

01;03

## Ван-дер-ваальсовы волны в жидкостях со свободной поверхностью

© Ю.В. Саночкин

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,  
107005 Москва, Россия  
e-mail: bauman@bmsu.ru

(Поступило в Редакцию 11 декабря 2001 г. В окончательной редакции 13 июня 2002 г.)

Показано, что в жидкости с горизонтальной свободной границей могут существовать помимо гравитационных также поверхностные и внутренние волны, обусловленные действием сил Ван-дер-Ваальса. Выведено уравнение для волн и с использованием кусочно-постоянной аппроксимации его коэффициентов получено дисперсионное соотношение. Поверхностные волны по дисперсии и распределению амплитуд подобны поверхностным гравитационным, отличаясь от последних на несколько порядков большей частотой. Другая последовательность корней в спектре возбуждений соответствует внутренним ван-дер-ваальсовым волнам, характеризующимся границей сверху по частоте и типичным для многомодового волновода законом дисперсии.

1. Вблизи поверхности контакта с газом жидкость при механическом и тепловом равновесии из-за наличия сил Ван-дер-Ваальса [1] находится в напряженном неоднородно деформированном состоянии. Ее плотность уменьшается при приближении к границе раздела. Изменение плотности связано с возникающим в поверхностном слое жидкости градиентом давления, который компенсирует действие объемной ван-дер-ваальсовой силы. Нарушение однородности имеет место на макроскопических расстояниях, во много раз превышающих размер молекулы. Впервые асимптотики одно- и двухчастичных функций распределения и локальных величин на больших расстояниях от свободной границы были вычислены в серии работ Русанова и Куни (см., например, [2,3]). Используемый в [2,3] метод является обоснованным, строго говоря, в случае газов. Выполненные на основе макроскопической теории ван-дер-ваальсовых сил [4], применимой к телам в любых агрегатных состояниях, расчеты [5–7] подтвердили асимптотики [2,3]. Уточненные коэффициенты разложений, численные значения которых могут заметно отличаться от данных [2,3], выражены в [5–7] через диэлектрические проницаемости сред. Относительные отклонения плотности жидкости от объемного значения  $\rho_\infty$  при контакте с металлом могут достигать 10–15%, охватывая поверхностный слой толщиной  $\sim 3\text{--}4\text{ nm}$  [6,7]. Профиль плотности находится с помощью одночастичной функции распределения.

Представляет интерес изучение волн в жидкостях, обусловленных наличием ван-дер-ваальсовых сил. Описание волн, учитывающее специфику теплового движения молекул и вводящее зависимость от температуры, требует кинетического подхода. В данной работе рассмотрение проводится в гидродинамическом приближении. Правомочность гидродинамического описания движения жидкости в слоях отмеченной выше толщины установлена во многих работах по численному моделированию молекулярной динамики. Например, в [8] изучено движение в однородном поле внешних сил 1536 атомов аргона вдоль стенок, отстоящих на 4 nm,

в объеме площадью  $10 \times 10\text{ nm}$ , что отвечает плотности жидкого аргона. Взаимодействие каждой пары частиц, в том числе с молекулами в узлах решетки твердого тела, описывается модифицированными потенциалами „6–12“. Движение отдельных атомов имеет броуновский вид с дрейфом в направлении силы и временной локализацией вблизи стенок. Хотя распределение плотности не изучалось, отмечено молекулярное упорядочение вблизи них. Процедура усреднения вводит отличимую от тепловых флуктуаций гидродинамическую скорость. Получается профиль скорости, согласующийся с решением уравнений гидродинамики для течения Пуазейля. Попутно на основе микроскопических физических предпосылок подтверждается макроскопическое граничное условие прилипания. Вязкость, вычисляемая подгонкой параболы Стокса под распределение скорости течения, выражается через константы межмолекулярного потенциала и имеет наблюдаемое значение. В [8] рассмотрено также течение жидкости толщиной, значительно меньшей 4 nm, в задаче о движущейся линии контакта трех фаз. Помимо результатов численных экспериментов имеются работы по обобщенной гидродинамике, ставящей себе целью распространить уравнения обычной гидродинамики с макроскопических на микроскопические масштабы. Ссылки на оригинальные работы содержатся в [9]. В обобщенной гидродинамике вводятся обобщенные коэффициенты переноса, отличающиеся от обычных при малых масштабах. Согласно [9], обычная гидродинамика применима, начиная с размеров, больших трех молекулярных диаметров, и промежутков времени, на порядок превышающих кинетический масштаб времени ( $\sim 10^{-13}\text{ s}$ ).

