

01;09

Моделирование характеристик рассеяния волн телами с поглощающим покрытием и „черными“ телами

© А.Г. Кюркчан, Д.Б. Демин

Московский технический университет связи и информатики,
111024 Москва, Россия
e-mail: kyurkchan@mtuci2.ru

(Поступило в Редакцию 30 июня 2003 г.)

Предложен новый эффективный метод решения трехмерных задач дифракции электромагнитных волн на импедансных телах, имеющих изломы границы. Метод обладает высокой скоростью сходимости. Рассмотрены примеры решения задач рассеяния волн телами вращения и приведены результаты, иллюстрирующие скорость сходимости вычислительного алгоритма для тел различной геометрии. Показано, что импедансное приближение пригодно для моделирования характеристик рассеяния тел с диэлектрическим покрытием даже в условиях, когда граница тела имеет изломы, а показатель преломления материала покрытия не слишком велик. Обсуждаются различные варианты описания „черных“ тел и результаты исследования характеристик рассеяния таких тел.

Введение

Проблема моделирования характеристик рассеяния не отражающих или „черных“ тел относится к числу классических задач электродинамики и теории дифракции. Принципиальная сложность этой проблемы заключается в том, что так называемое „черное“ тело не может быть описано в терминах строгой граничной задачи теории дифракции [1]. Поэтому существуют различные приближенные способы описания „черного“ тела, позволяющие изучать характеристики рассеяния таких тел [1–3]. Эти способы описания или модели условно можно разделить на два класса: так называемые конструктивные, в которых так или иначе обсуждается вопрос о реализации поглощающего покрытия, и „умозрительные“, в которых речи о какой-либо конкретной реализации модели вообще не идет. К последним относится так называемая концепция Макдональда [2], согласно которой поверхность „черного“ тела является одновременно идеальным электрическим ($\epsilon_r = -i\infty$, $\mu_r = 1$) и идеальным магнитным ($\epsilon_r = 1$, $\mu_r = -i\infty$) проводником. Поле, рассеянное таким телом, вычисляется как полусумма полей, рассеянных идеально электро- и магнитопроводящими телами той же геометрии. К конструктивным моделям можно отнести известную модель Зоммерфельда [1], согласно которой материал малоотражающего покрытия должен быть таким, чтобы относительные диэлектрическая ϵ_r и магнитная μ_r проницаемости были равны друг другу. При этом еще требуется, чтобы материал покрытия поглощал электромагнитную волну, т.е. чтобы величины ϵ_r , μ_r были комплексными с большими мнимыми частями.

До последнего времени подавляющее большинство результатов исследования рассеяния волн „черными“ телами было получено на основе приближенных (асимптотических) подходов, таких как метод физической оптики и различные его обобщения [3]. Подобные подходы не

применимы в ситуациях, когда размеры тела не слишком велики по сравнению с длиной волны. В этих случаях исследования должны выполняться на основе строгих (в рамках принятого описания „черного“ тела) подходов. Имеется сравнительно небольшое число результатов такого рода исследований [2,4].

В настоящей работе развит эффективный метод решения задач дифракции электромагнитных волн на телах с импедансной границей (метод диаграммных уравнений (МДУ)), позволяющий осуществлять исследования характеристик рассеяния волн телами с магнитодиэлектрическим покрытием, и приведены результаты такого рода исследований.

Постановка задачи и формулировка метода диаграммных уравнений

Рассмотрим трехмерную задачу рассеяния волн некоего первичного монохроматического электромагнитного поля \mathbf{E}^0 , \mathbf{H}^0 на компактном препятствии, ограниченном поверхностью S . Пусть на поверхности S задано следующее краевое условие:

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{E})|_S = -Z[\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H})]|_S, \quad (1)$$

где Z — поверхностный импеданс [5]; \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности S ; $\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^1$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}^0 + \mathbf{H}^1$ — полное; \mathbf{E}^1 , \mathbf{H}^1 — вторичное (дифракционное) поле, которое всюду вне S удовлетворяет однородной системе уравнений Максвелла,

$$\nabla \times \mathbf{E}^1 = -ik\xi \mathbf{H}^1, \quad \nabla \times \mathbf{H}^1 = \frac{ik}{\xi} \mathbf{E}^1,$$

а также условию на бесконечности, например, вида

$$\left(\mathbf{E}^1 \times \frac{\mathbf{r}}{r}\right) + \xi \mathbf{H} = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad \left(\mathbf{H}^1 \times \frac{\mathbf{r}}{r}\right) - \frac{1}{\xi} \mathbf{E} = o\left(\frac{1}{r}\right), \\ r \equiv |\mathbf{r}| \rightarrow \infty.$$

Здесь $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ — волновое число, $\xi = \sqrt{\mu/\epsilon}$ — волновое сопротивление среды. В соответствии со стандартной схемой МДУ [6,7] будем искать диаграмму рассеяния (диаграмму волнового поля), т.е. функцию, определяющую зависимость дифракционного поля от углов (θ, φ) в сферической системе координат (r, θ, φ) в так называемой дальней зоне (при $kr \gg 1$), где выполняются асимптотические соотношения вида

$$\mathbf{E}^1 = \frac{\exp(-ikr)}{r} \mathbf{F}^E(\theta, \varphi) + O\left(\frac{1}{(kr)^2}\right),$$

$$\mathbf{H}^1 = \frac{\exp(-ikr)}{r} \mathbf{F}^H(\theta, \varphi) + O\left(\frac{1}{(kr)^2}\right),$$

в которых $\mathbf{F}^E, \mathbf{F}^H$ — диаграммы электрического и магнитного полей соответственно.

