

01;03

Нелинейные периодические волны на заряженной поверхности вязкой электропроводной жидкости

© Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 20 марта 2003 г.)

Впервые приводится корректное решение задачи о распространении периодической волны по заряженной поверхности вязкой глубокой жидкости в квадратичном приближении по амплитуде волны. Показано, что роль квадратичной по амплитуде добавки к профилю волны в реализации неустойчивости жидкости по отношению к собственному заряду является определяющей.

Введение

Теория волн на поверхности жидкости — одна из старейших и развитых областей классической гидродинамики. Ранние достижения из этой области собраны в учебнике Ламба [1]. Уже в начале 20-го века наметилась тенденция к изучению различных нелинейных эффектов, связанных с волновым движением. Первые успешные исследования нелинейных волн были выполнены для идеальной жидкости [2,3]. Работы того же времени по исследованию влияния вязкости на нелинейные волны [4,5] выглядели менее значимо, содержали неточности и ошибки. Из-за принятой для того времени координатной формы записи громоздкую даже в современных обозначениях полную математическую формулировку задачи о нелинейных волнах в вязкой жидкости с внятным объяснением сути ключевых этапов решения практически невозможно было ясно изложить в объеме журнальной статьи. В результате исследования нелинейных волн в приближении идеальной жидкости были приняты научной общественностью как вполне достоверно передающие особенности нелинейного волнового движения и к тому же давали возможность с существенно меньшими затратами получить уникальные результаты, поскольку фактически это были первые шаги нелинейной физики. В итоге сложилась традиция в исследованиях свойств нелинейных волн на поверхности глубокой жидкости отдавать приоритет приближению идеальной жидкости.

Лавинообразно растущее число работ по аналитическому исследованию волн на поверхности идеальной жидкости (см., например, [1–13] и указанную там литературу) существенно превышает количество попыток аналитически корректно описать влияние вязкости на временную эволюцию нелинейной поверхностной волны. Большинство работ, относящихся к волнам в вязкой жидкости, выполнены в приближении малой вязкости в рамках теории пограничного слоя [14–16], пригодного лишь при больших значениях числа Рейнольдса. Только в последние годы появились работы [17,18], в которых в квадратичном по амплитуде волны приближении найде-

но корректное выражение для профиля нелинейной периодической волны на поверхности глубокой жидкости конечной вязкости.

В настоящей работе по аналогии с [17,18] предлагается строгое асимптотическое решение задачи определения профиля нелинейной периодической волны, распространяющейся по заряженной поверхности глубокой жидкости произвольной вязкости, которое до настоящего времени не было известно в научной литературе и которое представляет значительный интерес для многообразных приложений феномена электродиспергирования жидкости [19].

Математическая формулировка задачи

Примем, что несжимаемая ньютоновская жидкость с кинематической вязкостью ν , плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения γ в декартовой системе координат с осью Oz , направленной вертикально вверх в поле сил тяжести $\mathbf{g} \parallel -\mathbf{e}_z$, заполняет полупространство $z \leq 0$ и граничит с вакуумом. Жидкость считается идеальным проводником, несущим однородно распределенный поверхностный заряд, такой что электрическое поле над искаженной волновым движением поверхностью жидкости в пределе $z \rightarrow \infty$ стремится к однородному с напряженностью $E_0 \mathbf{e}_z$. Будем исследовать временную эволюцию начальной деформации свободной поверхности жидкости.

Пусть $u = u(x, z, t)$ и $v = v(x, z, t)$ — горизонтальная и вертикальная компоненты поля скоростей волнового движения в жидкости, которые для простоты считаются независимыми от координаты y ; \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_z — орты осей Ox и Oz . Тогда отклонение свободной поверхности жидкости $\xi = \xi(x, t)$ от равновесной в поле сил тяжести формы $z = 0$, поле скоростей $\mathbf{U} = u \cdot \mathbf{e}_x + v \cdot \mathbf{e}_z$ и электрический потенциал Φ над жидкостью удовлетворяют соотношениям

$$z > \xi : \quad \Delta \Phi = 0; \quad (1)$$

$$z < \xi: \quad \partial_t \mathbf{U} + \text{rot}(\mathbf{U}) \times \mathbf{U} = -\text{grad} \left(\frac{1}{\rho} p + \frac{U^2}{2} + gz \right) + \nu \Delta \mathbf{U}; \quad (2)$$

$$\text{div} \mathbf{U} = 0; \quad (3)$$

$$z = \xi: \quad \partial_t \xi + u \partial_x \xi = v; \quad (4)$$

$$p - 2\rho \nu \mathbf{n}((\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U}) + \frac{1}{8\pi} (\nabla \Phi)^2 = \gamma \text{div}(\mathbf{n}); \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\tau}((\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U}) + \mathbf{n}((\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{U}) = 0; \quad (6)$$

$$\Phi = 0; \quad (7)$$

$$z \rightarrow +\infty: \quad -\nabla \Phi \rightarrow E_0 \mathbf{e}_z; \quad (8)$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad \mathbf{U} \rightarrow 0. \quad (9)$$

Здесь t — время; p — давление внутри жидкости; ∂_t и ∂_x — частные производные по времени и координате; $\boldsymbol{\tau}$ и \mathbf{n} — орты касательной и нормали к поверхности, явный вид которых вместе с выражением для дивергенции нормали $\text{div}(\mathbf{n})$ приведены в Приложении А.

Для замыкания математической формулировки задачи выписанные соотношения должны быть дополнены начальными условиями, задающими начальное отклонение поверхности и начальное распределение поля скоростей. Как и в [18], вид начальных условий будем определять в процессе решения таким образом, чтобы прийти к наиболее простому в смысле аналитического описания формам колебаний свободной поверхности и выявить свойства волны, связанные с ее нелинейностью.

Принцип решения задачи

Пусть начальное возмущение $\xi(x, t)$ периодически по x и образует волнообразный рельеф с длиной волны $\lambda = 2\pi/k$ (k — волновое число) и амплитудой a . В качестве малого параметра примем $\varepsilon = ka$.

В квадратичном по ε приближении решение задачи (1)–(9) ищется в виде разложений

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 + O(\varepsilon^3); \quad \mathbf{U}_1 \sim O(\varepsilon); \quad \mathbf{U}_2 \sim O(\varepsilon^2);$$

$$p = p_0 + p_1 + p_2 + O(\varepsilon^3);$$

$$p_0 \sim O(1); \quad p_1 \sim O(\varepsilon); \quad p_2 \sim O(\varepsilon^2);$$

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + O(\varepsilon^3);$$

$$\Phi_0 \sim O(1); \quad \Phi_1 \sim O(\varepsilon); \quad \Phi_2 \sim O(\varepsilon^2);$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + O(\varepsilon^3); \quad \xi_1 \sim O(\varepsilon); \quad \xi_2 \sim O(\varepsilon^2). \quad (10)$$

Подстановка (10) в (1)–(3) приводит к задачам нулевого, первого и второго порядков малости. В Приложении В выписаны соотношения, которые получаются после разделения граничных условий на свободной поверхности (4)–(7) на соотношения для величин различных порядков малости. Подробный вывод этих соотношений можно найти в [18].

