01;03

Нелинейные периодические волны на заряженной поверхности глубокой маловязкой электропроводной жидкости

© Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 26 мая 2003 г. В окончательной редакции 11 августа 2003 г.)

В квадратичном приближении по отношению амплитуды волны к ее длине найдено аналитическое выражение для профиля волны конечной амплитуды на заряженной свободной поверхности глубокой маловязкой электропроводной жидкости. Показано, что влияние вязкости на профиль нелинейной волны проявляется как в затухании со временем амплитуды волны, так и в появлении асимметрии профиля волны при докритических в смысле реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля плотностях поверхностного заряда. При закритических значениях плотности поверхностного заряда влияние вязкости сводится к уменьшению значений декрементов нарастания эмиссионных выступов на неустойчивости свободной поверхности, слабом уширении этих выступов для коротких волн и сужении для длинных волн. Получены аналитические выражения для частот волн, декрементов их затухания и инкрементов неустойчивости, учитывающие влияние вязкости жидкости.

Введение

Начало исследования нелинейных периодических бегущих капиллярно-гравитационных волн на свободной поверхности жидкости относится к концу девятнадцатого века (см. например, [1]). В течение всего двадцатого века данная задача решалась лишь в приближении идеальной жидкости [2–7]. Немногочисленные попытки учета вязкости были выполнены малокорректным образом (см. например, [8,9]). И только недавно было найдено строгое решение задачи о волнах конечной амплитуды на свободной поверхности глубокой жидкости с конечной вязкостью [10–13]. Однако полученное в этих работах решение настолько громоздко, что не имеется возможности выписать в явном аналитическом виде выражений для профиля волны и поля скоростей в жидкости и весь анализ полученных результатов проводился численно. В этой связи представляется актуальным найти аналитические асимптотики решений [10–13] в пределе малой вязкости. Для многочисленных академических, технических и технологических приложений предствляет интерес обобщение задачи о расчете нелинейных волн в вязкой жидкости на случай электропроводной жидкости с однородно заряженной свободной поверхностью. В связи с вышесказанным и выполнено настоящее исследование.

Математическая формулировка задачи

Как в [10–13], примем, что несжимаемая ньютоновская жидкость с кинематической вязкостью ν, плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения γ в декартовой системе координат $Oxyz$ с осью Oz, направленной вертикально вверх в поле сил тяжести $\mathbf{g} \parallel -\mathbf{e}_z$, заполняет полупространство $z \le 0$. Внешняя среда — вакуум. Жидкость считается идеальным проводником, несущим однородно распределенный по свободной поверхности заряд, такой что электрическое поле над искаженной волновым движением свободной поверхностью жидкости в пределе $z \to \infty$ стремится к однородному с напряженностью $E_0\mathbf{e}_z$. Требуется исследовать временну́ю эволюцию начальной волновой деформации свободной поверхности жидкости.

Пусть $u = u(x, z, t)$ и $v = v(x, z, t)$ — горизонтальная и вертикальная компоненты поля скоростей волнового движения в жидкости, которые для простоты считаются независимыми от координаты y, а $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_z$ — орты осей Ox и Oz. Тогда отклонение свободной поверхности жидкости $\xi = \xi(x, t)$ от равновесной в поле сил тяжести формы $z = 0$, связанное с виртуальной начальной волновой деформацией, поле скоростей $\mathbf{U} = u \cdot \mathbf{e}_x + v \cdot \mathbf{e}_z$ и потенциал электрического поля Φ над жидкостью удовлетворяют соотношениям:

$$z > \xi: \qquad \Delta\Phi = 0; \tag{1}$$

$$z < \xi: \quad \partial_t \mathbf{U} + \mathrm{rot}(\mathbf{U}) \times \mathbf{U} = -\,\mathrm{grad}\left(\frac{1}{\rho}p + \frac{U^2}{2} + gz\right) + \nu\Delta\mathbf{U}; \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{U} = 0; \tag{3}$$

$$z = \xi: \qquad \partial_t\xi + u\partial_x\xi = v; \tag{4}$$

$$p - 2\rho\nu\mathbf{n}\big((\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{U}\big) + \frac{1}{8\pi}(\nabla\Phi)^2 = \gamma\,\mathrm{div}(\mathbf{n}); \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\tau}\big((\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{U}\big) + \mathbf{n}\big((\boldsymbol{\tau}\nabla)\mathbf{U}\big) = 0; \tag{6}$$

$$\Phi = 0; \tag{7}$$

$$z \to +\infty: \qquad -\nabla\Phi \to E_0\mathbf{e}_z; \tag{8}$$

$$z \to -\infty: \qquad \mathbf{U} \to 0. \tag{9}$$

Здесь t — время, p — давление внутри жидкости, ∂_t и ∂_x — частные производные по времени и координате, $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$ — орты касательной и нормали к поверхности. Подобный вывод выражений для них и выражение для дивергенции нормали $\operatorname{div}(\mathbf{n})$ можно найти в [13].

Для замыкания математической формулировки задачи выписанные соотношения должны быть дополнены начальными условиями, задающими начальное отклонение поверхности и начальное распределение поля скоростей. Как это принято в теории периодических волн конечной амплитуды (см., например, [1–7]), вид начальных условий будем определять в процессе решения таким образом, чтобы прийти к наиболее простым в смысле аналитического описания формам колебаний свободной поверхности и выявить наиболее существенные свойства волны, связанные с ее нелинейностью.

Примем, что в начальный момент времени максимальное возвышение волнового виртуального возмущения над равновесной поверхностью $z = 0$ с длиной λ, имеет значение A. В большей части ранее выполненных расчетов волн конечной амплитуды на свободной поверхности идеальной жидкости (см., например, [1–13]) начальные условия накладывались на амплитуду линейной по малому параметру компоненты полной нелинейной волны. При этом максимальное отклонение A результирующей нелинейной волны от плоской поверхности $z = 0$ в начальный момент времени оказывалось неопределенным и вычислялось уже после отыскания решения всей задачи. В то же время физическая величина, которую можно измерить на практике, есть именно A и эту величину более естественно использовать в начальных условиях. Кроме того, если A задавать изначально, то удается избежать ситуации, имеющей место в работах [5,6,10–13], когда амплитудный коэффициент при нелинейной добавке в конечном решении, имеющий резонансный вид при выполнении определенных условий, приводит к неограниченному росту амплитуды нелинейной волны, что плохо согласовывается с начальным условием и нарушает асимптотичность найденного решения.