Рассмотрим кратко идею вывода интегрооператорного уравнения МДУ, причем для простоты ограничимся случаем $Z = 0$. Исходным моментом для последующего рассмотрения служит представление Зоммерфельда–Вейля волнового поля (например, магнитного) обобщенным интегралом плоских волн [8]

$$\mathbf{H}^1 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} d\beta \times \int_0^{\pi/2+i\infty} \exp(-ikr \cos \alpha) \hat{\mathbf{F}}^H(\theta, \varphi; \alpha, \beta) \sin \alpha d\alpha, \quad (2)$$

в котором $\hat{\mathbf{F}}^H$ — диаграмма рассеяния в системе координат, повернутой так, чтобы ось OZ была направлена в точку наблюдения

$$\hat{\mathbf{F}}^H(\theta, \varphi; \alpha, \beta) = \frac{ik^2}{4\pi} \int_S ((\mathbf{n}' \times \mathbf{H}) \times \hat{\mathbf{p}}) \exp(ik\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{r}') ds'. \quad (3)$$

В соотношении (3) $\mathbf{p} = \{\sin \alpha \cos \beta, \sin \alpha \sin \beta, \cos \alpha\}$; $\hat{\mathbf{p}} = A^T \mathbf{p}$, где A — матрица поворота системы координат

$$A = \begin{pmatrix} -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ -\cos \varphi \cos \theta & -\sin \varphi \cos \theta & \sin \theta \\ \cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Интеграл (2) сходится абсолютно и равномерно в R^3/\bar{B} , где \bar{B} — выпуклая оболочка особенностей рассеянного поля [9]. Подставляя теперь (2) в (3) и учитывая, что $\mathbf{H} = \mathbf{H}^0 + \mathbf{H}^1$, мы получим желаемое интегрооператорное уравнение

$$\mathbf{F}^H(\xi, \eta) = \mathbf{F}_0^H(\xi, \eta) + \frac{k^2}{4\pi i} \int_S \mathbf{q} \times \mathbf{n} \frac{1}{2\pi i} \times \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2+i\infty} \exp(-ik\rho \cos \alpha) \hat{\mathbf{F}}^H(\theta, \varphi; \alpha, \beta) \times \exp(ik\mathbf{q}\rho(\theta, \varphi)) \sin \alpha d\alpha d\beta ds, \quad (4)$$

в котором

$$\mathbf{q} = \{\sin \xi \cos \eta, \sin \xi \sin \eta, \cos \xi\},$$

$$\mathbf{F}_0^H(\xi, \eta) = \frac{ik^2}{4\pi} \int_S [(\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0) \times \mathbf{q}] \exp(ik\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho}') ds'.$$

Подставляя в полученное уравнение (4) разложение диаграммы в ряд по какому-либо базису и проектируя левую и правую части уравнения на некоторый, вообще говоря, другой базис на единичной сфере, сведем задачу к бесконечной алгебраической системе. Этот способ корректен и математически обоснован при условии, что \bar{B} целиком содержится внутри рассеивателя [6,7,10]. Однако в векторном случае с импедансными краевыми условиями эта схема слишком громоздка. Поэтому мы здесь приведем более простой (правда с более сложной процедурой обоснования) способ получения алгебраической системы МДУ относительно коэффициентов разложения диаграммы в ряд по сферическим гармоникам [11,12], минуя этап интегрооператорного уравнения.

Сведение краевой задачи к системе алгебраических уравнений

Известно (см., например, [12]), что

$$\mathbf{F}^E(\theta, \varphi) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{nm} i^n (\mathbf{i}_r \times \Phi_n^m(\theta, \varphi)) - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n b_{nm} i^n \xi \Phi_n^m(\theta, \varphi), \quad (5)$$

$$\mathbf{F}^H(\theta, \varphi) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{nm} i^n \frac{1}{\xi} \Phi_n^m(\theta, \varphi) - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n b_{nm} i^n (\mathbf{i}_r \times \Phi_n^m(\theta, \varphi)), \quad (6)$$

где

$$\Phi_n^m(\theta, \varphi) = \mathbf{r} \times \nabla P_n^m(\cos \theta) \cdot \exp(im\varphi). \quad (7)$$

Нашей целью, таким образом, является получение алгебраической системы для коэффициентов a_{nm}, b_{nm} .

Волновые поля $\mathbf{E}^1, \mathbf{H}^1$ могут быть представлены в виде следующих разложений:

$$\mathbf{E}^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ a_{nm} [\nabla \times \nabla \times (\mathbf{r}\psi_n^m)] - ik\xi b_{nm} [\nabla \times (\mathbf{r}\psi_n^m)] \right\}, \quad (8)$$

$$\mathbf{H}^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \frac{ik}{\xi} a_{nm} [\nabla \times (\mathbf{r}\psi_n^m)] + b_{nm} [\nabla \times \nabla \times (\mathbf{r}\psi_n^m)] \right\}, \quad (9)$$

где

$$\psi_n^m = h_n^{(2)}(kr)P_n^m(\cos\theta)\exp(im\varphi), \quad (10)$$

$h_n^{(2)}$ — сферические функции Ганкеля второго рода, P_n^m — присоединенные функции Лежандра.

Отправной точкой для дальнейшего является представление коэффициентов a_{nm} , b_{nm} через граничные значения волнового поля. По аналогии с [11] необходимые выражения для этих коэффициентов могут быть получены на основании следующих соотношений:

$$\mathbf{E}^1 = \int_S \left\{ \frac{\xi}{ik} [\nabla \times \nabla \times (\mathbf{I}^e G_0)] - Z [\nabla \times (\mathbf{I}^m G_0)] \right\} ds', \quad (11)$$

$$\mathbf{H}^1 = \int_S \left\{ \frac{Z}{ik\xi} [\nabla \times \nabla \times (\mathbf{I}^m G_0)] + [\nabla \times (\mathbf{I}^e G_0)] \right\} ds', \quad (12)$$

в которых

$$\mathbf{I}^e = (\mathbf{n} \times \mathbf{H})|_S, \quad \mathbf{I}^m = (\mathbf{n}H_n - \mathbf{H})|_S, \\ G_0 = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\exp(-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (13)$$

— функция Грина свободного пространства (фундаментальное решение скалярного уравнения Гельмгольца).

