

01;03

# Решение уравнения Больцмана методом разложения функции распределения в ряд Энского по параметру Кнудсена в случае наличия нескольких масштабов зависимости функции распределения от времени и координат

© О.А. Синкевич, А.М. Семенов

Московский энергетический институт (Технический университет),  
116250 Москва, Россия  
e-mail: oleg.sinkevich@itf.mpei.ac.ru SinkevichOA@mpei.ru

(Поступило в Редакцию 11 ноября 2002 г. В окончательной редакции 12 февраля 2003 г.)

Анализируется методика построения решения уравнения Больцмана, когда функции распределения зависят от „медленных“ и „быстрых“ времени и координат. Показано, что в случае многомасштабного характера функции распределения основные соотношения для вычисления неравновесной функции распределения являются существенно иными, чем в рамках метода Энского–Чепмена, а уравнения переноса дополняются вкладом от релаксационных процессов. Уравнения переноса теплоты и импульса, полученные на основе более общего решения уравнения Больцмана, содержат дополнительные члены, учитывающие релаксационные эффекты. Учет релаксационных эффектов в уравнении энергии приводит к гиперболическому уравнению „теплопроводности“ и конечной скорости распространения теплоты, а в тензоре вязких напряжений „ньютоновский“ член уравнения переноса окажется дополненным релаксационными слагаемыми.

1. Как известно [1], решение кинетического уравнения Больцмана методом Энского–Чепмена построено на допущении, что функция распределения молекул  $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{c})$  газа зависит от времени  $t$  и координат  $\mathbf{r}$  только через локальные макроскопические параметры неравновесного газа (концентрацию молекул (плотность газа)  $n(t, \mathbf{r})$ , температуру  $T(t, \mathbf{r})$ , скорость течения  $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ ). Фактически такой подход предполагает, что характер пространственно-временной эволюции неравновесной функции распределения молекул определяется только временным и пространственным масштабами протекания макроскопического процесса.

В действительности, однако, неравновесная функция распределения неявно содержит такие характерные микроскопические величины, как радиус столкновения (взаимодействия) и средняя длина свободного пробега молекул, а также соответственно время столкновения и среднее время между соударениями. „Подстраиваясь“ под пространственно-временные изменения полей макроскопических параметров, функция распределения меняется (релаксирует) в том темпе, который обеспечивают характер межмолекулярного взаимодействия и частота соударений молекул. Поэтому следует ожидать, что зависимость функции распределения молекул  $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{c})$  от времени  $t$  и координат  $\mathbf{r}$ , вообще говоря, носит более сложный, многомасштабный характер.

Ниже рассмотрен подход к решению уравнения Больцмана, опирающийся на высказанные соображения, и показано, что в этом случае алгоритм вычисления неравновесной функции распределения существенно модифицируется по сравнению с методом Энского–Чепмена, а уравнения переноса дополняются вкладом от релаксационных процессов.

2. Для решения уравнения Больцмана

$$\frac{Df}{Dt} = J\{f, f\}; \quad (1)$$

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{c}}; \quad (2)$$

$$J\{f, f\} = \int_{(\infty)} d^3u \int_0^{2\pi} d\varphi \times \int_0^{\infty} b db g [f(t, \mathbf{r}, \mathbf{c}')f(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}') - f(t, \mathbf{r}, \mathbf{c})f(t, \mathbf{r}, \mathbf{u})] \quad (3)$$

(обозначения стандартные [1–3]) воспользуемся методом многих масштабов в теории возмущений [4], который применительно к решению задач физической кинетики изложен в [2,3].

Допустим, что зависимость функции распределения  $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{c})$  от времени  $t$  и координат  $\mathbf{r}$  определяется двумя парами масштабов: „медленной“  $t_1, l_1$  и „быстрой“  $t_2, l_2$ , причем  $t_2 \ll t_1$  и  $l_2 \ll l_1$ ,

$$f(t, \mathbf{r}, \mathbf{c}) = f(t/t_1, \mathbf{r}/l_1, t/t_2, \mathbf{r}/l_2, \mathbf{c}/c). \quad (4)$$

„Медленными“ обычно являются масштабы, определяемые характерным временем протекания макроскопического процесса и размером пространственной неоднородности неравновесной системы. „Быстрыми“ могут быть радиус и время столкновения молекул, средняя длина свободного пробега и среднее время между столкновениями молекул или другие величины их порядка.