Принцип решения задачи

Пусть начальное возмущение $\xi(x, t)$ периодично по x и образует волнообразный рельеф с длиной волны λ и амплитудой A. В качестве малого параметра примем $\varepsilon = kA$, где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число.

В квадратичном по ε приближении решение задачи $(1)-(9)$ ищется в виде разложений

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 + O(\varepsilon^3); \quad \mathbf{U}_1 \sim O(\varepsilon); \quad \mathbf{U}_2 \sim O(\varepsilon^2);$$

$$p = p_0 + p_1 + p_2 + O(\varepsilon^3); \quad p_0 \sim O(1);$$

$$p_1 \sim O(\varepsilon); \quad p_2 \sim O(\varepsilon^2);$$

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + O(\varepsilon^3); \quad \Phi_0 \sim O(1);$$

$$\Phi_1 \sim O(\varepsilon); \quad \Phi_2 \sim O(\varepsilon^2);$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + O(\varepsilon^3); \quad \xi_1 \sim O(\varepsilon); \quad \xi_2 = O(\varepsilon^2).$$

Подстановка этих соотношений в $(1)-(3)$ и отнесение граничных условий на невозмущенную поверхность $z = 0$ приводят к разбиению исходной задачи $(1)-(9)$ на задачи нулевого, первого и второго порядков малости. Подробное описание процедуры разбиения на порядки малости имеется в [13].

В нулевом по ε приближении задача сводится к определению распределения гидростатического давления в жидкости

$$u_0 = 0; \quad v_0 = 0; \quad p_0 = -\frac{E_0^2}{8\pi} - \rho g z; \quad \Phi_0 = -E_0 z.$$

Как в [13], в нижеследующем изложении будут использоваться специальные обозначения для линейных дифференциальных операторов

$$\mathscr{L} \equiv$$

$$\begin{bmatrix} \partial_t - \nu(\partial_{xx} + \partial_{zz}) & 0 & (1/\rho)\partial_x & 0 \\ 0 & \partial_t - \nu(\partial_{xx} + \partial_{zz}) & (1/\rho)\partial_z & 0 \\ \partial_x & \partial_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_{xx} + \partial_{zz} \end{bmatrix};$$

$$\mathscr{R} \equiv \begin{bmatrix} \partial_t \\ -\rho g + \gamma \partial_{xx} \\ 0 \\ -E_0 \end{bmatrix};$$

$$\mathscr{B} \equiv \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\rho\nu\partial_z & 1 & -E_0/(4\pi)\partial_z \\ \partial_z & \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{z=0}$$

и матриц-столбцов с обозначениями для составляющих элементов

$$\hat{O} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \hat{Y}_j \equiv \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \\ p_j \\ \Phi_j \end{bmatrix}; \qquad \begin{matrix} Y_j[1] \equiv u_j; \\ Y_j[2] \equiv v_j; \\ Y_j[3] \equiv p_j; \\ Y_j[4] \equiv p_j. \end{matrix}$$

Оператор $\mathscr{B}$ действует на объекты типа Y_j по следующему правилу: выполняются матричные операции, затем все операции дифференцирования и арифметические действия, после чего полагается $z = 0$. Результат действия оператора $\mathscr{B}$ на столбец четырех функций, зависящих от переменных x, z и t есть столбец четырех функций, не зависящих от z.

Задача первого порядка малости

Для величин первого по ε порядка малости полная математическая формулировка задачи в принятых обозначениях имеет вид

$$\mathscr{L}\hat{Y}_1 = \hat{O}; \tag{10}$$

$$\mathscr{B}\hat{Y}_1 + \mathscr{R}\xi_1 = \hat{O}; \tag{11}$$

$$z \to +\infty: \quad \Phi_1 \equiv Y_1[4] \to 0; \tag{12}$$

$$z \to -\infty: \quad u_1 \equiv Y_1[1] \to 0; \quad v_1 \equiv Y_1[2] \to 0; \tag{13}$$

$$t = 0: \quad \xi_1 = \eta \cos(kx);$$

$$z \le 0: \quad Y_1[1]_{t=0} = u_1^0; \quad Y_1[2]_{t=0} = v_1^0. \tag{14}$$

Для простоты в качестве начальной деформации в первом приближении выбрана косинусоида. Выбор функций $u_1^0 \equiv u_1^0(x,z)$ и $v_1^0 \equiv v_1^0(x,z)$ выполняется в процессе решения. Они подбираются так, чтобы получить как можно более простое в смысле аналитического описания решение. В итоге решение задачи первого порядка малости принимает известный вид [14]

$$\xi_1 = \eta \cos(\theta) \exp(T); \tag{15}$$

$$u_1 = \eta\Big(\big(S_2 \exp(kz) - 2\nu k\big(q_2 \cos(q_2 z) + q_1 \sin(q_2 z)\big) \times \exp(q_1 z)\big) \cos(\theta) + \big(D \exp(kz) - 2\nu k\big(q_1 \cos(q_2 z) - q_2 \sin(q_2 z)\big) \exp(q_1 z)\big) \sin(\theta)\Big) \exp(T); \tag{16}$$

$$v_1 = \eta\Big(\big(D \exp(kz) - 2\nu k^2 \cos(q_2 z) \exp(q_1 z)\big) \cos(\theta) - \big(S_2 \exp(kz) - 2\nu k^2 \sin(q_2 z) \exp(q_1 z)\big) \sin(\theta)\Big) \exp(T); \tag{17}$$

$$p_1 = \eta \rho k^{-1}\big((-S_1 D + S_2^2) \cos(\theta) + 2S_2(S_1 + \nu k^2) \sin(\theta)\big) \exp(kz) \exp(T); \tag{18}$$

$$\Phi_1 = \eta E_0 \cos(\theta) \exp(T); \tag{19}$$

$$\nu^2(k^2+q^2)^2 + k\left(g + \frac{k^2\gamma}{\rho} - \frac{k}{\rho}\frac{E_0^2}{4\pi}\right) = 4\nu^2 k^3 q; \tag{20}$$

$$q_1 = \operatorname{Re} q \ge 0; \quad q_2 = \operatorname{Im}(q) \ge 0; \tag{21}$$

$$S = \nu(q^2 - k^2); \quad S_1 = \operatorname{Re} S; \quad S_2 = \operatorname{Im} S. \tag{22}$$

$$\theta = S_2 t - kx; \quad T = S_1 t; \quad D = S_1 + 2\nu k^2. \tag{23}$$

В этих соотношениях q вычисляется как корень дисперсионного уравнения (20), удовлетворяющий (21). Эти соотношения являются условиями отбора значения корня, соответствующего волновому движению со скоростью, стремящейся к нулю при $z \to -\infty$ (см. условие (13)). Выбранному корню отвечает прогрессивная волна, распространяющаяся вправо. Условия (21) обеспечивают единственность процедуры вычисления комплексной частоты S. Коэффициент η определяет линейную по ε часть амплитуды волны.