Теперь с использованием формул (8)–(13) можно получить, что

$$a_{nm} = \frac{k}{4\pi i} N_{nm} \int_S \left\{ \frac{\xi}{ik} \mathbf{I}^e [\nabla \times \nabla \times (\mathbf{r} \bar{\chi}_n^m)] - Z \mathbf{I}^m [\nabla \times (\mathbf{r} \bar{\chi}_n^m)] \right\} ds, \quad (14)$$

$$b_{nm} = \frac{k}{4\pi i} N_{nm} \int_S \left\{ \mathbf{I}^e [\nabla \times (\mathbf{r} \bar{\chi}_n^m)] + \frac{Z}{ik\xi} \mathbf{I}^m [\nabla \times \nabla \times (\mathbf{r} \bar{\chi}_n^m)] \right\} ds, \quad (15)$$

где

$$\bar{\chi}_n^m(r) = j_n(kr)P_n^m(\cos\theta)\exp(-im\varphi), \\ N_{nm} = \frac{2n+1(n-m)!}{n(n+1)(n+m)!},$$

j_n — сферические функции Бесселя, черта означает знак комплексного сопряжения.

Соотношения (14) и (15) являются исходными для получения нужной нам алгебраической системы. Введем обозначения

$$\mathbf{H}_{nm}^h = \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r} \psi_n^m), \quad \mathbf{H}_{nm}^e = \frac{ik}{\xi} \nabla \times (\mathbf{r} \psi_n^m). \quad (16)$$

Из (9) и (16) имеем

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=-q}^q (a_{qp} \mathbf{H}_{qp}^e + b_{qp} \mathbf{H}_{qp}^h). \quad (17)$$

Теперь, используя (14), (15) и (17), получим систему МДУ

$$\begin{cases} a_{nm} = a_{nm}^0 + \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=-q}^q (G_{nm,qp}^{11} a_{qp} + G_{nm,qp}^{12} b_{qp}), \\ b_{nm} = b_{nm}^0 + \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=-q}^q (G_{nm,qp}^{21} a_{qp} + G_{nm,qp}^{22} b_{qp}); \end{cases} \quad (18) \\ n = 1, 2, \dots; |m| \leq n.$$

В этой системе

$$a_{nm}^0 = a_{nm}^{00} + Z a_{nm}^{z0}; \quad b_{nm}^0 = b_{nm}^{00} + Z b_{nm}^{z0}; \\ G_{nm,qp}^{ij} = G_{nm,qp}^{0ij} + Z G_{nm,qp}^{zij}, \quad (19)$$

где индексом 0 обозначены значения соответствующих величин при $Z = 0$, а индексом z — добавочные слагаемые, обусловленные отличием величины импеданса от нуля. Для этих слагаемых имеем

$$a_{nm}^{00} = \frac{-\xi}{4\pi} N_{nm} \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0) \overline{\mathbf{e}_{nm}^e} ds, \\ b_{nm}^{00} = \frac{\xi}{4\pi} N_{nm} \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0) \overline{\mathbf{h}_{nm}^e} ds, \\ a_{nm}^{z0} = \frac{-\xi}{4\pi} N_{nm} \int_S [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0)]_S \overline{\mathbf{h}_{nm}^e} ds, \\ b_{nm}^{z0} = -\frac{1}{4\pi\xi} N_{nm} \int_S [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0)]_S \overline{\mathbf{e}_{nm}^e} ds. \quad (20)$$

Далее, для матричных элементов системы МДУ при $Z = 0$ имеем [11]

$$G_{nm,qp}^{011} = -\frac{\xi}{4\pi} N_{nm} \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_{qp}^e) \overline{\mathbf{e}_{nm}^e} ds, \\ G_{nm,qp}^{012} = -\frac{\xi}{4\pi} N_{nm} \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_{qp}^h) \overline{\mathbf{e}_{nm}^e} ds, \\ G_{nm,qp}^{021} = \frac{-\xi}{4\pi} N_{nm} \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_{qp}^e) \overline{\mathbf{h}_{nm}^e} ds, \\ G_{nm,qp}^{022} = \frac{-\xi}{4\pi} N_{nm} \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_{qp}^h) \overline{\mathbf{h}_{nm}^e} ds. \quad (21)$$

Добавочные слагаемые для матричных элементов при значении импеданса, отличном от нуля, выражаются в виде следующих интегралов:

$$G_{nm,qp}^{z11} = \frac{-\xi}{4\pi} N_{nm} \int_S [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_{qp}^e)]_S \overline{\mathbf{h}_{nm}^e} ds, \\ G_{nm,qp}^{z12} = \frac{-\xi}{4\pi} N_{nm} \int_S [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_{qp}^h)]_S \overline{\mathbf{h}_{nm}^e} ds,$$

$$G_{nm,qp}^{z21} = \frac{-1}{4\pi\xi} N_{nm} \int_S [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_{qp}^e)] \Big|_S \overline{\mathbf{e}}_{nm}^e ds,$$

$$G_{nm,qp}^{z22} = \frac{-1}{4\pi\xi} N_{nm} \int_S [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_{qp}^h)] \Big|_S \overline{\mathbf{e}}_{nm}^e ds. \quad (22)$$

В выражениях (20)–(22) введены обозначения

$$\mathbf{h}_{nm}^e = \frac{ik}{\xi} \nabla \times (\mathbf{r} \chi_n^m), \quad \mathbf{e}_{nm}^e = \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r} \chi_n^m).$$

В сферической системе координат

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\kappa} (\mathbf{i}_r \rho \sin \theta - \mathbf{i}_\theta \rho'_\theta \sin \theta - \mathbf{i}_\varphi \rho'_\varphi), \quad ds = \kappa \rho d\theta d\varphi,$$

$$\kappa = \sqrt{(\rho^2 + (\rho'_\theta)^2) \sin^2 \theta + (\rho'_\varphi)^2},$$

причем $r = \rho(\theta, \varphi)$ — уравнение поверхности S в сферической системе координат.