В нулевом по ε приближении задача сводится к определению распределения гидростатического давления в жидкости

$$u_0 = 0; \quad v_0 = 0; \quad p_0 = -\frac{E_0^2}{8\pi} - \rho g z; \quad \Phi_0 = -E_0 z.$$

Как и в [18], в нижеследующем изложении будут использоваться специальные обозначения для линейных дифференциальных операторов

$\mathcal{L} \equiv$

$$\begin{bmatrix} \partial_t - \nu(\partial_{xx} + \partial_{zz}) & 0 & (1/\rho)\partial_x & 0 \\ 0 & \partial_t - \nu(\partial_{xx} + \partial_{zz}) & (1/\rho)\partial_z & 0 \\ \partial_x & \partial_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_{xx} + \partial_{zz} \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{R} \equiv \begin{bmatrix} \partial_t \\ -\rho g + \gamma \partial_{xx} \\ 0 \\ -E_0 \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{B} \equiv \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\rho \nu \partial_z & 1 & -E_0/(4\pi)\partial_z \\ \partial_z & \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{z=0}$$

и матриц-столбцов с обозначениями для составляющих элементов

$$\hat{\mathbf{U}} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \hat{Y}_j \equiv \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \\ p_j \\ \Phi_j \end{bmatrix}; \quad \begin{array}{l} Y_j[1] \equiv u_j; \\ Y_j[2] \equiv v_j; \\ Y_j[3] \equiv p_j \\ Y_j[3] \equiv p_j. \end{array}$$

Оператор \mathcal{B} действует на объекты типа Y_j по следующему правилу: выполняются матричные операции, затем все операции дифференцирования и арифметические действия, после чего полагается $z = 0$. Результат действия оператора \mathcal{B} на столбец четырех функций, зависящих от переменных x , z и t — столбец четырех функций, не зависящих от z .

Перечисленные специальные обозначения введены для того, чтобы, оставаясь в рамках объема журнальной статьи, сохранить ясность изложения ключевых этапов решения задачи.

В первом приближении получается линейная однородная дифференциальная задача, а для второго приближения — та же линейная дифференциальная задача, но с неоднородностью, вид которой определяется через решения, найденные в нулевом и первом приближениях.

Задача первого порядка малости

Для величин первого по ε порядка малости полная математическая формулировка задачи в принятых обозначениях имеет вид:

$$\mathcal{L}\hat{Y}_1 = \hat{\mathbf{0}}; \quad (11)$$

$$\mathcal{B}\hat{Y}_1 + \mathcal{R}\hat{\xi}_1 = \hat{\mathbf{0}}; \quad (12)$$

$$z \rightarrow +\infty : \quad \Phi_1 \equiv Y_1[4] \rightarrow 0; \quad (13)$$

$$z \rightarrow -\infty : \quad u_1 \equiv Y_1[1] \rightarrow 0; \quad v_1 \equiv Y_1[2] \rightarrow 0; \quad (14)$$

$$t = 0 : \quad \xi_1 = a \cos(kx);$$

$$z \leq 0 : \quad Y_1[1]_{t=0} = u_1^0; \quad Y_1[2]_{t=0} = v_1^0. \quad (15)$$

Для простоты в качестве начальной деформации в первом приближении выбрана косинусоида. Выбор функций $u_1^0 \equiv u_1^0(x, z)$ и $v_1^0 \equiv v_1^0(x, z)$ для описания начального распределения скоростей будет выполнен ниже. Отметим, что начальные условия необходимо формулировать только для первых двух элементов \hat{Y}_1 , а не для всего этого символического столбца неизвестных величин. Начальные условия на p_1 и Φ_1 не нужны. Для p_1 этот факт объясняется следующим образом. Линеаризованное уравнение Навье–Стокса (первое уравнение системы (11)) можно записать в виде

$$\partial_t \mathbf{U}_1 = -\text{grad} \left(\frac{1}{\rho} p_1 \right) + \nu \Delta \mathbf{U}_1.$$

Если к обеим частям этого уравнения применить операцию div и учесть, что жидкость несжимаема (т.е. $\text{div} \mathbf{U}_1 = 0$), а также то обстоятельство, что повторные частные производные перестановочны, то несложно для p_1 получить уравнение Лапласа

$$\Delta p_1 = 0.$$

Линеаризованное граничное условие на нормальные натяжения вместе с условием исчезновения на большой глубине градиента от добавки первого порядка малости к давлению имеют вид

$$z = 0 : \quad p_1 = 2\rho\nu\partial_z v_1 + \partial_{xx}\xi_1; \quad z \rightarrow -\infty : \quad |\nabla p_1| \rightarrow 0.$$

Видно, что если известно поле скоростей на поверхности и в объеме жидкости, а также дано выражение для ξ_1 , то p_1 удовлетворяет задаче Дирихле в неограниченной области, решение которой существует и единственно. На Φ_1 начальное условие не накладывается по аналогичной причине. Сказанное можно объяснить качественно следующим образом: в используемой модели несжимаемой идеально проводящей жидкости любое изменение в значениях поля скоростей и отклонения поверхности ξ_1 мгновенно отражается на виде скалярных полей p_1 и Φ_1 .

Решение задачи первого порядка малости, описываемое соотношениями, которые отличаются от аналогичных, построенных в [18], лишь дисперсионным уравнением, в котором появляется слагаемое, пропорциональное квадрату напряженности электростатического поля E_0^2 , легко найти классическими методами [20]

$$\xi_1^* = a \cos(\theta) \exp(T); \quad (16)$$

$$u_1^* = a \left((S_2 \exp(kz) - 2vk(q_2 \cos(q_2 z) + q_1 \sin(q_2 z)) \times \exp(q_1 z)) \cos(\theta) + (D \exp(kz) - 2vk(q_1 \cos(q_2 z) - q_2 \sin(q_2 z)) \exp(q_1 z)) \sin(\theta) \right) \exp(T); \quad (17)$$

$$v_1^* = a \left((D \exp(kz) - 2vk^2 \cos(q_2 z) \exp(q_1 z)) \cos(\theta) - (S_2 \exp(kz) - 2vk^2 \sin(q_2 z) \exp(q_1 z)) \sin(\theta) \right) \times \exp(T); \quad (18)$$

$$p_1^* = a\rho k^{-1} \left((-S_1 D + S_2^2) \cos(\theta) + 2S_2(S_1 + vk^2) \sin(\theta) \right) \exp(kz) \exp(T); \quad (19)$$

$$\Phi_1^* = aE_0 \cos(\theta) \exp(T); \quad (20)$$

$$v^2(k^2 + q^2)^2 - 4v^2k^3q + k \left(g + \frac{k^2\gamma}{\rho} - \frac{k}{\rho} \frac{E_0^2}{4\pi} \right) = 0; \quad (21)$$

$$q_1 = \text{Re } q \geq 0; \quad q_2 = \text{Im } (q) \geq 0; \quad (22)$$

$$S = v(q^2 - k^2); \quad S_1 = \text{Re } S; \quad S_2 = \text{Im } S. \quad (23)$$

$$\theta = S_2 t - kx; \quad T = S_1 t; \quad D = S_1 + 2vk^2. \quad (24)$$

В этих соотношениях q вычисляется как корень дисперсионного уравнения (21), удовлетворяющий условиям (22), которые, как и в [18], являются условиями отбора значения корня, который соответствует волновому движению со скоростью стремящейся к нулю при $z \rightarrow -\infty$ (см. условие (14)) и которому соответствует прогрессивная волна, распространяющаяся вправо. Условия (22) обеспечивают единственность процедуры вычисления комплексной частоты S .