Соотношения (15)–(23) представляют решение задачи первого порядка малости, если в качестве функций $u_1^0 \equiv u_1^0(x,z)$ и $v_1^0 \equiv v_1^0(x,z)$, входящих в (14), взять u_1 и v_1 из (16), (17) при $t = 0$.

Ввиду линейности задачи первого порядка малости любая суперпозиция решений вида (15)–(19) с различными k будет решением исходной задачи. В линейном приближении волны, соответствующие этим решениям, распространяются без взамодействия друг с другом. Любое решение линейной задачи получается из решений (15)–(19) простой суперпозицией. Эту суперпозицию можно подобрать так, чтобы удовлетворить любым физически разумным начальным условиям.

Задача второго порядка малости

Используя ту же идею в отношении начальных условий, что и для задачи первого порядка малости, не будем конкретизировать начальные условия при формулировке задачи второго порядка малости

$$\mathscr{L}\hat{Y}_2 = \eta^2 \operatorname{Re}\left(\left(\begin{bmatrix}\hat{A}_1\\0\end{bmatrix}\exp(2q_1 z) + \begin{bmatrix}\hat{A}_2\\0\end{bmatrix}\exp(2kz) + \begin{bmatrix}\hat{A}_3\\0\end{bmatrix}\exp\big((k+q)z\big)\right)\exp(2T) + \begin{bmatrix}\hat{A}_4\\0\end{bmatrix}\exp\big((k+q)z\big)\exp\big(2(T+i\theta)\big)\right); \tag{24}$$

$$\mathscr{B}\hat{Y}_2 + \mathscr{R}\xi_2 = \eta^2 \operatorname{Re}\left(\begin{bmatrix}\hat{A}_5\\ \frac{1}{2}kE_0\end{bmatrix}\exp(2T) + \begin{bmatrix}\hat{A}_6\\ \frac{1}{2}kE_0\end{bmatrix}\exp\big(2(T+i\theta)\big)\right); \tag{25}$$

$$z \to +\infty: \quad \Phi_2 \equiv Y_2[4] \to 0; \tag{26}$$

$$z \to -\infty: \quad u_2 \equiv Y_2[1] \to 0; \quad v_2 \equiv Y_2[2] \to 0, \tag{27}$$

где $\hat{A}_1$–$\hat{A}_6$ — трехэлементные столбцы с комплексными коэффициентами, не зависящими от координат и времени,

$$\hat{A}_1 = -4\nu^2 k^3 q_1 \begin{bmatrix}q_2\\k\\0\end{bmatrix}; \quad \hat{A}_2 = \begin{bmatrix}0\\-k(S_2^2+D^2)\\0\end{bmatrix};$$

$$\hat{A}_3 = \nu k \begin{bmatrix}2(\bar{S}_1 - i\cdot S_2 + 2\nu k^2)q_1 q_2 + (S_2 + iD)(q_2^2 - q_1^2 + k^2)\\ -2ik(k+q)(S_2+iD)\\ 0\end{bmatrix};$$

$$\hat{A}_4 = \begin{bmatrix}-i\nu k(q-k)^2(S+2\nu k^2)\\0\\0\end{bmatrix};$$

$$\hat{A}_5 = \begin{bmatrix}0\\N_0\\M_0\end{bmatrix}; \quad \hat{A}_6 = \begin{bmatrix}\Omega\\N\\M\end{bmatrix}; \quad \begin{matrix}\Omega = \Omega_1 + i\Omega_2;\\ N = N_1 + iN_2;\\ M = M_1 + iM_2;\end{matrix}$$

$$i^2 = -1; \quad \Omega_1 = k(D - 2\nu k q_1); \quad \Omega_2 = k(S_2 - 2\nu k q_2);$$

$$N_0 = \frac{1}{2}\rho\big(S_1^2 - S_2^2 + 4\nu k^2 S_1 + 4\nu^2 k^2(k^2 - q_1^2 + q_2^2)\big);$$

$$N_1 = N_0 + \frac{1}{2}k^2\frac{E_0^2}{4\pi};$$

$$N_2 = \rho(S_2 D - 4\nu^2 k^2 q_1 q_2);$$

$$M_0 = k\big(kS_2 - q_2(3k^2 + q_2^2 - 3q_1^2)\big);$$

$$M_1 = -k\big(3kS_2 - q_2(5k^2 - q_2^2 + 3q_1^2)\nu\big);$$

$$M_2 = k\big(2kS_1 + \nu(6k^3 - 5k^2q_1 + 3q_2^2q_1 - q_1^3)\big).$$

Соотношения (24)–(27) представляют уравнения относительно комплексных величин, составляющих столбец $\hat{Y}_2$. Физический смысл имеет действительная часть этих величин.

Следуя тем же путем, что и в [13], можно найти во втором порядке малости выражение для нелинейной добавки к профилю волны

$$\xi_2 = \eta^2\big(\zeta_1\cos(2\theta) - \zeta_2\sin(2\theta)\big)\exp(2T) + \text{L.W.S.}, \quad (28)$$

где L.W.S. (Linear Wave Solutions) — линейные волновые решения (такие же как в линейной теории).

