\varphi_1^{II} - \cos \varphi_0 \cdot \varphi_1 = -\frac{1}{12} \varphi_0^{IV}. \quad (\text{П.5})$$

Из (П.5) следует, что  $\varphi_1$  — универсальная функция для всех достаточно малых значений  $I$ . Аналитически решение уравнения (П.5) найти не удастся. На рис. 3 (кривая 1) показан график функции  $\varphi_{1C}(\xi)$ , представляющей

**Таблица 4.** Значения составляющих энергии пиннинга с поправкой к форме вихря

$I$	Численный расчет по (1) с функцией (П.9)			Точное решение из работы [6]		
	$\widetilde{\Delta E}_H$	$\widetilde{\Delta E}_J$	$\widetilde{E}_P$	$\Delta E_H$	$\Delta E_J$	$E_P$
0.08	2.09E-6	1.98E-6	-2.3E-7	-7.33E-12	7.77E-12	4.45E-13
0.15	1.94E-5	1.86E-5	-7.6E-7	-6.095E-8	6.617E-8	5.22E-9
0.40	6.43E-4	7.45E-4	1.02E-4	-6.21E-4	7.14E-4	9.29E-5
0.70	5.12E-3	8.59E-3	3.46E-3	-1.86E-2	2.24E-2	3.90E-3
1.00	1.96E-3	4.14E-2	2.17E-2	-9.5E-2	1.21E-1	2.60E-2

собой рассчитанную численно разность между точным решением разностного уравнения (2) и функцией (7).

Хотя во всей области  $\xi$  решить уравнение (П.5) не удастся, можно решить его при малых  $\xi$ , при которых  $\varphi_0(\xi) \ll 1$ . Тогда (П.5) принимает вид

$$\varphi_1^{\text{II}} - \varphi_1 = -\frac{1}{3} \exp(-\xi). \quad (\text{П.6})$$

Решение уравнения (П.6), стремящееся к нулю при  $\xi \rightarrow \infty$ , имеет вид

$$\varphi_1 = \left( C + \frac{1}{6} \xi \right) \exp(-\xi). \quad (\text{П.7})$$

На рис. 4 представлен график функции  $\psi(\xi) = \varphi_{1C}(\xi) \exp(\xi)$ , где  $\varphi_{1C}(\xi)$  — функция, график которой приведен на рис. 3 (кривая 1). Из рис. 4 видно, что при  $\xi > 2$   $\psi$  линейно зависит от  $\xi$ , что подтверждает правильность (П.7).

Значение постоянной  $C$  определяется поведением функции при малых значениях  $\xi$ . Уравнение (П.5) при  $\xi \ll 1$ , где  $\varphi_0(\xi) \approx \pi$ , также может быть решено и его решение имеет вид  $\varphi_1 = C_1 \sin \xi$ . Однако поскольку неизвестен вид функции в переходной области, то ни связь между  $C$  и  $C_1$ , ни их значения аналитически найти не удастся. Используя полученное из численного расчета значение  $\xi = 3$  пересечения графиков рис. 3 и 4 с осью абсцисс, можно найти значение  $C = -1/2$ . Таким образом, решение уравнения (П.4) при  $\xi \gg 1$  имеет вид

$$\varphi = \left( 4 - \frac{I}{2} + \frac{I}{6} \xi \right) \exp(-\xi). \quad (\text{П.8})$$

Отметим, что при  $\varphi_m \ll 1$  разностное уравнение (2) линеаризуется и может быть решено. Его решение имеет вид  $\varphi_m = C \cdot \lambda^m$ , где  $\lambda = 1 + I/2 - \sqrt{I + I^2/4}$  (см. формулу (8)). Используя это решение, также можно прийти к выражению (П.7).

