

Краткие сообщения

01;12

Анализ устойчивости сферического электростатического подвеса в жидкости в индукционном приближении

© А.В. Лимонов, В.А. Семенов

Пермский государственный университет,
614600 Пермь, Россия
e-mail: semenov@psu.ru

(Поступило в Редакцию 14 мая 2003 г.)

В работе [1] показано, что сила изображения определяет дополнительные условия реализации сферического электростатического подвеса шара без динамического управления потенциалами электродов. При этом экспериментально исследована зависимость критического напряжения между электродами от радиуса шара. В настоящей работе аналитически получена данная зависимость на основе расчета электрических сил до 3-го приближения по смещению шара из положения равновесия.

Допустим, что на поверхности сферической полости радиуса b , заполненной диэлектрической жидкостью с проницаемостью ε_m , задано распределение потенциала $U_0 f(\theta)$ такое, что поле внутри полости является центрально-симметричным (U_0 — характерная разность потенциалов между электродами). Совместим начало сферической системы координат (r, θ, φ) с центром полости. Угол θ отсчитывается от полярной оси z .

Поместим в центр полости шар радиуса R с диэлектрической проницаемостью ε_p . Потенциалы u_m в жидкости и u_p в шаре удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta u_m &= 0, & \Delta u_p &= 0, \\ r = 1, & u_m = u_p, & \varepsilon \frac{\partial u_m}{\partial n} &= \frac{\partial u_p}{\partial n}, \\ r = c, & u_m &= f(\theta). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь n — внешняя нормаль к элементу поверхности ds шара, ($r \rightarrow R$, $u \rightarrow U_0$, $c = b/R$, $\varepsilon = \varepsilon_m/\varepsilon_p$).

Ввиду симметрии поля шар в центре полости будет находиться в равновесии. Найдем электрическую силу, действующую на шар при его смещении из положения равновесия вдоль и перпендикулярно оси симметрии поля.

При смещении шара вдоль оси симметрии поля z на $\delta_z \ll 1$ потенциалы u_m и u_p изменяются в меру δ_z . Решение задачи (1) представим в виде разложения в ряд до 3-го приближения по смещению шара

$$\begin{aligned} u_m &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{r}{c} \right)^n \left(a_n^{(0)} + a_n^{(1)} \delta_z + a_n^{(2)} \delta_z^2 + a_n^{(3)} \delta_z^3 \right) \right. \\ &\quad \left. + r^{-(n+1)} \left(b_n^{(0)} + b_n^{(1)} \delta_z + b_n^{(2)} \delta_z^2 + b_n^{(3)} \delta_z^3 \right) \right] P_n(\cos \theta), \end{aligned}$$

$$u_p = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left(d_n^{(0)} + d_n^{(1)} \delta_z + d_n^{(2)} \delta_z^2 + d_n^{(3)} \delta_z^3 \right) P_n(\cos \theta).$$

$$a_n^{(0)} = \frac{2n+1}{2 \left(1 + \frac{(\varepsilon-1)n}{(n+1)\varepsilon+n} c^{-(2n+1)} \right)} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (2)$$

Здесь $P_n(\cos \theta)$ — полиномы Лежандра. Коэффициенты $a_n^{(1)}$, $a_n^{(2)}$, $a_n^{(3)}$ вычисляются из условия исчезновения возмущения потенциала на поверхности полости

$$a_n^{(i)} + c^{-(n+1)} b_n^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3)$$

При смещении шара перпендикулярно оси симметрии (вдоль оси x) используем систему координат (r, θ', φ') , в которой угол θ' отсчитывается от оси x , а угол φ' — от оси z в плоскости yz . Распределение потенциала $f(\theta)$ в новой системе координат — $f(\theta', \varphi')$. При этом $\cos \theta = -\sin \theta' \cos \varphi'$.