Они разрешают однородную задачу, отвечающую рассматриваемой неоднородной (24)–(27). Эта однородная задача с точностью до обозначенной совпадает с задачей первого порядка малости и в качестве L.W.S. может выступать любая суперпозиция бегущих волн $\eta\cos(\Sigma_2 t \pm \varkappa x + \varphi)\exp(\Sigma_1 t)$ с такими амплитудой η и волновым числом $\varkappa$, что $\varkappa\cdot\eta = O(\varepsilon^2)$ (O — символ малости). Комплексная частота $\Sigma = \Sigma_1 + i\Sigma_2$ и волновое число $\varkappa$ этих волн связаны тем же дисперсионным уравнением (20), что и величины S и k, через которые выражаются переменные $\theta = S_2t - kx$ и $T = S_1T$. Волны, соответствующие L.W.S., распространяются не взаимодействуя друг с другом и с решением задачи первого порядка малости. Это главное отличие L.W.S. от первой части выражения (28) для ξ_2, которая содержит амплитудные коэффициенты ζ_1 и ζ_2, зависящие от k, ρ, γ, g, ν и W, т.е. от физических величин, через которые выражаются частота и волновое число задачи первого порядка малости. С изменением этих параметров, т.е. с изменением свойств решения первого порядка малости, амплитудные коэффициенты ζ_1 и ζ_2 будут меняться. Иными словами, будет иметь место взаимодействия этой нелинейной части решения задачи второго порядка малости с решением линейной по ε задачи. Если в задаче первого порядка малости решение выбиралось из соображений простоты аналитического описания, то в нелинейной задаче выбирается та часть решения, которая связана со взаимодействием волновых движений, а фон L.W.S. в дальнейшем анализе не рассматривается.

Профиль нелинейной волны

Складывая решение задач первого и второго порядков малости и проводя нормировку амплитуды η так, чтобы максимум начального отклонения поверхности равнялся значению A, получим выражение для профиля нелинейной периодической капиллярно-гравитационной волны в квадратичном приближении по ε

$$\xi(x,t) = \xi(\theta,t) = \eta\cos(\theta) + \eta^2\cdot\big[\zeta_1\cos(2\theta) - \zeta_2\sin(2\theta)\big]\exp(2T), \quad (29)$$

где значение η подобрано так, что

$$A = \max\xi(\theta,0) \quad \text{при} \quad \theta\in[0,2\pi]. \quad (30)$$

Это соотношение играет роль условия нормировки амплитуды.

Полные аналитические выражения для ζ_1 и ζ_2 здесь не приводятся ввиду их крайней громоздкости. Ниже будут получены асимптотические выражения для ζ_1 и ζ_2 в приближении малой вязкости. Отметим лишь, что ζ_1 и ζ_2 зависят от волнового числа k, от значений ρ, ν, γ, g и от поверхностной плотности заряда, определяющей величину безразмерного параметра Тонкса–Френкеля,

$$W \equiv \frac{E_0^2}{4\pi\sqrt{\rho g\gamma}},$$

который характеризует устойчивость заряженной поверхности жидкости по отношению к собственному заряду [15]. Из линейной теории хорошо известно, что условие

$$W > \alpha k + \frac{1}{\alpha k}, \quad (31)$$

где $\alpha = \big(\gamma/(\rho g)\big)^{1/2}$ — капиллярная постоянная, обеспечивает при заданном αk положительность параметра $S_1 \equiv \operatorname{Re} S$, входящего в решения задач первого и второго порядков малости. В этом случае имеет место неустойчивость заряженной свободной поверхности жидкости [15], причем S_1 имеет смысл инкремента нарастания амплитуды волны в первом по ε приближении (линейное по η слагаемое в (29)), а $2S_1$ — инкремента, нелинейного по амплитуде η слагаемого. Если значение W недостаточно велико для выполнения условия (30), то $S_1 < 0$. Тогда S_1 характеризует декремент экспоненциального затухания линейного по амплитуде η слагаемого в (29), а $2S_1$ — декремент затухания нелинейного слагаемого. В дальнейшем изложении значения W, удовлетворяющие условию (31), будут называться закритическими, а остальные докритическими.

Константа η подбирается так, чтобы в начальный момент времени выполнялось условие нормировки (30), которое означает, что на отрезке $[0,2\pi]$ существует значение θ, такое что $\xi(\theta,0) = A$, и что при таком θ функция $f(\theta) = \xi(\theta,0)$ достигает своего максимума. Поскольку структура выражения (29) для θ такова, что $f(\theta)$ имеет конечное число экстремумов, среди которых находится максимум, то для осуществления нормировки можно рассмотреть систему уравнений

$$\begin{cases} \eta\cos(\theta) + \eta^2\big(\zeta_1\cos(2\theta) - \zeta_2\sin(2\theta)\big) = A; \\ -\sin(\theta) + 2\eta\big(-\zeta_1\sin(2\theta) + \zeta_2\cos(2\theta)\big) = 0 \end{cases}$$

относительно θ и η. Первое уравнение этой системы — условие обращения $\xi(\theta,0)$ в A при некотором θ, а второе уравнение — необходимое условие экстремума функции $f(\theta)$. Среди конечного числа пар (η,θ) решений выписанной системы обязательно имеется та, для которой $\xi(\theta, 0)$ максимально. Значение η из этой пары и следует взять.

Важно отметить, что употребление в качестве начального условия высоты волны A, включающей составляющие и первого и второго порядков по ε, отличает постановку задачи в настоящей работе от предыдущих работ разных авторов [1–13], в которых за исходное данное принимался параметр, обозначенный здесь через η.

Представление комплексной частоты в виде ряда по степеням безразмерной вязкости

Введем в рассмотрение величины

$$\omega_0 = \sqrt{kg(1+\alpha^2k^2 - \alpha kW)};$$

$$r_0 = \sqrt{kg(\alpha kW - 1 - \alpha^2k^2)}. \qquad (32)$$

Значения ω_0 вещественны при докритических значениях W, а r_0 — при закритических W. В физическом смысле ω_0 представляет частоту волнового движения на поверхности идеальной жидкости; r_0 — инкремент нарастания неустойчивости по отношению к избытку поверхностного заряда для идеальной жидкости при закритических W.

Разделим обе части дисперсионного уравнения (20) на ω_0^2 в случае докритических W и на r_0^2 при закритических значениях W

$$(\beta+2\chi)^2 + \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = 4\chi^{3/2}\sqrt{\beta+\chi};$$

$$\mathrm{Re}\left(\sqrt{\beta+\chi}\right) = 0; \qquad (33)$$

$$\beta = \begin{Bmatrix} S/\omega_0 \\ S/r_0 \end{Bmatrix}; \quad \chi = \begin{Bmatrix} \upsilon k^2/\omega_0 \\ \upsilon k^2/r_0 \end{Bmatrix}. \qquad (34)$$

Здесь и далее используется обозначение

$$\begin{Bmatrix} Q \\ R \end{Bmatrix} = \begin{cases} Q, & \text{если} \quad W < \alpha k + (\alpha k)^{-1}; \\ R, & \text{если} \quad W > \alpha k + (\alpha k)^{-1}. \end{cases} \qquad (35)$$

Видно, что в (33) кроме численных коэффициентов имеются только две безразмерные переменные: безразмерная частота β и безразмерная вязкость χ.