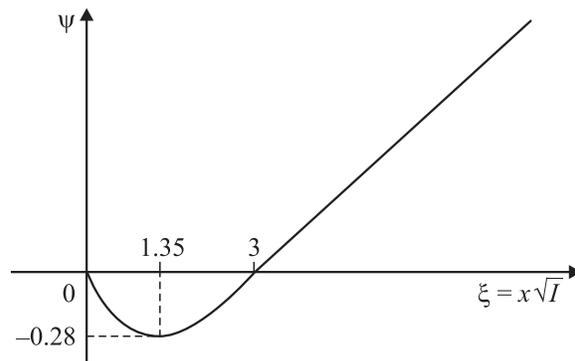
При  $\xi < 2$  решить разностное уравнение (2) или дифференцированное уравнение (П.5) не удастся. Можно попытаться аппроксимировать кривую 1 (рис. 3) какой-либо простой гладкой функцией. Например, на рис. 3 приведены графики функции  $\rho(\xi) = -0.2 \sin(\pi\xi/3) \exp(-\xi)$  (кривая 2) и разности между этой функцией и численно рассчитанной  $\varphi_{1C}(\xi)$  (кривая 3).

Результаты численного расчета энергий по формуле (1) при

$$\varphi_k = \varphi_0(k) + I \cdot \rho(k) = 4 \operatorname{arctg} \exp(-k\sqrt{I}) - 0.2 \cdot I \sin(\pi k \sqrt{I}/3) \exp(-k\sqrt{I}) \quad (\text{П.9})$$

приведены в табл. 1 и 4. Анализ этих результатов показывает, что учет поправки приводит к существенному приближению (по сравнению с результатами [6]) значений джозефсоновской и магнитной энергий к их точным значениям (столбцы 6, 7 и 8, 9 в табл. 1).

Однако полученные значения джозефсоновской и магнитной составляющих энергии пиннинга заметно отличаются от точных значений (табл. 4). Этого следовало ожидать, потому что, как показывает расчет по формулам (5) и (6), величины составляющих энергии пиннинга очень сильно зависят от вида используемой для описания формы вихря функции [7]. Изменение этой функции, мало меняющее вид ее графика и практически не влияющее на величину полной энергии вихря, может сильно сказаться на величинах энергий пиннинга. В частности, в данном случае расчет по формуле (6) приводит к появлению в выражениях для компонент энергии пиннинга в дополнение к членам вида  $\exp(-\pi^2/\sqrt{I})$  (см. формулы (9)) членов, пропорциональных  $I^{3.5}$ . При малых значениях  $I$  именно этими членами определяются рассчитанные при помощи (6) величины компонент энергии пиннинга, что и приводит к их отличию на порядки от точных значений (табл. 4). При увеличении  $I$  определяющими становятся члены с  $\exp(-\pi^2/\sqrt{I})$  и

**Рис. 4.** График функции  $\psi(\xi) = \varphi_{1C}(\xi) \exp(\xi)$ .

различие перестает быть столь сильным, хотя и остается весьма существенным.

Что касается суммарной энергии пиннинга (табл. 4), то по той же причине при немалых значениях параметра  $I$  учет поправки приближает ее к точным значениям, а при  $I \ll 1$  существенно удаляет от них.

## Список литературы

- [1] Golubov A.A., Serpuchenko I.L., Ustinov A.V. // Sov. Phys. JETP. 1988. Vol. 67. P. 1256.
- [2] Dorogovtsev S.N., Samukhin A.N. // Europhys. Lett. 1994. Vol. 25. P. 693.
- [3] Брыксин В.В., Гольцев А.В., Дороговцев С.Н., Кузьмин Ю.А., Самухин А.Н. // ЖЭТФ. 1991. Т. 100. С. 1281.
- [4] Zelikman M.A. // Superconductor Science & Technology. 1997. Vol. 9. N 11. P. 795.
- [5] Френкель Я.И., Конторова Т.М. // Физический журнал. 1939. Т. 1. С. 137.
- [6] Zelikman M.A. // Superconductor Science & Technology. 2001. Vol. 14. P. 371.
- [7] Зеликман М.А. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 7. С. 28.