Изучение ван-дер-ваальсовых поверхностных волн на модели слоя однородной жидкости на твердом основании предпринято в [10]. Выяснилось, что в рассмотренном случае тонких ( $l < 400\text{ nm}$ ) слоев волны являются сильно затухающими. При достаточной глубине слоя маловязкой жидкости из-за уменьшения трения о дно, дающего основной вклад в затухание, представляется

возможным существование слабо затухающих ван-дер-ваальсовых волн и, следовательно, их обнаружение. Подход, использованный в [10], оказывается в этом случае непригодным. Целесообразно введение объемной силы Ван-дер-Ваальса в уравнения гидродинамики и отказ от приближения однородной плотности.

Целью настоящей работы является определение спектра собственных частот свободных волн, обусловленных ван-дер-ваальсовыми силами в жидкости со свободной границей.

2. Пусть горизонтальная плоскость  $z = 0$  есть равновесная поверхность раздела между жидкостью и атмосферой  $Z > 0$ . Смещение границы в волне обозначается  $z = \xi(x, y, t)$ . Рассмотрение проводится в приближении несжимаемой идеальной жидкости, исходные уравнения гидродинамики имеют вид [11]

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\rho + \rho\mathbf{g} + \rho\mathbf{f}, \quad \frac{d\rho}{dt} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{v} = v(\mathbf{u}, w)$ ,  $\mathbf{u}$  — горизонтальная,  $w$  — вертикальная составляющие скорости,  $\mathbf{q}$  — ускорение силы тяжести,  $\mathbf{f}$  — удельная ван-дер-ваальсова сила. В равновесном состоянии сила  $\mathbf{f}_0(z)$ , как и сила тяжести, направлена вниз. Для ее определения можно воспользоваться аддитивным приближением [1]. Пусть потенциал взаимодействия молекул жидкости имеет вид  $U = -\beta r^{-6}$ , где  $r$  — расстояние между ними,  $\beta$  — константа взаимодействия. Процедура определения энергии взаимодействия пробной молекулы с другими частицами [12,13] приводит к следующему выражению для удельной силы:

$$f_0(z) = A/(2\pi\rho_\infty z^4), \quad (2)$$

где  $A = \pi^2 n^2 \beta$  — постоянная Гамакера,  $n = n_\infty$  — концентрация молекул жидкости.

Выражение (2) сингулярно на границе и является главным членом асимптотики силы вдали от нее. Принято считать, что подобные разложения применимы, начиная с расстояний в 3–4 монослоя от границы. В равновесном состоянии давление и плотность, согласно (1), связаны соотношением

$$\frac{dp_0}{dz} = -(g + f_0)\rho_0(z). \quad (3)$$

Условием  $f_0(b) = g$  определяется радиус действия макроскопических ван-дер-ваальсовых сил  $b = (A/2\pi\rho_\infty g)^{1/4}$ . Для типичных по порядку величины значений  $A = 6.28 \cdot 10^{-20}$  J,  $\rho_\infty = 10^3$  kg/m<sup>3</sup> имеем  $b = 10^{-6}$  m. Среднее и тем более максимальное значения силы  $f_0$  на много порядков превышают  $g$ . Градиент равновесной плотности определяется термодинамическим соотношением

$$\frac{d\rho_0}{dz} = \chi\rho_0 \frac{dp_0}{dz} = -\chi(g + f_0)\rho_0^2, \quad (4)$$

где  $\chi$  — изотермическая сжимаемость.