В случае, когда рассеиватель представляет собой тело вращения, т. е. $\rho(\theta, \varphi) = \rho(\theta)$, система (18) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} a_{nm} = a_{nm}^0 + \sum_{q=|m|}^{\infty} (G_{nm,qm}^{11} a_{qm} + G_{nm,qm}^{12} b_{qm}), \\ b_{nm} = b_{nm}^0 + \sum_{q=|m|}^{\infty} (G_{nm,qm}^{21} a_{qm} + G_{nm,qm}^{22} b_{qm}); \end{cases} \quad (23)$$

$$n = 1, 2, \dots; |m| \leq n,$$

где теперь величины $G_{nm,qm}^{ij}$ выражаются однократными интегралами.

Для обоснования полученного алгоритма необходимо выполнить асимптотическую оценку матричных элементов и правых частей системы (18) при больших значениях индексов n и q . Это можно сделать в полной аналогии с работой [7]. Как и в [7], можно показать, например, что при $n \gg q$

$$|G_{nm,qp}^{ij}| \leq \text{const} \frac{\sigma_1^n}{n \cdot n!},$$

где

$$\sigma_1 = \max_{\theta_0^s, \varphi_0, s} \left| \frac{k\rho(\theta_0^s, \varphi_0)}{2} \exp(is\theta_0^s) \right|, \quad (24)$$

причем θ_0^s, φ_0 находятся из условий

$$\left. \frac{\rho'_\theta(\theta, \varphi)}{\rho(\theta, \varphi)} \right|_{\theta=\theta_0^s, \varphi_0} = -is; \quad s = \pm 1;$$

$$\left. \frac{\rho'_\varphi(\theta, \varphi)}{\rho(\theta, \varphi)} \right|_{\varphi=\varphi_0, \theta_0^s} = 0; \quad \exp(is\theta_0^s) = 0. \quad (25)$$

Максимум в (24) ищется среди тех корней системы (25), которые при замене $\xi = \rho(\theta, \varphi) \exp(i\theta)$ оказываются внутри контуров C_φ , являющихся отображением сечения поверхности S плоскостью $(\varphi, \varphi + \pi)$ на комплексной плоскости $z = r \exp(i\alpha)$. Эти корни являются главными особенностями продолжения дифракционного

поля внутрь рассеивателя [9]. Если функция $\rho(\theta, \varphi)$ имеет неаналитические точки, то их следует учесть при вычислении максимума в (24).

Аналогично при $q \gg n$ можно установить, что

$$|G_{nm,qp}^{ij}| \leq \text{const} \frac{q!}{\sigma_2^q},$$

причем

$$\sigma_2 = \max_{\theta_0^s, \varphi_0, s} \left| \frac{k\rho(\theta_0^s, \varphi_0)}{2} \exp(is\theta_0^s) \right|, \quad (26)$$

а минимум в этом соотношении ищется на множестве тех корней системы (25), которым при замене $\xi = \rho(\theta, \varphi) \exp(i\theta)$ соответствуют точки, лежащие вне описанных выше контуров C_φ на плоскости $z = r \exp(i\alpha)$.

Подобным образом можно показать, что при $n \gg 1$

$$|a_{nm}^0|, |b_{nm}^0| \leq \text{const} \frac{\sigma^n}{n \cdot n!}, \quad \sigma = \max(\sigma_1, \sigma_0),$$

причем $\sigma_0 = kr_0/2$; r_0 — расстояние до наиболее удаленной от начала координат точки внутри S , соответствующей особенности функции $(\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0)|_S(\theta, \varphi)$ при ее продолжении в область комплексных углов θ . В случае, когда \mathbf{H}^0 — поле плоской волны, имеем $\sigma_0 = 0$, т. е. $\sigma = \sigma_1$.

Из полученных оценок следует, что в системе (18) необходимо выполнить замену неизвестных коэффициентов [6,7], положив

$$a_{nm} = \frac{\sigma^n}{n!} x_{nm}, \quad b_{nm} = \frac{\sigma^n}{n!} y_{nm}.$$

В результате указанной замены, например, система (23) примет следующий вид:

$$\begin{cases} x_{nm} = x_{nm}^0 + \sum_{q=|m|}^{\infty} (g_{nm,qm}^{11} x_{qm} + g_{nm,qm}^{12} y_{qm}), \\ y_{nm} = y_{nm}^0 + \sum_{q=|m|}^{\infty} (g_{nm,qm}^{21} x_{qm} + g_{nm,qm}^{22} y_{qm}); \end{cases} \quad (27)$$

$$n = 1, 2, \dots; |m| \leq n,$$

где

$$x_{nm}^0 = \frac{n!}{\sigma^n} a_{nm}^0, \quad y_{nm}^0 = \frac{n!}{\sigma^n} b_{nm}^0,$$

$$g_{nm,qm}^{jl} = G_{nm,qm}^{jl} \frac{n!}{q!} \sigma^{q-n}.$$

Система (27), как и аналогичная система в общем случае, полученная из (18), разрешима методом редукции при выполнении условия

$$\sigma_2 > \sigma. \quad (28)$$

В случае, когда первичное поле — плоская волна, условие (28) является ограничением только на геометрию рассеивателя, который должен относиться к классу так называемых слабо невыпуклых тел [7], каковыми являются, в частности, все выпуклые тела.

Результаты численных исследований

Рассмотрим примеры решения конкретных задач рассеяния изложенным методом. Были рассмотрены задачи рассеяния на осесимметричных телах: вытянутом сфероиде, конечном круговом цилиндре, круговом цилиндре с аналитической границей и сфере. В качестве оси симметрии была выбрана ось Z .

Все вычисления коэффициентов диаграммы проводились на основе решения конечной системы вида (27), в которой верхний предел суммирования равен N

$$\begin{cases} x_{nm} = x_{nm}^0 + \sum_{q=|m|}^N (g_{nm,qm}^{11} x_{qm} + g_{nm,qm}^{12} y_{qm}), \\ y_{nm} = y_{nm}^0 + \sum_{q=|m|}^N (g_{nm,qm}^{21} x_{qm} + g_{nm,qm}^{22} y_{qm}); \end{cases} \quad (29)$$

$$n = 1, 2, \dots, |m| \leq n.$$

Решение системы (29) сводится к решению $2 \cdot N + 1$ систем линейных алгебраических уравнений меньших размеров для каждого фиксированного m ($-N \leq m \leq N$). При этом минимальный размер матрицы системы составляет 2×2 , а максимальный — $2 \cdot N \times 2 \cdot N$, тогда как размер матрицы в общем случае, без учета симметрии вращения, был бы равен $2(N^2 + 2 \cdot N) \times 2(N^2 + 2 \cdot N)$.