При смещении шара вдоль оси x на $\delta_x \ll 1$ решение задачи (1) представим в виде

$$\begin{aligned} u_m &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left(\left(\frac{r}{c} \right)^n \left(\alpha_{n,k}^{(0)} + \alpha_{n,k}^{(1)} \delta_x + \alpha_{n,k}^{(2)} \delta_x^2 + \alpha_{n,k}^{(3)} \delta_x^3 \right) \right. \\ &\quad \left. + r^{-(n+1)} \left(\beta_{n,k}^{(0)} + \beta_{n,k}^{(1)} \delta_x + \beta_{n,k}^{(2)} \delta_x^2 + \beta_{n,k}^{(3)} \delta_x^3 \right) \right) \cos k\varphi' \\ &\quad + \left(\left(\frac{r}{c} \right)^n \left(\gamma_{n,k}^{(0)} + \gamma_{n,k}^{(1)} \delta_x + \gamma_{n,k}^{(2)} \delta_x^2 + \gamma_{n,k}^{(3)} \delta_x^3 \right) \right. \\ &\quad \left. + r^{-(n+1)} \left(\chi_{n,k}^{(0)} + \chi_{n,k}^{(1)} \delta_x + \chi_{n,k}^{(2)} \delta_x^2 + \chi_{n,k}^{(3)} \delta_x^3 \right) \right) \\ &\quad \times \sin k\varphi' \Big) P_n^k(\cos \theta'), \\ u_p &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left(r^n \left(\lambda_{n,k}^{(0)} + \lambda_{n,k}^{(1)} \delta_x + \lambda_{n,k}^{(2)} \delta_x^2 + \lambda_{n,k}^{(3)} \delta_x^3 \right) \cos k\varphi' \right. \\ &\quad \left. + \left(\mu_{n,k}^{(0)} + \mu_{n,k}^{(1)} \delta_x + \mu_{n,k}^{(2)} \delta_x^2 + \mu_{n,k}^{(3)} \delta_x^3 \right) \sin k\varphi' \right) P_n^k(\cos \theta'), \end{aligned}$$

$$\alpha_{n,k}^{(0)} = \frac{(2n+1)(n-k)!}{2\pi\omega_k(n+k)!} \frac{1}{(\varepsilon-1)nc^{-(2n+1)}} \frac{1}{\varepsilon(n+1)+n} \times \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta', \varphi') P_n^k(\cos\theta') \cos k\varphi' \sin\theta' d\theta' d\varphi'$$

$$k=0: \omega_k=2, \quad k \neq 0: \omega_k=1. \quad (4)$$

Здесь $P_n^k(\cos\theta')$ — присоединение функции Лежандра.

Решая задачу (1) методом разложения в ряд смещения шара, найдем коэффициенты в (2,4) с учетом условия исчезновения возмущения потенциала на поверхности полости.

Известно [2], что электрическая сила, действующая на тело со стороны внешнего электростатического поля, определяется по формуле

$$\mathbf{F} = \frac{\varepsilon_m}{4\pi} \oint \left[\mathbf{E}(\mathbf{nE}) - \frac{1}{2} E^2 \mathbf{n} \right] ds. \quad (5)$$

Подставляя в (5) значение потенциала u_m на поверхности шара из (2) и (4), получим выражения для сил, действующих на шар при его смещении вдоль и перпендикулярно оси симметрии поля