Для определенности рассмотрим дисперсионное уравнение (33) в докритическом по W случае

$$(\beta+2\chi)^2 + 1 = 4\chi^{3/2}\sqrt{\beta+\chi}; \quad \mathrm{Re}\left(\sqrt{\beta+\chi}\right) = 0. \qquad (36)$$

Пусть $\chi \ll 1$. Найдем разложение по степеням χ для корня дисперсионного уравнения (36), который стремится к $\beta = i$ при $\chi \to 0$. Для этого примем, что

$$\beta = i + \sigma; \qquad \lim_{\chi\to 0}\sigma = 0.$$

Квадратный корень из правой части (36) имеет две аналитические ветви

$$\sqrt{\beta+\chi} = \sqrt{i}\,\sqrt{1 - i(\chi+\sigma)} = \pm\frac{i+1}{\sqrt{2}}\,\sqrt{1-i(\chi+\sigma)}, \qquad (37)$$

которые представляются рядами по целым степеням малого параметра $(\chi+\sigma)$ (при вычислении квадратного корня $\sqrt{1-i(\chi+\sigma)}$ для определенности выбирается та его ветвь, на которой он равен единице при $\chi+\sigma = 0$). Выбирая ветвь функции $\sqrt{\beta+\chi}$, действительная часть которой положительна при малых в сравнении с единицей (в том числе и при нулевых) значениях параметра $(\chi+\sigma)$, получаем дисперсионное уравнение в виде

$$(i+\sigma+2\chi)^2 + 1 = 2\sqrt{2}\,(i+1)\,\chi^{3/2}\sqrt{1+i(\chi+\sigma)}.$$

Представим σ в виде двух слагаемых: $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, где $\sigma_2 \sim o(\chi)$, а другое σ_1 остается неопределенным. При подстановке $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ в (36) его левая часть примет асимптотический вид $2i(\sigma_1 + 2\chi) + o(\chi)$, а правая будет иметь порядок $\chi^{3/2}$. В итоге в линейном по χ приближении получим $\sigma_1 = -2\chi$

$$\beta = i - 2\chi + \sigma_2; \qquad \sigma_2 = o(\chi). \qquad (38)$$

В результате подставновки (37), (38) в (36) получается соотношение

$$\sigma_2(\sigma_2 + 2i) = 2\sqrt{2}\,(i+1)\,\chi^{3/2}\sqrt{1+i(\chi-\sigma_2)}. \qquad (39)$$

Для правой части с учетом (38) получается

$$2\sqrt{2}\,(i+1)\,\chi^{3/2}\sqrt{1+i(\chi-\sigma_2)}$$
$$= 2\sqrt{2}\,(i+1)\,\chi^{3/2} + \sqrt{2}\,i(i+1)\,\chi^{5/2} + o(\chi^{5/2}).$$

Однозначано выделились два первых главных члена, которые оказались пропорциональны $\chi^{3/2}$ и $\chi^{5/2}$. Значит, слагаемые таких же порядков должны быть главными в асимптотическом представлении левой части (39). В итоге в асимптотическом представлении σ_2 выделяются два первых лидирующих порядка

$$\sigma_2 = \beta_3\chi^{3/2} + \beta_5\chi^{5/2} + o(\chi^{5/2}).$$

После повторной подстановки σ_2 с выделенными первыми лидирующими слагаемыми в (39), найдем, что наименьший возможный порядок по χ для третьего слагаемого в разложении квадратного корня из (39) есть $O(\chi^3)$. Значит, этот же порядок должен присутствовать в асимптотическом представлении левой части (39)

$$\sigma_2 = \beta_3\chi^{3/2} + \beta_5\chi^{5/2} + \beta_6\chi^3 + o(\chi^3).$$

Процедура последовательного выделения лидирующих слагаемых в представлении для σ_2 может быть продолжена по индукции.

В проведенных рассуждениях ничего не говорилось о значениях β_3 и β_5. Через них выражаются коэффициенты при более высоких порядках, которые могут оказаться нулевыми (для β_6 так и получается). Однако общая закономерность процедуры выделения лидирующих порядков в представлении для σ_2 состоит в том, что выделение слагаемых каждого следующего порядка связано с возведением в степень или перемножением порядков, выделенных на предыдущем шаге. Процесс выделения начинается с порядков $\chi^{3/2}$ и $\chi^{5/2}$. Поэтому порядок всех следующих членов разложения должен выражаться целой степенью величин $\chi^{1/2}$. Это значит, что без ограничения общности для σ_2 можно использовать представление

$$\sigma^2 = \sum_{n=3}^{\infty} \beta_n \chi^{n/2}, \tag{40}$$

в котором некоторые β_n могут быть нулевыми.

Корень (36), обращающийся в мнимую единицу при $\chi = 0$, нужно искать в виде ряда

$$\beta = i + \sum_{n=2}^{N} \beta_n \chi^{n/2}. \tag{41}$$

Подстановка (41) в (36), разложение обеих частей (36) по целым степеням $\chi^{1/2}$ и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях этого параметра приводит к системе уравнений для определения β_n.

Для отыскания коэффициентов β_n в разложениях (40), (41) используем теорему о дифференцировании функции $\beta = \beta(\delta)$, $\delta = \chi^{1/2}$, заданной неявным образом с помощью (36). При этом появляется возможность найти производные $d^n\beta/d\delta^n$ любого порядка n, а через них выразить коэффициенты тейлоровского разложения (41).