Зависимость функции распределения от скорости молекулы  $\mathbf{c}$  примем „одномасштабной“, причем масштаб

этой зависимости определяется средней скоростью теплового движения молекул  $\bar{c}$ . Пространственные и временные масштабы без потери общности можно считать связанными очевидным соотношением

$$l_1/t_1 = l_2/t_2 = \bar{c}.$$

Вводя безразмерные „медленные“  $\tilde{t}_1 = t/t_1$ ,  $\tilde{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{r}/l_1$  и „быстрые“  $\tilde{t}_2 = t/t_2$ ,  $\tilde{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{r}/l_2$  временные и пространственные переменные, а также безразмерную скорость молекулы  $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c}/\bar{c}$  и дифференцируя функцию распределения как сложную функцию, с учетом (4) запишем „ливиллиевский“ член (2) уравнения Больцмана (1) в виде

$$\begin{aligned} \frac{Df}{Dt} &= \frac{1}{t_1} \frac{\partial f}{\partial \tilde{t}_1} + \frac{1}{l_1} \mathbf{c} \cdot \frac{\partial f}{\partial \tilde{\mathbf{r}}_1} \\ &+ \frac{1}{t_2} \frac{\partial f}{\partial \tilde{t}_2} + \frac{1}{l_2} \mathbf{c} \cdot \frac{\partial f}{\partial \tilde{\mathbf{r}}_2} + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \tilde{\mathbf{c}}}. \end{aligned}$$

Для приведения уравнения Больцмана к безразмерному виду введем безразмерную функцию распределения

$$\tilde{f}(\tilde{t}_1, \tilde{\mathbf{r}}_1, \tilde{t}_2, \tilde{\mathbf{r}}_2, \tilde{\mathbf{c}}) = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{c}) \bar{c}^3 / n,$$

где  $n$  — численная плотность газа, а при „обезразмеривании“ интеграла столкновений (3), как обычно, используем еще один линейный масштаб — радиус столкновения (взаимодействия) молекул  $r_c$

$$\tilde{J}\{\tilde{f}, \tilde{f}\} = J\{f, f\} / [\bar{c}^4 (n \bar{c}^{-3})^2 r_c^2].$$

Кроме того, используем масштаб  $F_0$  для приведения к безразмерному виду внешней силы  $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F}/F_0$ .

После преобразований получим уравнение Больцмана (1) в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \text{Kn} \left[ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{t}_1} + \mathbf{c} \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{\mathbf{r}}_1} + \delta \tilde{\mathbf{F}} \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{\mathbf{c}}} + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{t}_2} + \tilde{\mathbf{c}} \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{\mathbf{r}}_2} \right) \right] \\ = \tilde{J}\{\tilde{f}, \tilde{f}\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь использованы следующие обозначения: число Кнудсена

$$\text{Kn} = \frac{\bar{l}}{l_1}, \quad \bar{l} = \frac{1}{nr_c^2}; \quad (6)$$

критерий Фруда

$$\delta = \frac{F_0 l_1}{m \bar{c}^2};$$

отношение масштабов

$$\varepsilon = t_2/t_1 = l_2/l_1. \quad (7)$$

3. Далее формально рассмотрим два варианта зависимости функции распределения (4) от „быстрых“ переменных: а) параметр  $\varepsilon$  (7) не равен числу Кнудсена (6) и не зависит от него, масштаб  $l_2$  при этом может быть, например, равен радиусу столкновения (взаимодействия) молекул  $r_c$ ; б) параметр  $\varepsilon$  равен числу Кнудсена (6), масштаб  $l_2$  равен длине свободного пробега молекул  $\bar{l}$ .

В общем случае, очевидно, параметров вида (7) может быть несколько. Более детальное обсуждение физических условий, при которых реализуются те или иные конкретные варианты, выходит за рамки данной работы.