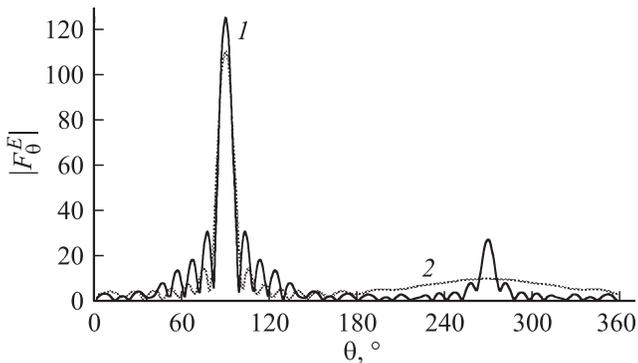


Рис. 1. Диаграммы рассеяния идеальных электропроводящих тел: сфероида (1) и цилиндра (2) при падении на них плоской волны перпендикулярно оси вращения.

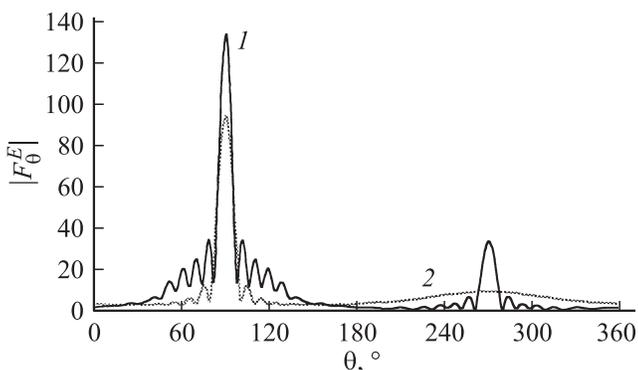


Рис. 2. То же, что на рис. 1, но для идеальных магнитопроводящих сфероида (1) и цилиндра (2).

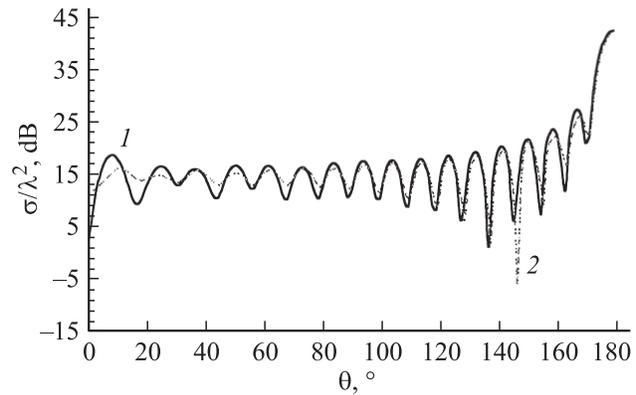


Рис. 3. Двухпозиционный поперечник рассеяния проводящей сферы, имеющей радиус 3λ , с толщиной покрытия $t = 0.05\lambda$ и относительными диэлектрической $\epsilon_r = 4 - i$ и магнитной $\mu_r = 1$ проницаемостями: 1 — МДУ при $N = 25$ и $Z = -5.48 - 136.69i$; 2 — точное решение (ряд Ми) [15].

Проведем сначала исследование диаграмм рассеяния идеально электро- и магнитопроводящих вытянутого сфероида при $ka = 10$, $kc = 20$ (a — меньшая полуось, c — большая полуось) и конечного кругового цилиндра при $ka = 10$, $kh = 40$, в который „вписан“ упомянутый сфероид (a — радиус основания, h — высота) при падении на них плоской единичной волны под углами $\theta_0 = 90^\circ$, $\varphi_0 = 0^\circ$ (перпендикулярное падение). Здесь была выбрана следующая поляризация падающего поля:

$$\mathbf{E}^0 = \mathbf{i}_z \exp(-ikr \sin \theta \cos \varphi),$$

$$\mathbf{H}^0 = -\frac{1}{\xi} \mathbf{i}_y \exp(-ikr \sin \theta \cos \varphi).$$

На рис. 1, 2 представлены графики величины $|F_\theta^E|$ в азимутальной плоскости $\varphi = [0, \pi]$, при этом кривая 1 соответствует сфероиду ($N = 40$), а кривая 2 — цилиндру ($N = 44$). Для идеально электропроводящего тела (рис. 1) величина импеданса Z равна нулю. В случае же идеально магнитопроводящего тела (рис. 2) необходимо полагать, что $Z = \infty$, но для практических расчетов величину импеданса можно принять равной $1000\xi_0 i$, где ξ_0 — импеданс в свободном пространстве.

Перейдем к исследованию рассеяния волн телами с покрытием. Диэлектрическое покрытие толщиной t и материальными параметрами ϵ, μ характеризуется соответствующим импедансом Z , величина которого определяется при помощи следующей формулы [13,14]

$$Z = -i \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \operatorname{tg}(k_1 t),$$

где $k_1 = kn$, n — коэффициент преломления.

На рис. 3–5 приведены результаты моделирования характеристик рассеяния волн телами с диэлектрическим покрытием. На осях ординат этих рисунков отложена величина σ/λ^2 , где $\sigma = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 |\mathbf{E}^1|^2 / |\mathbf{E}^0|^2$ — радиолокационный поперечник рассеяния.