С помощью решения (16)–(20) подстановка:

$$\xi = \xi_1^* + \xi_1^{**}; \quad Y_1 = Y_1^* + Y_1^{**}$$

сводит (11)–(15) к задаче с изначально невозмущенной поверхностью

$$\mathcal{L}\hat{Y}_1^{**} = \hat{0}; \quad \mathcal{B}\hat{Y}_1^{**} + \mathcal{R}\xi_1^{**} = \hat{0};$$

$$z \rightarrow +\infty : \quad \Phi_1^{**} \equiv Y_1[4] \rightarrow 0;$$

$$z \rightarrow -\infty : \quad u_1^{**} \equiv Y_1[1] \rightarrow 0; \quad v_1^{**} \equiv Y_1[2] \rightarrow 0;$$

$$t = 0 : \quad \xi_1^{**} = 0; \quad z \leq 0 : \quad Y_1^{**}[1]_{t=0} = u_1^0 - Y_1^*[1]_{t=0}; \quad Y_1^{**}[2]_{t=0} = v_1^0 - Y_1^*[2]_{t=0}. \quad (25)$$

Форма свободной поверхности представляется в виде суперпозиции функции ξ_1^* , совпадающей при $t = 0$ с начальным искажением поверхности, и функции ξ_1^{**} , совпадающей в начальный момент времени с равновесной поверхностью ($\xi_1^{**} = 0$ при $t = 0$). Чтобы получить наименее громоздкое решение, примем, что в задаче (25) в начальный момент времени скорость всех точек жидкости

$$z \leq 0 : \quad u_1^0 - Y_1^*[1]_{t=0} = 0; \quad v_1^0 - Y_1^*[2]_{t=0} = 0. \quad (26)$$

Отсюда следует, что решение задачи (25) нулевое, а (16)–(24) представляют решение задачи первого порядка малости с начальным условием (26).

Задача второго порядка малости

В результате выделения из (1)–(9) соотношений на величины различных порядков (см. Приложение В) с последующей подстановкой в полученные выражения, зависящие от величин первого порядка малости, решения, найденного в первом приближении, задача второго порядка малости с неопределенными пока начальными условиями может быть сформулирована в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\hat{Y}_2 = a^2 \operatorname{Re} \left(\left(\begin{bmatrix} \hat{A}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp(2q_1 z) + \begin{bmatrix} \hat{A}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \exp(2kz) \right. \right. \\ \left. \left. + \begin{bmatrix} \hat{A}_3 \\ 0 \end{bmatrix} \exp((k+q)z) \right) \exp(2T) \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} \hat{A}_4 \\ 0 \end{bmatrix} \exp((k+q)z) \exp(2(T+i\theta)) \right); \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}\hat{Y}_2 + \mathcal{R}\xi_2 = a^2 \operatorname{Re} \left(\begin{bmatrix} \hat{A}_5 \\ \frac{1}{2} k E_0 \end{bmatrix} \exp(2T) \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} \hat{A}_6 \\ \frac{1}{2} k E_0 \end{bmatrix} \exp(2(T+i\theta)) \right); \quad (28) \end{aligned}$$

$$z \rightarrow +\infty: \quad \Phi_2 \equiv Y_2[4] \rightarrow 0; \quad (29)$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad u_2 \equiv Y_2[1] \rightarrow 0; \quad v_2 \equiv Y_2[2] \rightarrow 0; \quad (30)$$

где \hat{A}_1 – \hat{A}_6 — трехэлементные столбцы с комплексными коэффициентами, не зависящими от координат и времени.

Выражения для них приведены в Приложении С.

Ввиду линейности сформулированной задачи можно найти ее комплексное решение, а затем, взяв от него действительную часть, получить физически реализующееся решение. Следуя порядку решения, подробно описанному в [18], для систем неоднородных уравнений

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\hat{y}_a = a^2 \left(\begin{bmatrix} \hat{A}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp(2q_1 z) + \begin{bmatrix} \hat{A}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \exp(2kz) \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} \hat{A}_3 \\ 0 \end{bmatrix} \exp((k+q)z) \right) \exp(2T); \quad (31) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\hat{y}_b = a^2 \begin{bmatrix} \hat{A}_4 \\ 0 \end{bmatrix} \exp((k+q)z) \exp(2(T+i\theta)), \quad (32)$$

сформулированных относительно неизвестных, из которых составлены столбцы \hat{y}_a , \hat{y}_b , определяются частные решения в виде

$$\begin{aligned} \hat{y}_a = a^2 \left(\begin{bmatrix} \hat{C}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp(2q_1 z) + \begin{bmatrix} \hat{C}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \exp(2kz) \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} \hat{C}_3 \\ 0 \end{bmatrix} \exp((k+q)z) \right) \exp(2T); \quad (33) \end{aligned}$$

$$\hat{y}_b = a^2 \begin{bmatrix} \hat{C}_4 \\ 0 \end{bmatrix} \exp((k+q)z) \exp(2(T+i\theta)), \quad (34)$$

где \hat{C}_1 , \hat{C}_2 , \hat{C}_3 , \hat{C}_4 — трехэлементные столбцы с коэффициентами, подлежащими определению.

Непосредственная подстановка (33) и (34) в уравнения (31) и (32) приводит к системе линейных неоднородных уравнений относительно коэффициентов столбцов \hat{C}_i , для которых получаются формулы

$$\begin{aligned} C_1 = \hat{\Pi}_1^{-1} \hat{A}_1; \quad C_2 = \hat{\Pi}_2^{-1} \hat{A}_2; \\ C_3 = \hat{\Pi}_3^{-1} \hat{A}_3; \quad C_4 = \hat{\Pi}_4^{-1} \hat{A}_4. \quad (35) \end{aligned}$$

Здесь $\hat{\Pi}_1$, $\hat{\Pi}_2$, $\hat{\Pi}_3$, $\hat{\Pi}_4$ — квадратные матрицы с коэффициентами, не зависящими от координат и времени, приведенными в Приложении С.

Затем стандартными методами, как это сделано в [18], ищется решение однородной задачи

$$\mathcal{L}(\hat{y}_c) = 0, \quad (36)$$

которое можно записать в виде

$$\begin{aligned} \hat{y}_c = a^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f(t) \\ \mathcal{F}(t) \end{bmatrix} \exp(2T) + a^2 \left(2 \begin{bmatrix} -ik \\ k \\ -\rho S \\ 0 \end{bmatrix} \lambda \exp(2kz) \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} -r \\ -2ik \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} H \exp(z \sqrt{2(k^2 + q^2)}) \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} R \exp(-2kz) \right) \exp(2(T+i\theta)). \quad (37) \end{aligned}$$

Выражение (37) является решением однородной задачи независимо от выбора в общем случае комплексных постоянных λ , H , R и функций $f(t)$ и $\mathcal{F}(t)$.

Значения H , λ , R и ξ подбираются так, чтоб величины

$$\xi_* = \xi \exp(2(T+i\theta)); \quad \hat{y}_{bc} = \hat{y}_b + \hat{y}_c, \quad (38)$$

удовлетворяли соотношениям

$$\mathcal{L}\hat{y}_{bc} + \mathcal{R}\xi_* = a^2 \begin{bmatrix} \hat{A}_6 \\ \frac{1}{2} k E_0 \end{bmatrix} \exp(2(T+i\theta)). \quad (39)$$

После подстановки (39) в (38) оказывается, что такие значения λ , R и ξ находятся как решения линейной неоднородной системы алгебраических уравнений и имеют вид

$$\begin{bmatrix} H \\ \lambda \\ \xi \\ R \end{bmatrix} = \hat{L}^{-1} \left(\begin{bmatrix} C_4[2] \\ 2C_4[2]\rho v(k+q) - C_4[3] \\ 2iC_4[2]k - C_4[1](k+q) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{A}_6 \\ \frac{1}{2} k E_0 \end{bmatrix} \right). \quad (40)$$

Вид квадратной матрицы \hat{L} приведен в Приложении С.