а) Параметр  $\varepsilon$  не равен числу Кнудсена и не зависит от него. При  $\text{Kn} = 0$  из безразмерного уравнения Больцмана (1) получим

$$\tilde{J}\{\tilde{f}, \tilde{f}\} = 0. \quad (8)$$

Решением уравнения (8) является, как известно, локально равновесная функция распределения  $f^{[0]}(t, \mathbf{r}, \mathbf{c})$ . Следовательно, решение безразмерного уравнения Больцмана (5) можно пытаться искать в виде ряда Энского

$$\tilde{f} = \tilde{f}^{[0]} + \tilde{f}^{[1]} \text{Kn} + \tilde{f}^{[2]} \text{Kn}^2 + \dots \quad (9)$$

Подставляя (9) в (5) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\text{Kn}$ , получим линейные интегральные уравнения для коэффициента этого ряда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}^{[0]}}{\partial \tilde{t}_1} + \tilde{\mathbf{c}} \cdot \frac{\partial \tilde{f}^{[0]}}{\partial \tilde{\mathbf{r}}_1} + \delta \tilde{\mathbf{F}} \cdot \frac{\partial \tilde{f}^{[0]}}{\partial \tilde{\mathbf{c}}} + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \tilde{f}^{[0]}}{\partial \tilde{t}_2} + \tilde{\mathbf{c}} \cdot \frac{\partial \tilde{f}^{[0]}}{\partial \tilde{\mathbf{r}}_2} \right) \\ = \tilde{J}\{\tilde{f}^{[0]}, \tilde{f}^{[1]}\} + \tilde{J}\{\tilde{f}^{[1]}, \tilde{f}^{[0]}\}; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}^{[1]}}{\partial \tilde{t}_1} + \tilde{\mathbf{c}} \cdot \frac{\partial \tilde{f}^{[1]}}{\partial \tilde{\mathbf{r}}_1} + \delta \tilde{\mathbf{F}} \cdot \frac{\partial \tilde{f}^{[1]}}{\partial \tilde{\mathbf{c}}} + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \tilde{f}^{[1]}}{\partial \tilde{t}_2} + \tilde{\mathbf{c}} \cdot \frac{\partial \tilde{f}^{[1]}}{\partial \tilde{\mathbf{r}}_2} \right) \\ = \tilde{J}\{\tilde{f}^{[0]}, \tilde{f}^{[2]}\} + \tilde{J}\{\tilde{f}^{[1]}, \tilde{f}^{[1]}\} + \tilde{J}\{\tilde{f}^{[2]}, \tilde{f}^{[0]}\} \end{aligned} \quad (11)$$

и т.д. Нетрудно заметить, что производные в скобках множителя при  $\varepsilon^{-1}$  из (10) равны нулю. В самом деле, локально-равновесная функция распределения  $f^{[10]}(t, \mathbf{r}, \mathbf{c})$  зависит от времени и координат только через зависимости от этих переменных полевых параметров, таких как концентрация молекул (плотность газа)  $n(t, \mathbf{r})$ , температура  $T(t, \mathbf{r})$ , скорость течения  $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ . Следовательно, она зависит только от „медленных“ переменных  $\tilde{t}_1$ ,  $\tilde{\mathbf{r}}_1$ , а не от „быстрых“  $\tilde{t}_2$ ,  $\tilde{\mathbf{r}}_2$ . Поэтому уравнение (10) и его решение  $f^{[1]}(t, \mathbf{r}, \mathbf{c})$  в действительности имеют такой же вид, как в „стандартном“ первом приближении решения уравнения Больцмана методом Энского–Чепмена. Таким образом, эффекты, связанные с наличием двух масштабов, могут проявиться только при решении уравнения (11) относительно  $f^{[2]}(t, \mathbf{r}, \mathbf{c})$ .

В модели Бхатнагара–Гросса–Крука (БГК) для интеграла столкновений (см. например, [2])

$$J\{f, f\} = -\frac{f - f^{[0]}}{\tau}, \quad (12)$$

где  $\tau = l/\bar{c}$  — среднее время между двумя столкновениями ( $\text{Kn} = \tau/t_1$ ), вместо (10), (11) с учетом сказанного выше получим

$$\frac{\partial \tilde{f}^{[0]}}{\partial \tilde{t}_1} + \tilde{\mathbf{c}} \cdot \frac{\partial \tilde{f}^{[0]}}{\partial \tilde{\mathbf{r}}_1} + \delta \tilde{\mathbf{F}} \cdot \frac{\partial \tilde{f}^{[0]}}{\partial \tilde{\mathbf{c}}} = -\tilde{f}^{[1]}; \quad (13)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}^{[1]}}{\partial \tilde{t}_1} + \tilde{\mathbf{c}} \frac{\partial \tilde{f}^{[1]}}{\partial \tilde{\mathbf{r}}_1} + \delta \tilde{\mathbf{F}} \frac{\partial \tilde{f}^{[1]}}{\partial \tilde{\mathbf{c}}} + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \tilde{f}^{[1]}}{\partial \tilde{t}_2} + \tilde{\mathbf{c}} \frac{\partial \tilde{f}^{[1]}}{\partial \tilde{\mathbf{r}}_2} \right) = -\tilde{f}^{[2]} \quad (14)$$

и т. д.