Аналогичные рассуждения легко провести для дисперсионного уравнения в закритическом по W случаю. В итоге для комплексной частоты S получится выражение

$$S = \begin{Bmatrix} \omega_0 \\ r_0 \end{Bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} i \\ 1 \end{Bmatrix} + \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n \chi^{n/2} \right); \tag{42}$$

$$\beta_n = -\left(\frac{1}{n!} \cdot \frac{d^{n-1}}{d\delta^{n-1}} \left(\frac{\partial_\beta F(\beta, \delta)}{\partial_\delta F(\beta, \delta)} \right) \right)_{\substack{\{\beta = i \atop \beta = 1\} \\ \delta = 0}}$$

$$F(\beta, \delta) = (\beta + 2\delta^2)^2 - 4\delta^3 \left(\sqrt{\beta + \delta^2} \right). \tag{43}$$

Фигурные скобки используются здесь в смысле (35). При вычислении β_n по формуле (43) нужно принять во внимание два факта. Во-первых, при последовательном вычислении полных производных по δ каждый раз, когда в результате дифференцирования составной функции появляется $\beta' = \beta'(\delta)$, эту производную нужно заменять выражением

$$\beta' = -\frac{\partial_\beta F(\beta, \delta)}{\partial_\delta F(\beta, \delta)} = \frac{2\delta(-3\beta\delta - 4\delta^3 + (\beta + \delta)^{3/2})}{\delta^3 - (\beta + \delta)^{3/2}}.$$

Во-вторых, выражение, получающееся после вычисления финальной производной, является дробно-рациональной функцией β, δ и $\sqrt{\beta + \delta^2}$. Чтобы вычислить значение этого выражения при $\beta = i$, $\delta = 0$, в качестве $\sqrt{i}$ нужно взять число $(i + 1)/\sqrt{2}$. Это обеспечивает соответствие вычисленного коэффициента β_n корню уравнения (36), для которого выполняется условие $\mathrm{Re}\left(\sqrt{\beta + \chi}\right) > 0$.

При построении ряда (41) использовалось представление в виде ряда для квадратного корня из правой части (37). Этот ряд сходится внутри области $|\chi + \sigma| < 1$.

Вместо общего анализа условий сходимости ряда (41) была исследована возможность представления корня уравнения (33) конечной частью ряда (42). Ниже приведены приближенные выражения для частоты S_2 и параметра $r = S_2$, характеризующего декремент затухания при $r < 0$ и инкремент неустойчивости при $r > 0$, полученного из (42) отбрасыванием слагаемых порядка $O(\chi^5)$ и выше,

$$S_2 = \begin{Bmatrix} \omega_0 \left(1 - \sqrt{2}\chi^{3/2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\chi^{5/2} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\chi^{7/2} + 2\chi^4 \frac{9}{8\sqrt{2}}\chi^{9/2} \right) \\ 0 \end{Bmatrix}; \tag{44}$$

$$S_1 = \begin{Bmatrix} \omega_0 \left(-2\chi + \sqrt{2}\chi^{3/2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\chi^{5/2} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\chi^{7/2} - \frac{9}{8\sqrt{2}}\chi^{9/2} \right). \\ r_0 \left(1 - 2\chi + 2\chi^{3/2} - \chi^{5/2} - \frac{1}{4}\chi^{7/2} + 2\chi^4 - \frac{9}{8}\chi^{9.2} \right) \end{Bmatrix} \tag{45}$$

Численные расчеты показывают, что при $\chi = 0.1$ относительная погрешность формулы (44) составляет 10^{-6}, если учитывать все 6 слагаемых, и 0.002, если ограничиться слагаемыми не выше $\chi^{3/2}$. Для формулы (45) относительная погрешность 10^{-5}, если учитывать все выписанные слагаемые, 0.015 для декремента и 0.004 для инкремента, если отбросить члены более высокого по сравнению с $\chi^{3/2}$ порядка. Поэтому при $\chi \leq 0.1$ точность, достаточная для практических расчетов, достигается, если ограничиться в (44), (45) порядком $\chi^{3/2}$.

Все выписанные в формулах (44), (45) слагаемые имеет смысл сохнаяться при значения χ, близких к $\chi = 0.5$. При таком значении χ относительная погрешность формулы (7.13) составляет 0.03, формулы (7.14) — 0.1 для декремента и 0.02 для инкремента. Эти погрешности заметно растут при дальнейшем увеличении χ.

Приближение формулы для профиля нелинейной волны в пределе маловязкой жидкости

Для амплитудных параметров ξ_1 и ξ_2 из (29) в пределе малой вязкости несложно получить из точного решения асимптотические формулы

$$\xi_1 = \frac{1}{4} k \frac{(1 + \alpha^2 k^2 - 2\alpha k W)}{0.5 - \alpha^2 k^2} + \begin{Bmatrix} o(\nu) \\ \frac{r_0}{g} \frac{2k^2}{0.5 - \alpha^2 k^2} \nu \end{Bmatrix}; \tag{46}$$

$$\xi_2 = \begin{Bmatrix} \frac{k^2 \omega_0}{g} \frac{(2 - \alpha^2 k^2 - 2\alpha k W)}{(0.5 - \alpha^2 k^2)^2} \nu + o(\nu) \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{47}$$

Фигурные скобки здесь имеют такой же смысл, как в предыдущем разделе. При $W = 0$, $\nu = 0$ получается решение, которое совпадает с полученными в работах [5,6], если в качестве начального условия использовать условие на величину η. Из (46) и (47) видно, что при $\alpha k \to 1\sqrt{2}$ амплитудные множители ξ_1 и ξ_2 стремятся к бесконечности. В связи с этим значение $k = k_* = 1\sqrt{2}$ в [5,6] определялось как резонансное.

Как уже отмечалось, постановка задачи в настоящей работе подразумевает нормировку амплитуды η. Другими словами, величина η подбирается таким образом, чтобы решение (29) в начальный момент времени удовлетворяло начальному условию (30). В пределе идеальной жидкости при $\nu = 0$ форма нелинейной волны в начальный момент времени имеет вид $\xi = \eta/\cos(kx) + \eta^2\xi_2\cos(2kx)$. Складывая эти решения в начале координат и удовлетворяя условию нормировки (30), несложно получить квадратное уравнение относительно η, положительными решениями которого будут

$$\eta = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+4A\xi}-1}{2\xi}, & \text{если } \xi \geq 0; \\ -\frac{\sqrt{1+4A\xi}+1}{2\xi}, & \text{если } \xi < 0. \end{cases} \qquad \xi = \frac{1}{4}\,k\,\frac{(1+\alpha^2k^2-2\alpha kW)}{0.5-\alpha^2k^2}. \tag{48}$$

Такой подход гарантирует, что профиль волны на поверхности идеальной жидкости

$$\xi = \eta\cos(\theta) + \eta^2\xi\cos(2\theta)$$

не будет расти по амплитуде при $k \to k_*$. При приближении значения волнового числа к резонансному значению амплитуда линейного по малому параметру слагаемого в (29) будет стремиться к нулю, а нелинейного — к A. Несмотря на конечность высоты профиля волны в положении резонанса, разложение (29) при $k = k_*$ теряет асимптотичность: главный член асимптотического представления (29) становится бесконечно малой по сравнению с квадратичной по малому параметру добавкой.