Ее зависимость от координаты определяется в основном неоднородностью силы  $f_0(z)$ . Согласно (2), (4) в области действия ван-дер-ваальсовых сил главный член асимптотики плотности имеет вид  $\rho_\infty - \rho_0 \sim z^{-3}$ . Это согласуется с выводами [5–7] и представляет в свою очередь дополнительное подтверждение справедливости гидродинамического описания и выражения для силы (2). За толщину слоя основного изменения градиента плотности принимается величина  $h = \varepsilon/\chi\rho_\infty f_s$ , где  $\varepsilon = (\rho_\infty - \rho_0(0))/\rho_\infty$  — максимальный относительный перепад плотности,  $f_s$  — некоторое характерное значение силы. Ее численное значение может достигать, видимо, сотен нанометров.

3. В дальнейшем будут рассматриваться гармонические волны. Профиль свободной поверхности имеет в этом случае синусоидальную форму. Вычислить мгновенное значение удельной силы  $\mathbf{f}$  в аддитивном приближении для указанной границы раздела затруднительно. Приближенное выражение для возмущения силы  $\mathbf{f}' = \mathbf{f} - \mathbf{f}_0$ , обусловленного деформацией границы, может быть получено из физических соображений. Сила  $\mathbf{f}'$  должна быть гармонической функцией  $x, y, t$  и исчезать при  $\xi \rightarrow 0$  и с удалением от свободной поверхности. Динамическая сила  $\mathbf{f}$  направлена по нормали к границе раздела лишь в вертикальных сечениях симметрии  $A$  и  $B$ , проходящих через максимумы гребней ( $\xi > 0$ ) и минимумы впадин ( $\xi < 0$ ) волн. Для упрощения вывода принимается, что амплитуда смещения свободной границы  $\xi_m = \max|\xi|$  меньше толщины слоя  $h$ . Расстояние до жидкой частицы, имеющей координату  $z$  в равновесном состоянии, составляет  $\xi - z$  в динамическом случае. Ввиду предполагаемого в линейной теории условия  $\xi_m \ll \lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны, представляется, что силы  $f(z)$  в сечениях  $A$  и  $B$  будут мало отличаться от  $f_0(\xi - z)$ . Тогда для вертикальной составляющей  $f'_z$  при  $z < 0$  в плоскостях  $A$  и  $B$  можно написать выражения  $(df_A/dz)\xi$  и  $(df_B/dz)\xi$  соответственно. Здесь  $f_A$  и  $f_B$  — степенные функции, близкие к (2). В сечении  $A$  из-за небольшого дополнительного притяжения молекул вниз по сравнению с плоской границей модуль  $f_A > f_0(\xi - z)$ , в плоскости  $B$  ситуация обратная  $f_B < f_0(\xi - z)$ . В промежуточных сечениях происходит плавный переход  $f'_z$  от одной зависимости к другой согласно соотношению

$$f'_z = \left( \frac{df_q}{dz} \right) \xi,$$

где  $f_q$  — медленно меняющаяся функция координаты  $q$ , отсчитываемой в направлении распространения волны.

Допустимо заменить ее средней по  $q$  величиной  $f_n(z)$  и написать для  $f'_z$  приближенное выражение

$$f'_z = \frac{df_n}{dz} \xi. \quad (5)$$

Аналогично устанавливается, что горизонтальная составляющая возмущения силы пропорциональна гради-

енту  $\xi$

$$\mathbf{f}' = -f_\tau(z)\nabla\xi, \quad (6)$$

где  $f_\tau$  — некоторая степенная функция, подобная (2).