Благодаря тому, что столбцы \hat{y}_a , $\hat{y}_{bc} = \hat{y}_b + \hat{y}_c$ тождественно удовлетворяют соотношениям (31), (32), (39), подстановка

$$\hat{Y}_2 = \hat{y}_a + \hat{y}_*; \quad \hat{y}_* = \hat{y}_a + \hat{y}_b + \hat{y}_c; \quad \xi = \xi_* \quad (41)$$

в (27)–(30) приводит к задаче

$$\mathcal{L}\hat{y}_\alpha = 0; \quad (42)$$

$$\mathcal{B}\hat{y}_\alpha = a^2 \left[\begin{array}{c} \hat{A}_5 \\ \frac{1}{2} k E_0 \end{array} - \left[\begin{array}{c} 0 \\ f(t) + C_1[3] + C_2[3] + C_3[3] \\ 2C_1[1]q_1 + C_3[1](k+q) \\ \mathcal{F}(t) \end{array} \right] \right] \times \exp(2T); \quad (43)$$

$$z \rightarrow +\infty: \Phi_\alpha \equiv y_\alpha[4] \rightarrow 0; \quad (44)$$

$$z \rightarrow -\infty: u_\alpha \equiv y_\alpha[1] \rightarrow 0; \quad v_\alpha \equiv y_\alpha[2] \rightarrow 0. \quad (45)$$

Видно, что если положить

$$f(t) = \hat{A}_5[2] - C_1[3] - C_2[3] - C_3[3];$$

$$\mathcal{F}(t) = \frac{1}{2} k E_0 \exp(-2T), \quad (46)$$

то соотношения (43) упростятся

$$\mathcal{B}\hat{y}_\alpha = a^2 \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ A_5[3] - \Lambda \\ 0 \end{array} \right];$$

$$\Lambda = 2C_1[1]q_1 + C_3[1](k+q). \quad (43a)$$

Теперь несложно найти решение задачи (43)–(45) (подробнее см. [18])

$$\hat{y}_\alpha = a^2 \left[\begin{array}{c} A_5[3] - \Lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \sqrt{\frac{\nu}{\pi}}$$

$$\times \int_0^t \exp\left(-\frac{z^2}{4\nu(t-\tau)}\right) \exp(2S_1\tau) d\tau, \quad (47)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$t = 0: \hat{y}_\alpha = \hat{0}.$$

Легко проверить, что подстановка

$$\hat{Y}_2 = \hat{y}^* + \hat{y}_{**}, \quad (48)$$

где

$$\hat{y}_{**} = \hat{y}_\alpha + \hat{y}_a + \hat{y}_b + \hat{y}_c; \quad \xi_2 = \xi^* + \xi \exp(2(T+i\theta)), \quad (49)$$

\hat{y}_α вычисляется из (47); \hat{y}_a, \hat{y}_b находятся по формулам (33)–(35); \hat{y}_c и ξ вычисляются через (37), (40), (46), сводит задачу второго порядка малости (27)–(30) к однородной, аналогичной той, что получается в первом приближении,

$$\mathcal{L}\hat{y}^* = \hat{0};$$

$$\mathcal{B}\hat{y}^* + \mathcal{R}\xi_2 = \hat{0};$$

$$z \rightarrow +\infty: \Phi_2^* \equiv y^*[4] \rightarrow 0;$$

$$z \rightarrow -\infty: u_2^* \equiv y^*[1] \rightarrow 0; \quad v_2^* \equiv y^*[2] \rightarrow 0;$$

$$t = 0: \xi^* = \xi_2 - \xi \exp(2ikx);$$

$$z \leq 0: y^*[1]_{t=0} = u_2^0 - y_{**}[1]_{t=0};$$

$$y^*[2]_{t=0} = u_2^0 - y_{**}[2]_{t=0}.$$

Переходя к физически реализуемому решению и принимая во внимание, что \hat{y}_α построен так, что в начальный момент времени все его элементы равны нулю, можно утверждать, что действительные части величин, составляющих столбец \hat{y}_{**} , определенный в (49), являются решением задачи второго порядка малости, если в качестве начальных условий на величины этого порядка взять

$$t = 0: \xi_2 = \text{Re} [\xi \exp(2ikx)];$$

$$u_2^0 = \text{Re} (y_a[1] + y_b[1] + y_c[1])_{t=0};$$

$$v_2^0 = \text{Re} (y_a[2] + y_b[2] + y_c[2])_{t=0}.$$

Значимость найденного решения \hat{y}_{**} , не уменьшается от того, что оно удовлетворяет конкретным начальным условиям. Гораздо важнее то, что \hat{y}_{**} — ключевое звено подстановки (48), сводящей неоднородную задачу второго порядка малости к однородной. Сам факт однородности новой задачи не зависит от вида функций, задающих исходные начальные условия на величины второго порядка малости. Поэтому произвольность формулировки начальных условий на эти величины сказывается лишь на начальных условиях однородной задачи, к которой подстановкой (48) редуцируется исходная неоднородная. Однородная же задача является предметом исследования хорошо разработанной линейной теории волн.

Профиль нелинейной волны

Если к решению задачи второго порядка малости $\text{Re}(\hat{y}_{**})$ прибавить $\text{Re}(\hat{y}^*)$, то полученное выражение снова будет решением задачи второго порядка малости. Но однородная задача определения \hat{y}^* совпадает с задачей первого порядка малости (11)–(14). Поэтому при добавлении к $\text{Re}(\hat{y}_{**})$ любого решения вида (16)–(24) с другими значениями волнового числа и амплитуды (их произведение должно быть величиной более высокого порядка, чем ε) снова получится решение задачи второго порядка малости. С учетом возможности добавок подобного рода форма волны, бегущей по заряженной свободной поверхности вязкой глубокой жидкости, может быть описана выражением

$$\xi = \{ a \cos(\theta) \exp(S_1 t) + a^2 A \cos(2\theta + \beta) \exp(2S_1 t) \} + \text{ЛБР};$$

$$\xi_1 = \text{Re}(\xi); \quad \xi_2 = \text{Im}(\xi); \quad A = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2};$$

$$\beta = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right), & \text{если } \xi_1 > 0 \text{ и } \xi_2 < 0; \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right) + 2\pi, & \text{если } \xi_1 > 0 \text{ и } \xi_2 < 0; \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right) + \pi, & \text{если } \xi_1 < 0; \\ \pi/2, & \text{если } \xi_1 = 0 \text{ и } \xi_2 < 0; \\ 3\pi/2, & \text{если } \xi_1 = 0 \text{ и } \xi_2 > 0. \end{cases} \quad (50)$$

Здесь $\operatorname{arctg}(x)$ — ветвь функции арктангенс, отображающая числовую ось в сегмент $(-\pi/2, \pi/2)$. Выражение для фазы β построено так, чтобы ее значение лежало в пределах $0 \leq \beta < 2\pi$. Символом ξ обозначена комплексная величина, которая вместе с λ , H , R находится по формуле (40).