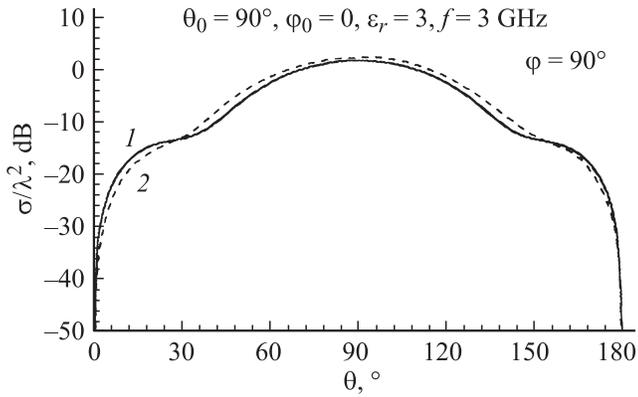


Рис. 4. Двухпозиционный поперечник рассеяния в полуплоскости $\varphi = 90^\circ$ для проводящего кругового цилиндра с радиусом $a = 0.26\lambda$ и высотой $h = \lambda$ с покрытием толщиной $t = 0.02\lambda$ и $\epsilon_r = 3$, $\mu_r = 1$ при падении плоской волны перпендикулярно оси вращения: 1 — МДУ при $N = 15$ и $Z = -48.651i$; 2 — методы интегральных уравнений и конечных элементов [16].

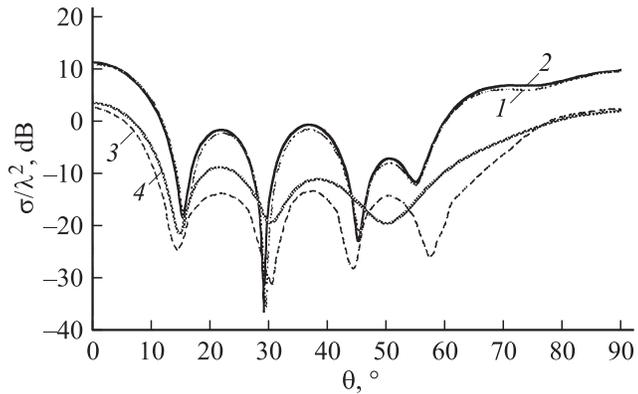


Рис. 5. Однопозиционный поперечник рассеяния в плоскости $x - z$ для проводящего кругового цилиндра с радиусом $a = 0.5\lambda$ и высотой $h = 2\lambda$ без покрытия и с покрытием толщиной $t = 0.1\lambda$ и $\epsilon_r = 2 - i$, $\mu_r = 1.5 - 0.5i$: 1 — непокрытый (метод моментов) [16], 2 — непокрытый (МДУ: $Z = 0$), 3 — покрытый (метод конечных элементов) [16], 4 — покрытый (МДУ: $Z = -357.134 - 326.842i$).

На рис. 3 приведен двухпозиционный поперечник рассеяния сферы радиуса $a = 3\lambda$, покрытый слоем диэлектрика толщиной $t = 0.05\lambda$ с материальными параметрами $\epsilon = (4 - i)\epsilon_0$ и $\mu = \mu_0$, где μ_0 и ϵ_0 — магнитная и диэлектрическая проницаемости вакуума. На этом рисунке штриховой кривой приведены результаты расчетов для сферы с покрытием, выполненные с использованием строгого решения в виде рядов Ми [15], сплошной кривой — результаты наших расчетов с использованием импедансного приближения. Видно, что в случае сферы импедансное приближение достаточно адекватно, несмотря на то, что коэффициент преломления материала покрытия сравнительно невелик.

На рис. 4 приведены результаты расчета величины σ/λ^2 в полуплоскости $\varphi = 90^\circ$ для кругового конечного цилиндра радиуса $a = 0.26\lambda$, высотой $h = \lambda$, покрытого слоем диэлектрика толщиной $t = 0.02\lambda$ с материальными параметрами $\epsilon = 3\epsilon_0$ и $\mu = \mu_0$ при падении на него плоской волны под углами $\theta_0 = 90^\circ$, $\varphi_0 = 0$ (т.е. перпендикулярно оси цилиндра). Штриховая кривая взята из работы [16], где расчеты производились с использованием методов токовых интегральных уравнений и конечных элементов. Здесь также видно хорошее совпадение результатов моделирования с использованием импедансного приближения с результатами расчетов по строгой модели, хотя в данном случае ситуация осложняется наличием изломов границы рассеивателя, в окрестности которых импедансное приближение, вообще говоря, некорректно, а также тем, что размеры рассеивателя невелики по сравнению с длиной волны.

Наконец, на рис. 5 приведены графики однопозиционного радиолокационного поперечника рассеяния идеально проводящего конечного цилиндра длины $kh = 4\pi$ и радиуса $ka = \pi$ (кривые 1 и 2) и цилиндра с диэлектрическим покрытием толщины $t = 0.1\lambda$ и материальными параметрами $\epsilon = (2 - i)\epsilon_0$, $\mu = \mu_0(1.5 - 0.5i)$ (кривые 3 и 4). Кривые 1 и 3 взяты из работы [15].

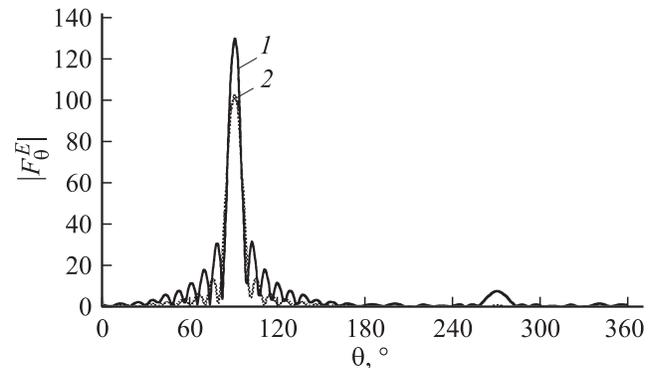


Рис. 6. Диаграммы рассеяния „черных“ тел: сфероид (1; $N = 40$) и цилиндра (2; $N = 44$) при падении на них плоской волны перпендикулярно оси вращения.