Из (14) найдем

$$\tilde{f}^{[1]} = -\frac{\partial \tilde{f}^{[0]}}{\partial \tilde{t}_1} - \tilde{\mathbf{c}} \frac{\partial \tilde{f}^{[0]}}{\partial \tilde{\mathbf{r}}_1} - \delta \tilde{\mathbf{F}} \frac{\partial \tilde{f}^{[0]}}{\partial \tilde{\mathbf{c}}}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (14), подсчитаем  $\tilde{f}^{[2]}$  и т. д.

Уравнения (11), (14) можно решать методом разложения в ряд по параметру  $\varepsilon$ , и в нулевом приближении решение будет тем же, что и в методе Энского–Чепмена. Однако исследование этого вопроса выходит за рамки данной работы.

б) Параметр  $\varepsilon$  равен числу Кнудсена. При  $\text{Kn} = 0$  из безразмерного уравнения Больцмана (5) получаем уравнение

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{t}_2} + \tilde{\mathbf{c}} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{\mathbf{r}}_2} = \tilde{J}\{\tilde{f}, \tilde{f}\}, \quad (16)$$

где  $\tilde{t}_2 = t/\tau$ ,  $\tilde{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{r}/l$ .

Решением уравнения (16), как и решением (8), является локально-равновесная функция распределения  $f^{[0]}(t, \mathbf{r}, \mathbf{c})$ : она обращает в нуль правую часть (16), а также и левую часть этого уравнения, поскольку не зависит от „быстрых“ переменных.

Таким образом, и в рассматриваемом случае функцию распределения можно искать в виде ряда Энского (9). Однако в данном случае коэффициенты этого ряда являются решениями уже не интегральных, а линейных интегродифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \tilde{f}^{[0]}}{\partial \tilde{t}_1} + \tilde{\mathbf{c}} \frac{\partial \tilde{f}^{[0]}}{\partial \tilde{\mathbf{r}}_1} + \delta \tilde{\mathbf{F}} \frac{\partial \tilde{f}^{[0]}}{\partial \tilde{\mathbf{c}}} + \frac{\partial \tilde{f}^{[1]}}{\partial \tilde{t}_2} + \tilde{\mathbf{c}} \frac{\partial \tilde{f}^{[1]}}{\partial \tilde{\mathbf{r}}_2} = \tilde{J}\{\tilde{f}^{[0]}, \tilde{f}^{[1]}\} + \tilde{J}\{\tilde{f}^{[1]}, \tilde{f}^{[0]}\};$$

$$\frac{\partial \tilde{f}^{[1]}}{\partial \tilde{t}_1} + \tilde{\mathbf{c}} \frac{\partial \tilde{f}^{[1]}}{\partial \tilde{\mathbf{r}}_1} + \delta \tilde{\mathbf{F}} \frac{\partial \tilde{f}^{[1]}}{\partial \tilde{\mathbf{c}}} + \frac{\partial \tilde{f}^{[2]}}{\partial \tilde{t}_2} + \tilde{\mathbf{c}} \frac{\partial \tilde{f}^{[2]}}{\partial \tilde{\mathbf{r}}_2} = \tilde{J}\{\tilde{f}^{[0]}, \tilde{f}^{[2]}\} + \tilde{J}\{\tilde{f}^{[1]}, \tilde{f}^{[1]}\} + \tilde{J}\{\tilde{f}^{[2]}, \tilde{f}^{[0]}\}$$

и т. д.