Для добавок, о которых шла речь в предыдущем абзаце, введено обозначение ЛВР — линейные волновые решения (такие же, как в линейной теории). Это может быть любая суперпозиция косинусоидальных бегущих волн $\eta \cos(\Sigma_2 t - kx + \varphi) \exp(\Sigma_1 t)$ с такими амплитудой η и волновым числом $k \neq k$, что $k \cdot \eta = o(ka)$ (o — символ малости). Комплексная частота $\Sigma = \Sigma_1 + i\Sigma_2$ и волновое число k этих волн связаны тем же дисперсионным уравнением (21), что и величины S и k , через которые выражаются переменные $\theta = S_2 t - kx$ и $T = S_1 T$. Как решения линейной однородной задачи ЛВР распространяются, не взаимодействуя друг с другом, каждая волна со своей фазовой скоростью.

Слагаемые в фигурных скобках в выражении (49) представляют собой взаимодействующие волновые решения. Коэффициенты A и β сложным образом зависят от волнового числа k , которое отвечает волне $a \cos(\theta)$, распространяющейся по свободной поверхности в первом приближении. Таким образом, амплитуда и фаза второй волновой добавки в фигурных скобках (49) зависят от свойств первой волновой добавки. Обе волновые составляющие в фигурных скобках имеют одинаковую фазовую скорость. Поэтому то, что получается в сумме, является самостоятельной периодической волной, имеющей ту же фазовую скорость. За длину этой волны естественно взять пространственный период по x , общий для обоих слагаемых, — величину $\lambda = 2\pi/k$. Очевидно, k можно считать волновым числом, которое отвечает этой новой волне. В отличие от волновых решений, получаемых при решении задачи в линейном приближении, форма новой волны существенно зависит от ее волнового числа k , как видно из (50), изменяется с течением времени (в случае, когда $S_1 \neq 0$). Изменения в форме имеют второй порядок малости.

В итоге найдено решение задачи определения профиля нелинейной волны, состоящее из двух слагаемых: собственно нелинейная волна, с формой, зависящей от ее длины, и фон ЛВР, который распространяется по законам линейной теории волн. Ясно, что для исследования нелинейных проявлений моделируемого явления в (50) необязательно учитывать шум ЛВР.

В пределе идеальной жидкости, когда $\nu \rightarrow 0$, значения β стремятся либо к нулю, либо к π . Замечая,

что вместо $\beta = \pi$ можно положить $\beta = 0$ с изменением знака при A , для профиля волны в этом приближении можно записать содержательное для исследования выражение

$$\xi = a \cos(\theta) + a^2 k \Lambda \cos(2\theta); \quad \Lambda = \frac{1}{4} \frac{(1 + \alpha^2 k^2 - 2\alpha k W)}{0.5 - \alpha^2 k^2};$$

$$W \equiv \frac{E_0^2}{4\pi\sqrt{\rho g \gamma}}; \quad \alpha \equiv \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}. \quad (51)$$

Здесь α — капиллярная постоянная; W — безразмерный параметр Тонкса–Френкеля, который характеризует устойчивость заряженной поверхности жидкости по отношению к собственному заряду. Из линейной теории хорошо известно, что условие

$$W > \alpha k + \frac{1}{\alpha k} \quad (52)$$

обеспечивает при заданном αk положительность параметра $S_1 \equiv \operatorname{Re} S$, входящего в (50). В этом случае имеет место неустойчивость заряженной свободной поверхности жидкости [20], причем S_1 имеет смысл инкремента нарастания амплитуды линейного по a слагаемого в фигурных скобках (50), а $2S_1$ — инкремента нелинейного слагаемого. Если значение W недостаточно велико для выполнения условия (52), то $S_1 < 0$. Тогда S_1 характеризует декремент экспоненциального затухания линейного по a слагаемого в фигурных скобках (50), а $2S_1$ — декремент нелинейного слагаемого.

При $W = 0$ выражение (50) совпадает с профилем волны, построенным в [9]. Если в дополнение к этому положить $\gamma = 0$, то получится известное квадратичное по амплитуде приближение волны Стокса. Нелинейный профиль волны на поверхности идеальной жидкости, называемый волной Стокса, построен более века назад. Тем не менее (50) — первое корректное обобщение этого понятия на случай жидкости с конечной вязкостью, конечным поверхностным натяжением и заряженной свободной поверхностью в квадратичном по амплитуде приближении. Таким образом, уже само выражение (50) является новым для теории волн на поверхности глубокой жидкости результатом, решением классической задачи гидродинамики, которое более века оставалось неизвестным.

Из (51) следует, что в идеальной жидкости при $k = k_* = (\alpha\sqrt{2})^{-1}$ знаменатель амплитуды поправки второго порядка малости к профилю волны обращается в нуль, а сама добавка при конечных значениях числителя Λ стремится к бесконечности. Обсуждение этого факта, связанного с нелинейным резонансным взаимодействием волн, частично уже проводилось в [18]. В вязкой жидкости, как и следовало ожидать, амплитуда волн в бесконечность не обращается, а остается конечной [18].

Влияние электрического заряда на профили нелинейных волн

При надкритическом значении поверхностной плотности заряда электрические силы преобладают над лапласовскими и на заряженной поверхности появляются выступы (конусы Тейлора), с вершин которых начинается сброс заряда путем эмиссии сильно заряженных капелек [19,21].

Условие (52) выделяет на плоскости безразмерных параметров $(\alpha k, W)$ область неустойчивых волновых чисел (область над кривой L на рис. 1). Величина $W_* = 2$, соответствующая на кривой L значению $\alpha k = 1$, является наименьшим значением W , лежащим на границе устойчивости. При $W = W_*$ становится неустойчивой волна $\xi = a \cos(S_2 t - kx) \exp(T)$ со значением волнового числа $k = \alpha^{-1}$. Эту волну называют основной модой. Чем больше W , тем более широкий спектр синусоидальных волновых решений линейаризованой задачи становится неустойчивым. С ростом W спектр неустойчивых волн расширяется как в сторону малых, так и в сторону больших волновых чисел. В рамках представлений линейной теории все неустойчивые волны участвуют в формировании эмиссионных выступов. Это означает, что в рамках линейной теории с ростом W основания эмиссионных выступов должны расширяться. Сравнение же результатов наблюдений экспериментальных работ [21,22], где зафиксировано образование эмиссионных выступов при существенно различных значениях напряженности поля (при различных W), этого вывода не подтверждает. Ясно, что механизм включения длинных волн в процесс образования эмиссионных выступов в реальности имеет определенные ограничения, которые нельзя сформулировать в рамках линейной теории.

Нелинейное решение (50) позволяет взглянуть на образование эмиссионных выступов с иной точки зрения. Главная идеализация, используемая линейной теорией, состоит в предположении о справедливости принципа суперпозиции. На самом деле эмиссионный выступ формируется не просто за счет сложения волновых решений линейной задачи, но и за счет роста амплитуды нелинейных волн типа той, описываемых выражениями типа первого слагаемого (50). При этом форма профиля волны изменяется за счет преимущественного увеличения амплитуды второго слагаемого в фигурных скобках (50). Несложно видеть, что при $S_1 > 0$ амплитуда нелинейного по амплитуде a слагаемого растет во времени с вдвое большим инкрементом, чем амплитуда линейного по амплитуде слагаемого. За короткое время определяющим в формировании эмиссионного выступа становится не решение линейной задачи, а добавка к нему, отвечающая нелинейному характеру волны.