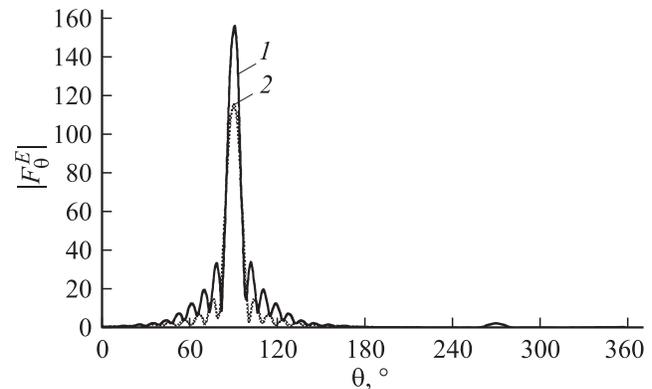


Рис. 7. Диаграммы рассеяния импедансных тел при $Z \cong -\xi_0$: сфероид при $N = 40$ (1) и цилиндра при $N = 44$ (2) при падении на них плоской волны перпендикулярно оси вращения.

Таблица 1. Величины $|F_{\theta}^E(\theta, \varphi)|$ при $\theta = 120^\circ$ и $\varphi = 0$ для импедансов $Z_0 = 0$, $Z_1 = 1000\xi_0 i$ и $Z_2 = -\xi_0$

N	Сфероид			N	Цилиндр		
	Z_0	Z_1	Z_2		Z_0	Z_1	Z_2
37	4.4014138	3.7177547	2.2222917	40	6.5903586	19.9426107	11.8249504
39	4.4014206	3.7177477	2.2222888	41	6.6081976	19.7724602	11.8295639
40	4.4014094	3.7177432	2.2222959	43	6.5307894	19.5571172	11.7956310
41	4.4014020	3.7177449	2.2222993	44	6.5669652	19.6462934	11.7898536

При расчете двухпозиционного поперечника рассеяния сферы, приведенного на рис. 3, в конечной системе вида (29) верхний предел суммирования N выбирался равным 25. Общее время счета всей кривой было меньше 1 min. Расчет соответствующей кривой методом конечных элементов, выполненный в работе [16], потребовал обращения алгебраической системы с более чем 187 000 неизвестных и более чем 130 000 секунд времени CPU. При расчетах однопозиционного поперечника рассеяния кругового цилиндра, результаты которых приведены на рис. 5, N было взято равным 23. Полное время счета каждой из кривых составило менее 14 min. Приведенные результаты свидетельствуют о весьма высокой эффективности предложенного в настоящей работе подхода.

Перейдем теперь к рассмотрению характеристик рассеяния волн „черными“ телами. На рис. 6 приведен график величины $|F_{\theta}^E|$ в плоскости $\varphi = [0, \pi]$ в случае, когда указанные выше идеально проводящие сфероид и цилиндр являются „черными“ телами. Диаграмма рассеяния в этом случае рассчитывалась с использованием концепции Макдональда [2].

Согласно концепции Зоммерфельда [1], как уже отмечалось, в качестве физической модели „черного“ тела может служить металлическое тело с диэлектрическим покрытием небольшой по сравнению с размером тела толщины t , имеющим диэлектрические и магнитными проницаемости вида

$$\varepsilon = -i\alpha\varepsilon_0, \quad \mu = -i\alpha\mu_0,$$

где $\alpha \rightarrow \infty$.

Для модели Зоммерфельда величина импеданса $Z \cong -\xi_0$. Для импеданса, соответствующего модели Зоммерфельда, на рис. 7 приведены графики величины $|F_{\theta}^E|$ в плоскости $\varphi = [0, \pi]$ тех же, что и раньше, сфероида и цилиндра. Как видно из рис. 7, полученная диаграмма рассеяния для тела с покрытием, характеризуемым величиной импеданса $Z = -\xi_0$, очень близка к той, которая была получена на основе концепции Макдональда. Следует отметить, что значение сечения обратного рассеяния на рис. 7 меньше, чем на рис. 6, для обоих тел (цилиндр: $|F_{\theta Zom}^E(270^\circ, 0)| \approx 2.6448$ и $|F_{\theta Max}^E(270^\circ, 0)| \approx 7.7042$; сфероид: $|F_{\theta Zom}^E(270^\circ, 0)| \approx 0.0954$ и $|F_{\theta Max}^E(270^\circ, 0)| \approx 0.3495$). Это означает, что модели Зоммерфельда соответствуют рассеиватели с более высокими поглощающими свойствами.

Для „черных“ тел имеет место теорема П.Я. Уфимцева [3], согласно которой интегральный поперечник

рассеяния „черного“ тела ровно в 2 раза меньше интегрального поперечника рассеяния идеально проводящего тела, имеющего тот же теневой контур (т.е. границу между освещенной и теневой частями поверхности тела). Это утверждение справедливо для всех выпуклых тел, линейные размеры и минимальный радиус кривизны которых много больше длины волны. В нашем случае это отношение оказалось равным 2.13 для сфероида и 2.04 для цилиндра, имеющего больший теневой контур.

В табл. 1 приведены данные, иллюстрирующие скорость сходимости вычислительного алгоритма для рассмотренных цилиндра и сфероида. Видно, что в случае рассеивателя с аналитической границей (сфероид) четыре верных знака после запятой устанавливаются в диаграмме рассеяния уже при $N = 40$, т.е. при $N = kd$. В случае же тела с неаналитической границей (цилиндр) при $N \approx 1.1kd$ устанавливаются только два верных знака после запятой.

Была также осуществлена проверка выполнения оптической теоремы для идеально проводящих тел, согласно которой интегральный поперечник рассеяния равен полному сечению рассеяния в направлении распространения падающей волны. В табл. 2 даны результаты проверки оптической теоремы для указанных выше идеально электро- и магнитопроводящих сфероида и цилиндра. При перпендикулярном падении плоской волны оптическая теорема имеет следующий вид [17]:

$$P_S = P_{S2} \equiv -\frac{\lambda}{\xi} \text{Im} \{ F_{\theta}^E(\theta = 90^\circ, \varphi = 0) \}.$$

Приведем оценку интегрального поперечника рассеяния для „черного“ тела, которая получается с помощью приближения Кирхгофа [2]

$$P_S \equiv \frac{1}{2\xi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} |\mathbf{F}^E(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta d\theta d\varphi = P_{S3} \equiv \frac{|\mathbf{E}^0|^2 S_0}{2\xi_0},$$

где S_0 — площадь поперечного сечения зоны тени.