В приближении БГК получим для тех же величин дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial \tilde{f}^{[0]}}{\partial \tilde{t}_1} + \tilde{\mathbf{c}} \frac{\partial \tilde{f}^{[0]}}{\partial \tilde{\mathbf{r}}_1} + \delta \tilde{\mathbf{F}} \frac{\partial \tilde{f}^{[0]}}{\partial \tilde{\mathbf{c}}} + \frac{\partial \tilde{f}^{[1]}}{\partial \tilde{t}_2} + \tilde{\mathbf{c}} \frac{\partial \tilde{f}^{[1]}}{\partial \tilde{\mathbf{r}}_2} = -\tilde{f}^{[1]};$$

$$\frac{\partial \tilde{f}^{[1]}}{\partial \tilde{t}_1} + \tilde{\mathbf{c}} \frac{\partial \tilde{f}^{[1]}}{\partial \tilde{\mathbf{r}}_1} + \delta \tilde{\mathbf{F}} \frac{\partial \tilde{f}^{[1]}}{\partial \tilde{\mathbf{c}}} + \frac{\partial \tilde{f}^{[2]}}{\partial \tilde{t}_2} + \tilde{\mathbf{c}} \frac{\partial \tilde{f}^{[2]}}{\partial \tilde{\mathbf{r}}_2} = -\tilde{f}^{[2]}.$$

Переходя в этих уравнениях снова к размерным переменным и имея в виду, что  $f^{[1]} = \text{Kn} \tilde{f}^{[1]}$  и  $f^{[2]} = \text{Kn}^2 \tilde{f}^{[2]}$ , получим для  $f^{[1]}$

$$\frac{\partial f^{[1]}}{\partial t} + \mathbf{c} \frac{\partial f^{[1]}}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{f^{[1]}}{\tau} - \frac{Df^{[0]}}{Dt} \quad (17)$$

и аналогично для  $f^{[2]}$ .

4. В общем случае вычисление коэффициентов ряда Энского (3) связано с решением выписанных выше линейных интегродифференциальных уравнений, что представляет собой весьма сложную задачу.

Однако в приближении БГК вид уравнений переноса можно установить, не решая уравнения (17).

Выражение для второго слагаемого в правой части (17) хорошо известно [1]. Оно получится, если вычислить требуемые производные от локально равновесной функции распределения, а производные по времени от концентрации молекул, температуры и скорости течения исключить с помощью уравнений локального баланса массы, импульса и энергии, которые вытекают из решения уравнения Больцмана в нулевом (локально-равновесном) приближении по методу Энского–Чепмена (т. е. из уравнений бездиссипативной гидродинамики Эйлера)

$$\frac{Df^{[0]}}{Dt} = f^{[0]} \left[ 2 \left( \mathbf{U}\mathbf{U} - \frac{1}{3} U^2 \mathbf{1} \right) : \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} - \left( \frac{5}{2} - U^2 \right) \mathbf{U} \left( \frac{2k_B T}{m} \right)^{1/2} \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}} \right]. \quad (18)$$

В этом выражении  $\mathbf{U}$  — безразмерная скорость теплового движения [относительно локальной скорости потока  $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ ] молекул  $\mathbf{C} = \mathbf{c} - \mathbf{v}(t, \mathbf{r})$

$$\mathbf{U} = \mathbf{C} \left( \frac{m}{2k_B T} \right)^{1/2},$$

$\mathbf{U}\mathbf{U}$  — тензор диадного произведения вектора  $\mathbf{U}$  на самого себя,  $\mathbf{1}$  — единичный тензор,  $\partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{r}$  — тензор скоростей деформации.

Подсчитаем с помощью (17), (18) плотность теплового потока

$$\mathbf{q} = \frac{m}{2} \int_{(\infty)} \mathbf{C} \mathbf{C}^2 f^{[1]} d^2 c.$$

Предполагая для простоты, что  $\tau$  не зависит от скорости молекулы, после несложных вычислений получим

$$q_\alpha = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} - \tau \left( \frac{\partial q_\alpha}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\beta} (q_\alpha v_\beta) \right) - \tau \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial \Lambda_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}$$

или

$$\mathbf{q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} - \tau \left( \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{q}\mathbf{v}) \right) - \tau \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Lambda, \quad (19)$$

где  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности

$$\lambda = -\tau \frac{m}{6} \left( \frac{2k_B T}{m} \right)^2 \frac{1}{T} \int_{(\infty)} f^{[0]} \left( \frac{5}{2} - U^2 \right) U^4 d^3 c$$

$$= \frac{15}{4} \frac{nk_B^2 T}{m} \tau = \frac{3}{2} nk_B T c_p \tau,$$

$c_p$  — изобарная теплоемкость;  $\Lambda$  — тензор, описывающий диссипативную часть потока динамической переменной  $\mathbf{C}\mathbf{C}^2$ , который не встречается в известных соотношениях физической кинетики