Построенное решение (50) можно рассматривать как модельное, в котором в начальный момент времени профиль волны описывается в первом приближении только одной гармоникой, разрешающей линейную задачу. В общем случае, когда начальный профиль представ-

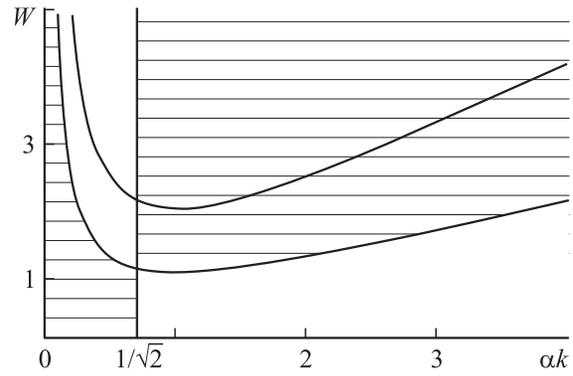


Рис. 1. Области реализации различных режимов нелинейного волнового движения. Область над кривой L — неустойчивые решения. В заштрихованных областях, ограниченных кривой Γ и прямой $\alpha k = 1/\sqrt{2}$, волны имеют заостренные вершины. В незаштрихованных областях волны имеют притупленные вершины.

ляется суперпозицией ряда таких гармоник, решение существенно усложнится и вместо второго слагаемого в фигурных скобках формулы (50) получится сумма всевозможных волн, порождаемых трехмодовым волновым взаимодействием [23]. Их инкременты определяются парными произведениями инкрементов изначальных волн. Поэтому скорость роста у них будет больше, чем у волн первого приближения, и формирование эмиссионных выступов определяют волны, порожденные нелинейным взаимодействием.

Другое интересное свойство волны с профилем, описанным выражением в фигурных скобках (50), проявляется, если на той же плоскости безразмерных параметров $(\alpha k, W)$, на которой построена граница устойчивости решений линейной задачи, изобразить еще одну кривую Γ , определяемую уравнением

$$\frac{1}{2} \left(\alpha k + \frac{1}{\alpha k} \right) - W = 0. \tag{53}$$

Из (51) следует, что на этой кривой обращается в нуль амплитуда второго порядка малости $\Lambda = 0$, и с точностью до величин третьего порядка малости профиль периодической волны при $(k, W) \in \Gamma$ в пределе идеальной жидкости оказывается синусоидальным без каких-либо добавок. Расчеты по формуле (50) показывают, что в случае вязкой жидкости на этой кривой достигается локальный минимум величины A (в котором A близко к нулю) как функции параметров $(\alpha k, W)$.

Следующий момент, на который интересно обратить внимание, определяется ролью фазы β , входящей в (50). Из (50) и (51) следует, что значению фазы, близкому к $\beta = 0$, при $A \neq 0$ отвечает волна, которая благодаря синфазности между $a \cos(\theta)$ и коротковолновой нелинейной добавкой $A \cos(2\theta + \beta)$ имеет большую по сравнению с волной первого приближения кривизну вершины (вершина волны в нелинейном приближении

заостряется). При $\beta = \pi$ и $A \neq 0$ вершина, наоборот, округляется.

Анализируя выражение для амплитуды нелинейной добавки Λ , несложно видеть, что $\Lambda > 0$, если

$$\begin{cases} k^2 < 0.5; \\ W < 0.5(\alpha k + (\alpha k)^{-1}); \end{cases}$$

либо $\begin{cases} k^2 > 0.5; \\ W > 0.5(\alpha k + (\alpha k)^{-1}); \end{cases}$

$\Lambda < 0$, если

$$\begin{cases} k^2 < 0.5; \\ W > 0.5(\alpha k + (\alpha k)^{-1}); \end{cases}$$

либо $\begin{cases} k^2 > 0.5; \\ W < 0.5(\alpha k + (\alpha k)^{-1}). \end{cases}$

Это означает, что плоскость изменения параметров (k, W) пересечением линии Γ и прямой $\alpha k = 1/\sqrt{2}$ делится на четыре области, ограниченные углами, каждый из которых имеет прямолинейную и криволинейную стороны (рис. 1). В пределе $\nu \rightarrow 0$ противоположные пары углов ограничивают области с одним и тем же значением фазы β . В заштрихованных областях фаза $\beta = 0$, а нелинейные волны имеют заостренные вершины (рис. 2, *a* и *c*). Другой паре областей соответствует фаза $\beta = \pi$, а вершины нелинейных волн сглажены (рис. 2, *b*, *d*).

В пределе $\nu \rightarrow 0$ фаза β на сторонах углов изменяется скачком. Если учитывать вязкость, стороны углов на плоскости $(\alpha k, W)$ „расплываются“ в полосы, в которых фаза β плавно изменяет свое значение.

Из рис. 1 видно, что область неустойчивости решений линеаризованной задачи (область над линией L) прямой $\alpha k = 1/\sqrt{2}$ делится на две части. Развитие неустойчивости волны типа (50) происходит с формированием заострения на вершине, если $\alpha k > 1/\sqrt{2}$ (рис. 2, *c*), и с уплощением вершины при $\alpha k < 1/\sqrt{2}$ (рис. 2, *d*). Электрическое поле отрывает с вершин выступов капельки с характерным линейным размером порядка радиуса кривизны вершины [18,21]. Поэтому эмиссия капелек с заостренной вершины, связанная с отрывом более мелких и более сильно заряженных, более вероятна по сравнению с отрывом капелек с уплощенной вершины. После начала эмиссии временная эволюция волн начинает подчиняться новым закономерностям, которые необходимо исследовать отдельно. Таким образом, анализ нелинейного решения задачи приводит к естественному ограничению со стороны длинных волн на длины волн, участвующих в формировании эмиссионных выступов.

Влияние вязкости и нелинейности на критические условия реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости в использованном квадратичном приближении не проявляется. Оно проявится в расчетах