Таблица 2. Оптическая теорема для импедансов $Z_0 = 0$ и $Z_1 = 1000\xi_0 i$

N	Сфероид		Цилиндр	
	Z_0	Z_1	Z_0	Z_1
P_S	1.8322582	1.5556632	2.0700647	2.2404235
P_{S2}	1.8322582	1.5556631	2.0874581	2.2232507

Таблица 3. Интегральные поперечники рассеяния для „черных“ тел: сфероида и цилиндра

	Сфероид	Цилиндр
$P_{S \text{ Max}}$	0.794916	1.035255
$P_{S \text{ Zom}}$	0.940357	1.307298
P_{S3}	0.833333	1.061039

В табл. 3 приведены интегральные поперечники рассеяния черных сфероида и цилиндра (P_S), полученные на основе концепций Макдональда ($P_{S \text{ Max}}$) и Зоммерфельда ($P_{S \text{ Zom}}$), а также P_{S3} этих же тел, полученные в приближении Кирхгофа.

Наконец, на рис. 8 приведены графики величины $|F_\theta^F|$ в плоскости $\varphi = [0, \pi]$ для следующих „черных“ тел: конечного кругового цилиндра при $ka = 2, kh = 8$ и конечного кругового цилиндра с аналитической границей тех же размеров при $N = 19$ в системе (29). Каноническое уравнение аналитического цилиндра имеет следующий вид:

$$(x^2 - a^2)(z^2 - (h/2)^2) = \varepsilon^2, \quad \varepsilon \leq 0.1ka,$$

где ε — радиус закругления на кромке цилиндра, $\varepsilon = 0.01$.

Из рис. 8 видно, что диаграммы рассеяния для обоих тел совпадают с графической точностью.

Заключение

На основании полученных результатов расчета характеристик рассеяния на импедансных телах, имеющих изломы границы, можно сделать вывод, что метод диаграммных уравнений (МДУ) позволяет с весьма высокой эффективностью решать такие задачи. Вычислительный алгоритм, построенный на основе МДУ, оказывается в высшей степени быстродействующим и не требует дополнительных мер для устранения особенностей токов в

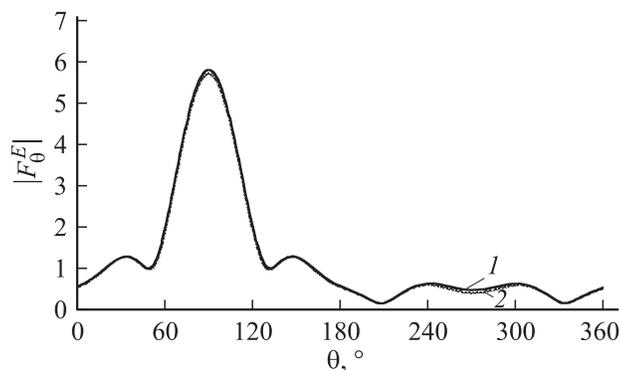


Рис. 8. Диаграммы рассеяния „черных“ тел: цилиндра при $ka = 2, kh = 8$ (1) и аналитического цилиндра тех же размеров (2) при падении на них плоской волны перпендикулярно оси вращения.

окрестностях сочленения участков границы с различной кривизной. Импедансное приближение применимо для приближенного моделирования характеристик рассеяния тел с диэлектрическим покрытием и слабоотражающих тел, в том числе при наличии изломов границы рассеивателя, а также в случаях, когда оптическая плотность покрытия не слишком велика.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-02-16336).

Список литературы

- [1] Зоммерфельд А. Оптика. М.: ИЛ, 1953.
- [2] Захарьев Л.Н., Леманский А.А. Рассеяние волн черными телами. // М.: Сов. радио, 1972. 288 с.
- [3] Уфимцев П.Я. Три лекции по физической теории дифракции. Л.: Изд-во ЛГУ, 1972.
- [4] Sharma S.K., Jones A.R. // J. Quant. Spectr. & Rad. Transfer. 2003. Vol. 79–80. P. 1051–1060.
- [5] Леонтович М.А. Исследования распространения радиоволн. М.: Изд-во АН СССР, 1948.
- [6] Кюркчан А.Г. // ДАН. 1992. Т. 325. № 2. С. 273–275.
- [7] Кюркчан А.Г. // ДАН. 1994. Т. 337. № 6. С. 728–731.
- [8] Кюркчан А.Г. // ДАН. 1992. Т. 322. № 4. С. 686–691.
- [9] Кюркчан А.Г., Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е. // УФН. 1996. Т. 166. № 12. С. 1285–1308.
- [10] До Дык Тханг, Кюркчан А.Г. // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 1. С. 55–62.
- [11] Кюркчан А.Г. // РЭ. 2000. Т. 45. № 9. С. 1078–1083.
- [12] Papas C.H. Theory of Electromagnetic Wave Propagation. New York; London; Sydney: McGraw-Hill Book Comp., 1965.
- [13] Фельд Я.Н., Бененсон Л.С. Антенно-фидерные устройства. Ч. II. М.: Изд-во ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1959.
- [14] Do-Hoon Kwon, Burkholder R.J., Pathak P.H. // IEEE Trans. on Ant. and Prop. 2001. Vol. 49. N 4. P. 583–591.
- [15] Xin-Qing Sheng, Jian-Ming Jin, Jiming Song et al. // IEEE Trans. on Ant. and Prop. 1998. Vol. 46. N 3. P. 583–591.
- [16] Swik T., Zuffada C., Jamnejad V. // IEEE Trans. on Ant. and Prop. 1996. Vol. 44. N 4. P. 453–459.
- [17] Борен К., Хафмен Д. Рассеяние и поглощение света малыми частицами. М.: Мир, 1986.