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \frac{m}{2} \int_{(\infty)} f^{[1]} C_\alpha C_\beta C^2 d^3 c.$$

Первое слагаемое в правой части (19) соответствует стандартному закону теплопроводности Фурье; второе — релаксационному эффекту, который обеспечивает конечную скорость распространения теплоты, описываемую известным из литературы гиперболическим уравнением теплопроводности (см. ниже); третье — некоторому релаксационному вкладу в тепловой поток, физическая природа которого ранее не изучалась.

Аналогичное соотношение можно получить и для тензора вязких напряжений: „ньютоновский“ член соответствующего уравнения переноса окажется дополненным релаксационными слагаемыми

$$\Pi_{\alpha\beta} = -2\eta S_{\alpha\beta} - \tau \left( \frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}}{\partial t} + \sum_{\gamma=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\gamma} (\Pi_{\alpha\beta} v_\gamma) \right)$$

$$- \tau \sum_{\gamma=1}^3 \frac{\partial \Delta_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_\gamma}. \quad (20)$$

Здесь

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \right) - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{v}$$

— тензор скорости сдвига;

$$\eta = \frac{2}{15} \tau m \int_{(\infty)} f^{[0]} U^4 d^3 c = \tau nk_B T$$

— динамический коэффициент вязкости;

$$\Delta_{\alpha\beta\gamma} = \tau m \int_{(\infty)} f^{[1]} C_\alpha C_\beta C_\gamma d^3 c$$

— тензор, который описывает диссипативную часть еще одного потока, также не встречающегося в физической кинетике.

Первое слагаемое в правой части (19) соответствует стандартному закону сдвиговой вязкости Ньютона; второе — релаксационному эффекту, который обеспечивает конечную скорость распространения вязких напряжений; третье — также некоторому релаксационному вкладу

в тепловой поток, физическая природа которого ранее не изучалась. Насколько авторам известно, указанные релаксационные эффекты в литературе не описаны.

5. Предположим, что газ не движется, а вкладом в (19) последнего слагаемого можно пренебречь

$$\mathbf{q} + \tau \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}}. \quad (21)$$

Будем называть (21) обобщенным законом Фурье в релаксационном приближении.

Если  $\text{Kn} \ll 1$ , т.е.  $\tau \ll t_1$  (медленный процесс), то релаксационный член в (21) вносит пренебрежимо малый вклад в перенос теплоты и (21) соответствует обычному закону Фурье.

Теперь, используя (21), выведем уравнение теплопроводности с учетом релаксации теплоты. С этой целью используем уравнение локального баланса энтальпии газа, которое строго следует из уравнения Больцмана (1), и будем считать, что газ неподвижен, а давление постоянно

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{q}, \quad (22)$$

где  $\rho = mn$  — плотность,  $c_p$  — изобарная теплоемкость газа.

Продифференцируем (22) по времени, умножим результат на  $\tau$  и почленно сложим с (22)

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \tau \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left( \mathbf{q} + \tau \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \right).$$

Подставляя в это соотношение обобщенный закон Фурье (21), получим искомое уравнение теплопроводности

$$\tau \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \right) + \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} \right). \quad (23)$$

Если предположить, что объемная теплоемкость  $\rho c_p$  и коэффициент теплопроводности  $\lambda$  не зависят от температуры, то (23) приобретет вид

$$\tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T, \quad (24)$$

где  $a = \lambda / \rho c_p$  — коэффициент температуропроводности.

Это уравнение — гиперболического типа. Оно описывает распространение тепловых возмущений с конечной скоростью

$$c_q = (a/\tau)^{1/2} = \left( \frac{3}{2} \frac{k_B T}{m} \right)^{1/2}.$$

Эта величина меньше скорости звука в одноатомном разреженном газе

$$c_s = \left( \frac{5}{3} \frac{k_B T}{m} \right)^{1/2},$$

что соответствует физическому смыслу и экспериментальным фактам.