Линеаризация (1) около стационарного состояния (3), (4) приводит с учетом (5), (6) к системе уравнений для возмущений

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\nabla p - (g + f_0)\rho\nabla z + \rho_0 f'_n \xi \nabla z - \rho_0 f_\tau \nabla \xi, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{d\rho_0}{dz} w &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Штрихи у возмущений давления  $p$  и плотности  $\rho$  в (7) опущены. Процедура последовательного исключения неизвестных [11] сводит (7) к уравнению для  $w$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \Delta w + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + N^2(z) \Delta_2 w \\ = M(z) \Delta_2 w(x, y, 0, t). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $\Delta$  означает трехмерный,  $\Delta_2$  — горизонтальный операторы Лапласа, частота Вайсяля  $N^2(z)$  и функция  $M(z)$  даются выражениями

$$N^2 = -(g + f_0) \frac{1}{f_0} \frac{d\rho_0}{dz}, \quad M = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} f_\tau + f'_n + f'_\tau,$$

где штрихами обозначены производные функции по  $z$ .

Если  $M = 0$ , то (8) совпадает по форме с известным уравнением гравитационных волн [11]. Ввиду (4) частота Вайсяля неотрицательна. Это свидетельствует об устойчивости равновесного распределения плотности и возможности немоного развития возмущений во времени. Сила тяжести входит в (8) явно в  $N^2$  и неявно через градиент плотности (4). Глубина жидкости  $l$  предполагается не настолько большой, чтобы в объеме, где  $f = 0$ , следовало учитывать уменьшение плотности с высотой из-за изменения давления. В этом случае можно опустить  $g$  в  $N^2$ . На свободной границе учитывается для общности поверхностное давление

$$(p_0 + p)_{z=\xi} - p_a = -\gamma \Delta_2 \xi. \quad (9)$$

Здесь  $p_a$  — постоянное давление атмосферы,  $\gamma$  — коэффициент поверхностного натяжения. При линеаризации (9) следует использовать формулу конечных приращений Лагранжа

$$p_0(\xi) - p_0(0) = p'_0(z_s)\xi = -f_s \rho_s \xi, \quad 0 < z_x < \xi,$$

где  $f_s = f_0(z_s)$ ,  $\rho_s = \rho_0(z_s)$  и учтено, что  $f_s \gg g$ .

С увеличением амплитуды  $\xi_m$  увеличивается и координата  $z_s$ . Применять, как в теории гравитационных волн, обычную формулу для приращения функции с быстро изменяющейся производной (3) в точке  $z = 0$ , где она не определена, нельзя. Допустимо заменять в последующих

формулах  $\rho_s$  и  $\rho_0(0)$  на  $\rho_\infty$ . После линеаризации (9) получается условие на невозмущенной границе

$$p|_{z=0} = \rho_\infty f_s \xi - \gamma \Delta_2 \xi.$$

Исключая из него  $p$  с помощью (7) и  $\xi$  с использованием кинематического условия, можно записать динамическое граничное условие для  $w$

$$\left[ (f_s + f_\tau) \Delta_2 w - \frac{\gamma}{\rho_0} \Delta_2 \Delta_2 w - \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial z} \right]_{z=0} = 0. \quad (10)$$

Для возмущений с  $\lambda < 2l$  в качестве 2-го граничного условия к (8) можно принять, что на бесконечности  $w(-\infty) = 0$ . Сила тяжести не фигурирует далее в условиях задачи. Следовательно, она не оказывает влияния на ван-дер-ваальсовы волны. Если, напротив, в уравнениях (7), (8) исключить действие ван-дер-ваальсовой силы ( $\mathbf{f} = 0$ ), в (10) восстановить опущенную силу тяжести, получится задача о гравитационно-капиллярных волнах на глубокой воде.

4. Используется приближение Буссинеска, когда градиент плотности удерживается только в выражении для частоты Вайсяля. Решение ищется в виде гармонической волны

$$w = \Phi(z) \exp[i(k_x x + k_y y) - i\omega t], \quad k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}.$$

Для определения амплитуды скорости с учетом (10) получается задача на собственные значения

$$\begin{aligned} \Phi'' + k^2 \left( \frac{N^2(z)}{\omega^2} - 1 \right) \Phi &= \frac{k^2}{\omega^2} M(z) \Phi(0), \\ \Phi(-\infty) &= 0, \quad \omega^2 \Phi'(0) = k \Omega^2 \Phi(0), \\ \Omega^2 &= [(f_s + f_\tau)k + \gamma k^3 / \rho_0]_{z=0}. \end{aligned} \quad (11)$$