Поскольку ξ может принимать как положительные, так и отрицательные значения, для возможности вычислений по формулам (48) необходимо, чтобы $4A|\xi| \leq 1$.

Влияние вязкости на форму свободной поверхности

Влияние вязкости на эволюцию профиля волны двояко. С одной стороны, через вязкость выражается S_1, которое в зависимости от того, докритично значение W или закритично, описывает декремент затухания или инкремент нарастания амплитуды волны (в первом по ε приближении для линейного по η слагаемого в (28), а во втором приближении нелинейного слагаемого). Несложно также видеть, что отношения S_2/ω_0 и S_1/r_0 являются функциями только от безразмерной вязкости χ.

С другой стороны от вязкости зависят амплитудные коэффициенты ξ_1 и ξ_2, через которые выражается решение задачи второго порядка малости.

Из асимптотических выражений (46) и (47) видно, что при докритических значениях W наиболее сильно зависит от вязкости ξ_2, которое $\sim O(\nu)$. Увловия знакопостоянства этого параметра имеют вид

$$\xi_2 > 0, \quad \text{если} \quad \begin{cases} W < (\alpha k)^{-1} - 0.5\alpha k, \\ \alpha^2k^2 > 0.5 \end{cases}$$

$$\text{или} \quad \begin{cases} W > (\alpha k)^{-1} - 0.5\alpha k, \\ \alpha^2k^2 < 0.5, \end{cases}$$

$$\xi_2 < 0, \quad \text{если} \quad \begin{cases} W > (\alpha k)^{-1} - 0.5\alpha k, \\ \alpha^2k^2 > 0.5 \end{cases}$$

$$\text{или} \quad \begin{cases} W < (\alpha k)^{-1} - 0.5\alpha k, \\ \alpha^2k^2 < 0.5. \end{cases}$$

Перепишем решение для ξ в форме

$$\xi = \left[\eta\cos(\theta)\exp(S_1t) + \eta^2\xi_1\cos(2\theta)\exp(2S_1t)\right] - \eta^2\xi_2\sin(2\theta)\exp(2S_1t).$$

Здесь слагаемое, заключенное в квадратные скобки, представляет собой профиль, симметричный относительно вертикали, проходящей через вершину волны. Второе слагаемое — профиль, сдвинутый на $\pm\pi/2$ (в зависимости от знака ξ_2) относительно первого. Результирующий профиль будет асимметричен относительно вертикали, проходящей через вершину волны. Степень асимметричности связана с величиной ξ_2, зависящей от ν, и, таким образом, определяется вязкостью. Направление асимметрии (по движению волны или против) определяется знаком ξ_2.

Из (46), (47) видно, что при закритических W характер влияния вязкости на форму свободной поверхности совсем иной: благодаря вязкости появляется пропорциональная ей добавка в выражении для ξ_1, положительная для длинных волн с $\alpha k < 0.5$ и отрицательная для коротких $\alpha k > 0.5$. Значение ξ_2 при $W \geq 2$ равно нулю. Это означает, что при закритических W никакой асимметрии профиля волны нет, а вязкость отвечает за увеличение доли добавки второго порядка малости в выражении для ξ.

На рис. 1–3 в безразмерных переменных, в которых $\rho = g = \gamma = 1$, приведены результаты расчета временнóй эволюции профилей волн при $k = 1$ и $\nu = 0.03$. Видно, что волна, распространяющаяся вправо, в отсутствие электрического заряда имеет профиль, вершина которого „скошена“ в сторону, противоположную направлению распространения волны (рис. 1). Так ведут себя волны, для которых $\xi_2 > 0$. При других k может получиться, что $\xi_2 < 0$. Увеличение W до значения $W = 0.5$ выравнивает асимметрию (рис. 2). Дальнейшее

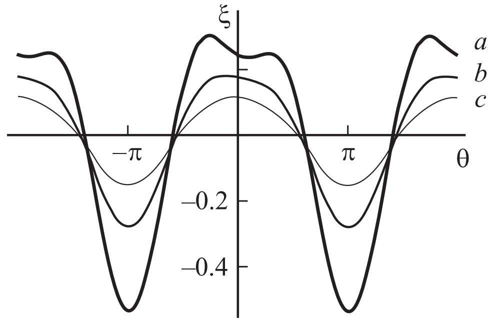

Рис. 1. Профили нелинейных волн, рассчитанные по (29) при $k = 1$, $\nu = 0.03$, $A = 0.3$, в различные моменты безразмерного времени (a — $t = 0$, b — $t = 10$, c — $t = 20$) при значении поверхностной плотности заряда $W = 0$.

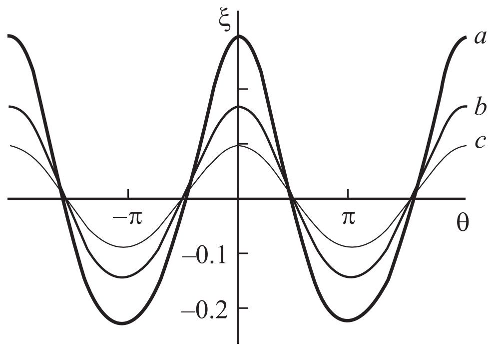

Рис. 2. То же, что и на рис. 2, при $W = 0.5$.

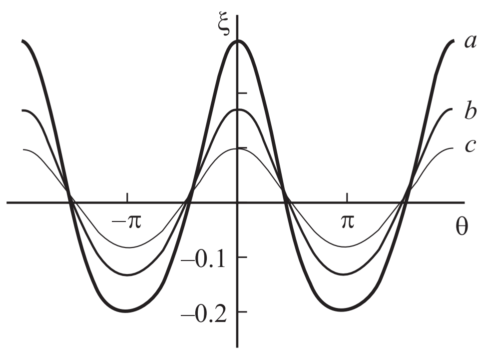

Рис. 3. То же, что и на рис. 3, при $W = 1.7$.