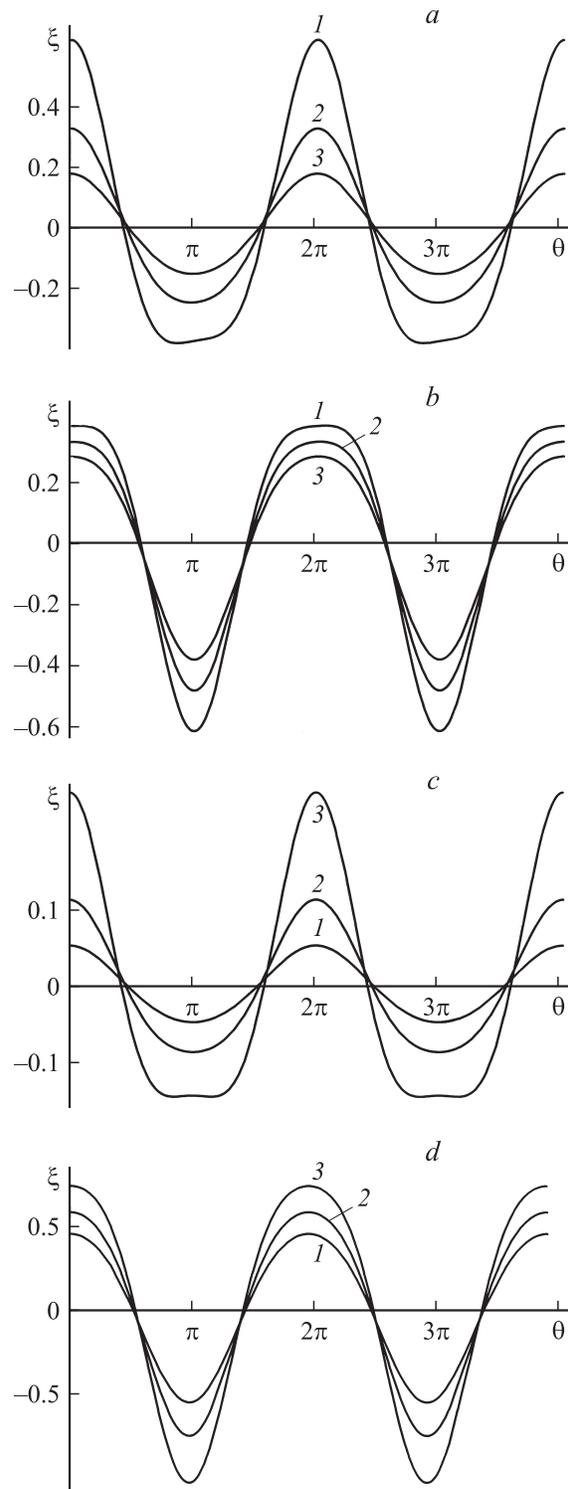


Рис. 2. Профили нелинейных волн различных типов, построенные в различные моменты времени в безразмерных переменных, в которых $\rho = g = \gamma = 1$, при $\nu = 10^{-2}$. *a, b* — профили волн с амплитудой, уменьшающейся со временем за счет влияния вязкого затухания при докритическом значении параметра Тонкса–Френкеля $W = 1.5$: $t = 0$ (1), 30 (2), 60 (3); $k = 1$ (*a*), 0.6 (*b*). *c, d* — профили волн с амплитудой, нарастающей со временем вследствие реализации неустойчивости по отношению к поверхностному заряду при $W = 2.5$: $t = 0$ (1), 30 (2), 60 (3); $k = 1$ (*c*), 0.6 (*d*).

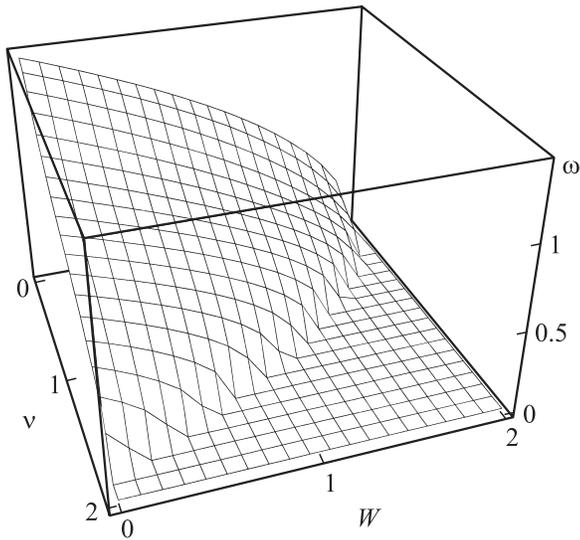


Рис. 3. Зависимость безразмерной частоты волнового движения от безразмерной вязкости ν и безразмерного параметра W , рассчитанная при $k = 1$.

следующего порядка малости в виде поправок к частотам волн (напомним, что критические условия реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости определяются условием прохождения через нуль квадрата частоты [19]).

Влияние поверхностного заряда и вязкости жидкости на частоты волн, следующее уже из линейного анализа, иллюстрируется рис. 3.

Заключение

Анализ найденного решения задачи о нелинейных периодических волнах на заряженной поверхности вязкой проводящей жидкости показал, что главный вклад в процесс формирования эмиссионных выступов, образующихся при реализации неустойчивости заряженной поверхности, вносит не весь набор неустойчивости волн с длинами из интервала, предсказанного линейной теорией, а только та их часть, на которой нелинейность процесса проявляется в заострении вершин. Волновые числа таких волн удовлетворяют условию $k > k_* = \sqrt{\rho g / (2\gamma)}$.

Приложение А

В каждой точке искаженной волновым движением плоской свободной поверхности жидкости $z = \xi(x, z, t)$ определены следующие величины.

1. Единичные орты внешней нормали \mathbf{n} и касательной $\boldsymbol{\tau}$

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla(z - \xi)}{|\nabla(z - \xi)|} = \frac{-\mathbf{e}_x \partial_x \xi + \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + (\partial_x \xi)^2}}; \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z \partial_x \xi}{\sqrt{1 + (\partial_x \xi)^2}}.$$

2. Средняя кривизна поверхности

$$\text{div}(\mathbf{n}) = -\frac{\partial_{xx} \xi}{(1 + (\partial_x \xi)^2)^{3/2}} = -\partial_{xx} \xi + O(\xi^3).$$

Приложение В

1. Кинематические граничные условия для величин различных порядков малости в общепринятых обозначениях выводятся из (4) [18] и имеют вид

$$z = 0: \quad \partial_t \xi_1 - v_1 = 0; \quad \partial_t \xi_2 - v_2 = \xi_1 \partial_z v_1 - u_1 \partial_x \xi_1.$$

2. Условия на касательные натяжения на свободной поверхности для величин различных порядков малости выводятся из (6) [18] и имеют вид

$$z = 0: \quad \partial_x v_1 + \partial_z u_1 = 0;$$

$$\partial_x v_2 + \partial_z u_2 = -4\partial_z v_1 \partial_x \xi_1 - \xi_1 \partial_z (\partial_x v_1 + \partial_z u_1).$$

3. Условие для давления на возмущенной поверхности (5) отличается от разобранный в [18] наличием в правой части слагаемого $(8\pi)^{-1}(\nabla\Phi)^2$. Для этого слагаемого разложение по ξ в окрестности $z = 0$ имеет вид

$$z = \xi: \quad \frac{1}{8\pi} \left((\nabla\Phi)^2 + 2\xi(\nabla\Phi \cdot \partial_z(\nabla\Phi)) + \xi^2(\partial_z(\nabla\Phi))^2 + \xi^2(\nabla\Phi \cdot \partial_{zz}(\nabla\Phi)) \right)_{z=0} + O(\varepsilon^3).$$

Если учесть, что $\xi = \xi_1 + \xi_2 + O(\varepsilon^3)$; $\xi_1 \sim O(\varepsilon)$; $\xi_2 \sim O(\varepsilon^2)$; $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + O(\varepsilon^3)$; $\Phi_1 \sim O(\varepsilon)$; $\Phi_2 \sim O(\varepsilon^2)$; $\nabla\Phi_0 = -E_0 \mathbf{e}_z$, $\partial_z(\nabla\Phi_0) = \mathbf{0}$, то из условия (5) для давления на свободной поверхности несложно установить соотношения для величин различных порядков, аналогичные построенным [18]. В рассматриваемом случае благодаря появлению давления электрического поля они преобразуются в соотношения

$$z = 0: \quad p_0 = \frac{E_0^2}{4\pi};$$

$$-\rho g \xi_1 + p_1 - 2\rho v \partial_z v_1 + \gamma \partial_{xx} \xi_1 - \frac{1}{4\pi} E_0 \partial_z \Phi_1 = 0;$$

$$-\rho g \xi_2 + p_2 - 2\rho v \partial_z v_2 + \gamma \partial_{xx} \xi_2$$

$$- \frac{1}{4\pi} E_0 \partial_z \Phi_1 = 2\rho v \xi_1 \partial_{zz} v_1 - \xi_1 \partial_z p_1$$

$$- \frac{1}{8\pi} \left((\partial_x \Phi_1)^2 + (\partial_z \Phi_1)^2 \right) + \frac{1}{4\pi} E_0 \xi_1 \partial_{zz} \Phi_1.$$