$$F_z = F_z^{(1)}\delta_z + F_z^{(3)}\delta_z^3 + \dots,$$

$$F_x = F_x^{(1)}\delta_x + F_x^{(3)}\delta_x^3 + \dots,$$

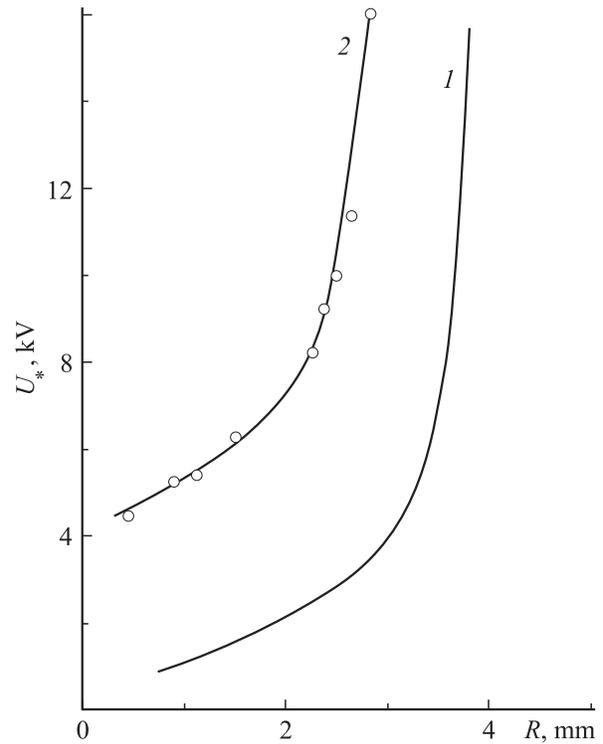
$$F_z^{(1)} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c^{-(n+1)} (a_{n+1}^{(0)}b_n^{(1)} + a_{n+1}^{(1)}b_n^{(0)}),$$

$$F_z^{(3)} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c^{-(n+1)} \times (a_{n+1}^{(0)}b_n^{(3)} + a_{n+1}^{(1)}b_n^{(2)} + a_{n+1}^{(2)}b_n^{(1)} + a_{n+1}^{(3)}b_n^{(0)}),$$

$$F_x^{(1)} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(n+1+k)!}{(n-k)!} c^{-(n+1)} \times (\alpha_{n+1}^{(0)}\beta_n^{(1)} + \alpha_{n+1}^{(1)}\beta_n^{(0)} + \gamma_{n+1}^{(0)}\chi_n^{(1)} + \gamma_{n+1}^{(1)}\chi_n^{(0)}),$$

$$F_x^{(3)} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(n+1+k)!}{(n-k)!} c^{-(n+1)} \times \left(\alpha_{n+1}^{(0)}\beta_n^{(3)} + \alpha_{n+1}^{(1)}\beta_n^{(2)} + \alpha_{n+1}^{(2)}\beta_n^{(1)} + \alpha_{n+1}^{(3)}\beta_n^{(0)} + \gamma_{n+1}^{(0)}\chi_n^{(3)} + \gamma_{n+1}^{(1)}\chi_n^{(2)} + \gamma_{n+1}^{(2)}\chi_n^{(1)} + \gamma_{n+1}^{(3)}\chi_n^{(0)} \right). \quad (6)$$

Оценивая из (6) смещения шара δ_z^* и δ_x^* , при которых сила достигает максимального значения вдоль и перпендикулярно оси симметрии поля, найдем выражения для



максимальной величины силы

$$F_z^* \approx F_z^{(1)} \left(-\frac{F_z^{(1)}}{3F_z^{(3)}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$F_x^* \approx F_x^{(1)} \left(-\frac{F_x^{(1)}}{3F_x^{(3)}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (7)$$

Приравнявая (7) к величине внешней массовой силы, действующей на шар, можно оценить минимальное (критическое) напряжение между электродами U_* , обеспечивающее равновесие в поле данной силы. В частности, на рисунке приведен результат расчета (кривая 1) зависимости критического напряжения от радиуса шара при действии силы тяжести, значениях параметров эксперимента [1] и распределении потенциала на поверхности полости

$$f(\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) = P_2(\cos\theta).$$

Как видно из графика, результаты расчета качественно совпадают с результатами эксперимента (кривая 2).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранта № 01-01-00512).

Список литературы

- [1] Семенов В.А. // ЖТФ. 1987. Т. 57. Вып. 10. С. 2056–2058.
- [2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.