увеличение W связано со слабым, заметным лишь по форме впадин укручением переднего фронта волны (рис. 3). При приближении параметра W к критическому значению $W = 2$ выводы, сделанные на основе анализа выражений, полученных при малой вязкости, несправедливы, так как при $k = 1$ и $W = 2$ безразмерная вязкость $\chi = \nu k^2/\omega_0^2 \to \infty$. Однако расчеты, проведенные по точным формулам, показывают, что в окрестности $W = 2$ асимметрия профиля волны исчезает.

На рис. 4 показан начальный этап эволюции профиля свободной поверхности при закритическом значении $W = 4$, при $k = 1$ и $\nu = 0.1$. На рис. 5 построена форма выступа на свбодной поверхности для закритического значения W, когда $\nu = 0$, и $\nu = 0.1$ через некоторое время после начала его роста. Времена для разных вязкостей использованы разные и подобраны так, чтобы дать выступы достигли одной и той же высоты. При $\nu = 0$ эта высота достигается за $t = 0.20$, а для $\nu = 0.1$ за большее время $t = 0.25$. Из рисунка видно, что при одной и той же высоте выступ на поверхности вязкой жидкости имеет немного более широкую вершину и менее развитое пикообразное образование во впадине. Это связано с тем, что при безразмерном значении $k = 1$ получается, что $\alpha^2 k^2 > 0.5$, и множитель при ν в (46) отрицателен. Для тех значений k, для которых $\alpha^2 k^2 < 0.5$, этот множитель будет положителен, значит ξ_1, будет больше, чем в случае идеальной жидкости, что приведет к небольшому сужению эмиссионного выступа.

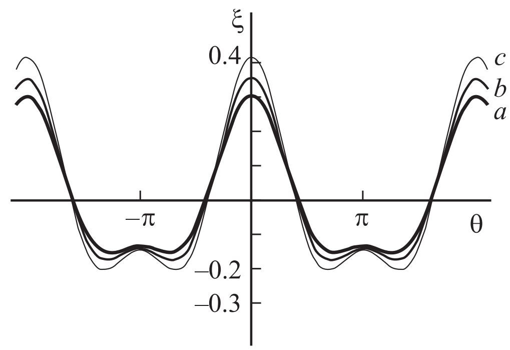

Рис. 4. Форма эмиссионного выступа, развивающегося из начальной деформации равновесной плоской поверхности вида (29) при $k = 1$, $\nu = 0.1$, $A = 0.3$, $W = 4$ в различные моменты безразмерного времени: a — $t = 0$, b — $t = 0.1$, c — $t = 0.2$. При больших временах амплитуды эмиссионных выступов быстро увеличиваются за счет преимущественного роста нелинейной добавки.

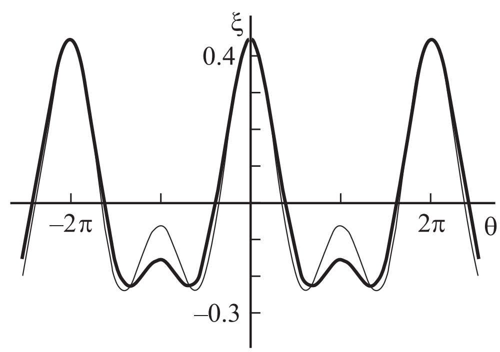

Рис. 5. Форма эмиссионного выступа, развивающегося из начальной деформации равновесной плоской поверхности вида (29) при $k = 1$, $A = 0.3$, $W = 4$. Жирная кривая — вязкая жидкость: $\nu = 0.1$, $t = 0.25$; тонкая — идеальная жидкость: $\nu = 0$, $t = 0.2$.

Заключение

Нелинейные периодические капиллярно-гравитационные волны на заряженной свободной поверхности вязкой электропроводной жидкости существенно отличаются от ранее исследованных нелинейных волн на заряженной поверхности идеальной жидкости. Это отличие обусловлено наличием поверхностного заряда и влиянием вязкости. При докритическом в смысле устойчивости свободной поверхности по отношению к избытку электрического заряда значении поверхностной плотности заряда наличие вязкости приводит к появлению асимметрии профиля волны по отношению к вертикальной прямой, проходящей через ее вершину, увеличивающейся с ростом вязкости. При закритическом значении поверхностной плотности заряда влияние вязкости приводит к изменению формы эмиссионных выступов на свободной заряженной поверхности жидкости на начальной стадии развития неустойчивости. Вершина выступа, развивающегося из виртуального возмущения коротковолнового диапазона, оказывается более уплощенной по сравнению с выступом на поверхности идеальной жидкости, а в случае выступа, развивающегося из длинноволнового диапазона, более заостренной. Интересно, что декремент затухания нелинейной поправки к профилю волны в два раза больше декремента затухания линейной по малому параметру ее компоненты.

Работа выполнена при поддержке Президента РФ (грант № МК-929.2003.01) и РФФИ (№ 03-01-00760).

Список литературы

[1] *Michel J.H.* // Phil. Mag. 1893. S. 5. Vol. 36. N 222. P. 430–438.
[2] *Ламб Г.* Гидродинамика. Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
[3] *Стокер Дж.* Волны на воде. М.: ИЛ., 1959. 617 с.
[4] *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
[5] *Nayfeh A.H.* // J. Fluid Mech. 1971. Vol. 48. P. 385–395.
[6] *McGoldric L.F.* // J. Fluid Mech. 1972. Vol. 52. Pt 4. P. 725–751.
[7] *Shugan I., Voliak K.* // J. Fluid Mech. 1998. Vol. 368. P. 321–338.
[8] *Harison W.J.* // Proc. London. Math. 1908. Ser. 2. Vol. 7. P. 107–121.
[9] *Wilton J.R.* // Phil. Mag. 1915. S. 6. Vol. 29. N 173. P. 688–700.
[10] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ПЖТФ. 2002. Т. 28. Вып. 19. С. 1–9.
[11] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // Известия РАН. МЖГ. 2003. № 2. С. 184–192.
[12] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ПЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 8. С. 1–7.
[13] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 4. С. 28–37.
[14] *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
[15] *Френкель Я.И.* // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.