4. Разложение условия (7) в окрестности невозмущенной поверхности жидкости с необходимой точностью имеет вид

$$z = 0: \quad \Phi + \xi \partial_z \Phi + \frac{1}{2} \xi^2 \partial_{zz} \Phi = 0.$$

После подстановки сюда $\xi = \xi_1 + \xi_2 + O(\varepsilon^3)$; $\xi_1 \sim O(\varepsilon)$; $\xi_2 \sim O(\varepsilon^2)$; $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + O(\varepsilon^3)$; $\Phi_1 \sim O(\varepsilon)$; $\Phi_2 \sim O(\varepsilon^2)$; $\Phi_0 = -E_0 z$ легко получить соотношения для величин различных порядков малости

$$z = 0: \quad \Phi_0 = 0; \quad \Phi_1 - E_0 \xi_1 = 0; \quad \Phi_2 - E_0 \xi_2 = -\xi_1 \partial_z \Phi_1.$$

Приложение С

Значения величин $S, S_1, S_2, q, q_1, q_2, D$ вычисляются с помощью выражений (23)–(24).

1. Матрицы-столбцы $\hat{A}_1 - \hat{A}_6$, входящие в (27), (28),

$$\hat{A}_1 = -4v^2 k^3 q_1 \begin{bmatrix} q_2 \\ k \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \hat{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -k(S_2^2 + D^2) \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\hat{A}_3 = v k \begin{bmatrix} 2(\bar{S} + 2vk^2)q_1 q_2 + (S_2 + iD)(q_2^2 - q_1^2 + k^2) \\ -2ik(k+q)(S_2 + iD) \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\hat{A}_4 = \begin{bmatrix} -ivk(q-k)^2(S + 2vk^2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\hat{A}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ N_0 \\ M_0 \end{bmatrix}; \quad \hat{A}_6 = \begin{bmatrix} \Omega \\ N \\ M \end{bmatrix}; \quad \begin{aligned} \Omega &= \Omega_1 + i\Omega_2; \\ N &= N_1 + iN_2; \\ M &= M_1 + iM_2, \end{aligned}$$

где \bar{S} — величина комплексно сопряженная к S ; $N_1, N_2, \Omega_1, \Omega_2, M_1, M_2$ вычисляются по формулам

$$\Omega_1 = k(D - 2vkq_1); \quad \Omega_2 = k(S_2 - 2vkq_2);$$

$$N_0 = \frac{1}{2} \rho (S_2^2 - S_1^2 + 4vk^2 S_1 + 4v^2 k^2 (k^2 - q_1^2 + q_2^2));$$

$$N_1 = N_0 + \frac{1}{2} k^2 \frac{E_0^2}{4\pi}; \quad N_2 = \rho (S_2 D - 4v^2 k^2 q_1 q_2);$$

$$M_0 = k(kS_2 - q_2(3k^2 + q_2^2 - 3q_1^2));$$

$$M_1 = -k(3kS_2 - q_2(5k^2 - q_2^2 + 3q_1^2)v);$$

$$M_2 = k(3kS_1 + v(6k^3 - 5k^2 q_1 + 3q_2^2 q_1 - q_1^3)).$$

2. Квадратные матрицы $\hat{\Pi}_1 - \hat{\Pi}_4$, входящие в (35),

$$\hat{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} 2(S_1 - 2vq_1^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2q_1 \rho^{-1} \\ 0 & 2q_1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\hat{\Pi}_2 = \begin{bmatrix} 2(S_1 - 2vk^2) & 0 &) \\ 0 & 0 & 2k \rho^{-1} \\ 0 & 2k & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Pi}_3 = \begin{bmatrix} 2S_1 - v(k+q)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (k+q)\rho^{-1} \\ 0 & k+q & 0 \end{bmatrix};$$

$$\hat{\Pi}_4 =$$

$$\begin{bmatrix} 2S + v(3k^2 - 2kq - q^2) & 0 & -2ik\rho^{-1} \\ 0 & 2s + v(3k^2 - 2kq - q^2) & (k+q)\rho^{-1} \\ -2ik & k+q & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Матрица \hat{L} , входящая в (40),

$$\hat{L} =$$

$$\begin{bmatrix} 2ik & -2k & 2S & 0 \\ 4i\rho vkr & -2\rho(S + 4vk^2) & -(\rho g + 4\gamma k^2) & kE_0/(2\pi) \\ 8k^2 + 2S/v & -8ik^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Список литературы

- [1] Ламб Г. Гидродинамика. Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
- [2] Michel J.H. // Phil. Mag. Ser. 5. 1893. Vol. 36. N 222. P. 430–437.
- [3] Wilton J.R. // Phil. Mag. Ser. 6. 1914. Vol. 27. N 158. P. 385–394.
- [4] Wilton J.R. // Phil. Mag. Ser. 6. 1915. Vol. 29. N 173. P. 385–394.
- [5] Harrison W.J. // Proc. Lon. Math. Soc. Ser. 2. 1908. Vol. 7. P. 107–121.
- [6] Стокер Дж. Волны на воде. М.: ИЛ, 1959. 617 с.
- [7] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
- [8] Гольдштейн Р.В., Городец В.А. Механика сплошных сред. Ч. 1. М.: Наука, 2000. 256 с.
- [9] Nayfeh A.H. // J. Fluid Mech. 1971. Vol. 48. P. 385–395.
- [10] Shugan I., Voliak K. // J. Fluid Mech. 1998. Vol. 368. P. 321–338.
- [11] Trulsen K., Kliakhandler I. Physics of fluids. 2000. Vol. 12. N 10. P. 2432–2437.
- [12] Longuet-Higgins M.S. // J. Fluid Mech. 2000. Vol. 423. P. 275–291.
- [13] Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Световой В.Б., Григорьев А.И. Формулировка задач об аналитическом расчете нелинейных движений вязкой жидкости со свободной поверхностью. Препринт ИМИ РАН № 31. Ярославль, 2001. 87 с.
- [14] Миндлин И.М. // Изв. РАН МЖГ. 1994. № 3. С. 135–143.
- [15] Нестеров С.В. // Изв. РАН МЖГ. 1995. № 4. С. 116–121.
- [16] Fedorov A.V., Melvil W.K. // J. Fluid Mech. 1998. Vol. 354. P. 1–12.
- [17] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. Вып. 19. С. 1–9.
- [18] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 4. С. 28–37.
- [19] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [20] Френкель Я.И. // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
- [21] Габович М.Д. // УФН. 1983. Т. 140. № 1. С. 137–151.
- [22] Войцеховский М.Б. // ДФН. СССР. 1982. Т. 262. № 1. С. 87–88.
- [23] Philips O.M. // J. Fluid Mech. 1981. Vol. 106. P. 215–227.