Если  $Kn \ll 1$ , т.е.  $\tau \ll t_1$  (медленный процесс), то релаксационный член в (24) вносит пренебрежимо малый вклад в перенос теплоты и (24) превращается в обычное уравнение теплопроводности параболического типа с бесконечной скоростью распространения теплоты по теплопроводящей среде.

6. Споры о характере распространения возмущений температуры в веществе ведутся давно. Возможность гиперболической формы уравнения теплопроводности, описывающего распространение возмущений с конечной скоростью, обсуждалась в литературе и ранее (см., например, [5] и приведенные там ссылки на более ранние работы). Однако такое уравнение предлагается в известной авторам литературе без какого-либо обоснования, вывод выражения для скорости распространения возмущений отсутствует.

Хотя тип рассматриваемого уравнения определяется наличием второй производной от температуры по времени, отметим важность слагаемого в (24), содержащего первую производную температуры по времени. Отсутствие этого члена уравнения приводит к тому, что возмущение распространяется вдоль характеристики уравнения без изменения его формы. Напротив, его наличие в (24) приводит к тому, что первоначальная форма возмущения в процессе распространения сигнала сильно искажается вследствие дисперсии скорости его распространения.

Необходимо отметить, что рассматриваемые эффекты проявляются не только в быстропотекающих процессах, но и в обычных условиях на фронте волны, описывающей распространение возмущения температуры. Если в области, удаленной от переднего фронта, эволюция возмущения хорошо описывается параболическим уравнением теплопроводности, то переднюю часть фронта можно описать только в рамках гиперболического уравнения (24).

Заметим, что гиперболическое уравнение теплопроводности (24) следует из параболического уравнения Больцмана, содержащего только первую производную по времени от функции распределения молекул, и не имеет никакого отношения к так называемому обобщенному уравнению Больцмана, содержащему вторую производную по времени от функции распределения [3].

7. Анализ нестационарных процессов переноса теплоты на основе более общего уравнения (19), а также импульса с использованием уравнения (20) без использования сделанных выше упрощений выходит за рамки данной работы. Сделаем, однако, несколько замечаний о задачах, в которых учет рассматриваемых выше эффектов существен.

В первую очередь анализ процессов переноса теплоты в рамках гиперболического уравнения теплопроводности (23), (24) наиболее важен для быстропотекающих процессов, например при нано- и фемпто-секундных лазерных импульсных воздействиях на вещество, при взрыве катодных вискерсов и т.п. В более медленных процессах, например в задачах о переносе теплоты

в композитных материалах, где часто, особенно в инженерных расчетах, используют приближение эффективной температуропроводности  $a_{\text{эф}}$  и эффективного времени релаксации  $\tau_{\text{эф}}$ , отмеченные эффекты могут проявляться и на значительно больших временах  $t \approx \tau_{\text{эф}}$ , чем наносекундные времена.

Однако и в классической задаче о распространении теплоты от локализованного в начальный момент возмущения температуры обсуждаемый эффект конечности скорости распространения теплоты оказывается существенным в области переднего фронта волны, движущейся со скоростью звука. Задачу о распространении теплоты в этом случае надо решать методом многомасштабных разложений, и общее решение, состоящее из внешнего и внутреннего разложений, различно в разных областях [4]. Если обезразмерить уравнение (24), то из него следует, что в области переднего фронта возмущения необходимо решать гиперболическое уравнение, которое как раз и описывает конечную скорость распространения сигнала. В области же, далекой от переднего фронта, уравнение (24) превращается в стандартное параболическое уравнение теплопроводности и изменение температуры описывается известными соотношениями, приводимыми во множестве учебников. Как известно, в методах многомасштабных разложений оба решения сшиваются с использованием асимптотических рядов (вспомним известную задачу о пограничном слое).

Еще более сложной представляется задача отказа от использования уравнения Больцмана в приближении БГК (12) и развития метода решения интегродифференциальных уравнений для вычисления неравновесных поправок к локально-равновесной функции распределения молекул с учетом разных масштабов зависимости от времени и координат.

## Список литературы

- [1] Ферцигер Дж., Канер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. 554 с.
- [2] Коган М.Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
- [3] Алексеев Б.В. // УФН. 2000. Т. 170. № 6. С. 649–679.
- [4] Коул Дж. Методы возмущения в прикладной математике. Пер. с англ. М.: Мир, 1972. 274 с.
- [5] Лыков А.В. Теплообмен. Справочник. М.: Энергия, 1978. 479 с.