Для строгого (в том числе численного) определения характеристик спектра свободных волн на основе системы (11) необходимо преодолеть еще одно существенное затруднение. Все коэффициентные функции (11) определены не во всех точках области существования решения  $z \leq 0$ . Неизвестны асимптотики  $\rho_0$ ,  $f_0$  и прочих функций при  $z \rightarrow 0$ , их минимальные и максимальные значения. Для получения первоначального качественного решения достаточно предположить, что указанные функции являются однозначными, непрерывными и принимают при  $z \leq 0$  конечные значения. Функция  $N^2(z)$  в (11) с учетом (4) пропорциональна  $(d\rho_0/dz)^2$  и мала по абсолютной величине вне слоя  $|z| < h$ . При приближении к свободной границе наблюдается ее рост по закону  $N^2 \sim z^{-8}$ . Функция  $M$  однотипна с  $N^2$ . Специфическое поведение коэффициентов уравнения (11) позволяет изучить основные свойства волн на следующей упрощенной модели поверхностного волновода, в которой они аппроксимируются кусочно-постоянными выражениями. Вблизи свободной границы  $-h < z < 0$  (область I) функции  $N^2(z)$  и  $M(z)$

заменяются константами  $N_m^2 = \chi \rho_\infty f_s^2$  и  $M$ . Вне слоя  $z < -h$  (область 2) можно положить  $N^2 = M = 0$ . Этот часто применяемый прием позволяет вывести в явном виде дисперсионное соотношение и установить характер движения. Значения используемых констант, как и характерной силы  $f_s$ , остаются при этом неопределенными. В объеме жидкости решение (11) имеет вид

$$\Phi_2 = a_2 \exp(kz). \quad (12)$$

Если  $\lambda < 2l$ , то трение о дно не оказывает практически никакого влияния. Это подтверждает правомочность использования модели идеальной жидкости. Если частота удовлетворяет неравенству  $\omega < N_m$ , решение (11) в области 1 имеет вид

$$\Phi_1 = a_1 \sin akz + b_1 \cos akz + b_1 \left( \frac{\alpha^2 \omega^2}{M} - 1 \right)^{-1},$$

$$\alpha = \left[ \frac{N_m^2}{\omega^2 - 1} \right]^{1/2}. \quad (13)$$

Вследствие непрерывности  $f_0(z)$  должны быть сшиты на границе областей 1, 2 решения (12), (13) и их первые производные [1]. Это приводит к однородной системе уравнений для коэффициентов, условие разрешимости которой представляет собой дисперсионное уравнение

$$\Omega^2 \alpha (\sin akh + \alpha \cos akh)$$

$$= M + (\alpha^2 \omega^2 - M) (\cos akh - \alpha \sin akh). \quad (14)$$

5. Вначале находятся корни (14) при  $M = 0$  и затем последовательными приближениями исследуется зависимость решений от параметра  $M$ . При  $M = 0$  уравнение (14) сводится к

$$\operatorname{tg} akh = \frac{\alpha(\omega^2 - \Omega^2)}{\alpha^2 \omega^2 + \Omega^2}. \quad (15)$$

Если  $\omega > N_m$ , величина  $\alpha$  становится чисто мнимой  $i|\alpha|$  и дисперсионное уравнение (15) превращается в

$$\operatorname{th} |\alpha| kh = \frac{|\alpha|(\omega^2 - \Omega^2)}{\Omega^2 - |\alpha|^2 \omega^2}. \quad (16)$$

Ввиду условия  $f_s \gg g$  чисто капиллярным возмущениям отвечают очень малые по сравнению со случаем гравитационно-капиллярных волн значения  $\lambda$ . Например, для воды, полагая  $A = 1.65 \cdot 10^{-19}$  J,  $f_s = f_0(a)$ ,  $a = 5\sigma$ ,  $\sigma = 2.64 \cdot 10^{-10}$  m,  $\gamma = 0.072$  J/m<sup>2</sup>, находим  $\lambda < 10^{-8}$  m, ( $kh \gg 1$ ). Их изучение представляется малоинтересным и в дальнейшем в качестве характерной частоты используется в основном

$$\Omega^2 = \chi f_s k, \quad \chi = 1 + f_\tau(0)/f_s. \quad (17)$$

5.1. Вводя переменную  $\tau = akh$ , можно записать (15) с учетом (17) в виде

$$\operatorname{tg} \tau = F(\tau), \quad F = \frac{\alpha^2(\omega/N_m)^2 \varepsilon - \alpha \chi \tau}{\alpha^3(\omega/N_m)^2 \varepsilon + \chi \tau}. \quad (18)$$

При фиксированном значении частоты  $\omega$  коэффициенты дробно-линейной функции  $F$  суть константы. Для всего диапазона изменения аргумента  $F$  есть монотонно убывающая функция с областью изменения от  $F(0) = \alpha^{-1}$  до  $F(\infty) = -\alpha$ . Следовательно, уравнение (18) имеет счетное множество корней  $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots$ , отвечающее последовательности точек пересечения  $F(\tau)$  с ветвями  $\operatorname{tg} \tau$ . Собственные значения задачи (11)

$$k_n(\omega) = \tau_n(\omega)/h\alpha(\omega); \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

полностью определяют нормальные волны  $w_n$ .

При более высоких частотах  $\omega > N_m$  дисперсионное уравнение (16) преобразуется аналогичным образом ( $\tau = |\alpha|kh$ )

$$\operatorname{th} \tau = F_1(\tau), \quad F_1 = \frac{|\alpha|^2(\omega/N_m)^2 \varepsilon - |\alpha| \chi \tau}{\chi \tau - |\alpha|^3(\omega/N_m)^2 \varepsilon}. \quad (19)$$

При  $\chi \tau_\infty = |\alpha|^3(\omega/N_m)^2 \varepsilon$  функция  $F_1$  имеет бесконечный разрыв, в точке  $\chi \tau_m = |\alpha|(\omega/N_m)^2 \varepsilon$  она обращается в нуль. Только при  $\tau_\infty < \tau < \tau_m$  функция  $F_1$  положительна, монотонно убывает от  $\infty$  до 0. Следовательно, для любой фиксированной частоты  $\omega > N_m$  дисперсионное уравнение (19) имеет единственное решение.

Наименьший корень (18)  $\tau_0$  мал. Оценка первого члена числителя  $F(\tau)$  дает  $\alpha(\omega/N_m)^2 \varepsilon < \varepsilon \omega/N_m < \varepsilon$ . Следовательно, решение (18) в первом порядке разложения по  $\varepsilon$  есть  $\tau_0 = \alpha(\omega/N_m)^2(\varepsilon/\chi)$ , откуда после подстановки  $\tau_0 = \alpha k_0 h$  следует закон дисперсии

$$\omega^2 = \chi f_s k, \quad (20)$$

подобный закону дисперсии гравитационных поверхностных волн [11]. Поскольку вместо  $g$  в (20) входит ван-дер-ваальсово ускорение, естественно именовать такие волны поверхностными ван-дер-ваальсовыми. По сравнению с гравитационными их можно считать высокочастотными. Решение уравнения (19) показывает, что его корни, хотя их значения не являются малыми, также описывают поверхностные ван-дер-ваальсовы волны. Кривая 1 на рис. 1 проведена через собственные значения  $k_0(\omega)$ , вычисленные по точным корням  $\tau_0(\omega)$  и  $\tau(\omega)$  уравнений (18) и (19) соответственно для  $(\varepsilon/\chi) = 0, 1$ . Уравнение указанной линии

$$k_0 h = (\varepsilon/\chi)(\omega/N_m)^2$$

выражает закон (20) в безразмерном виде. Кривые 2–4 на рис. 1 демонстрируют зависимость решений полного дисперсионного уравнения (14) от параметра  $M$ . Линии, соответствующие значениям  $M = (1 - 2)N_m^2$ , сливаются на графике с кривой 1. Параллельность линий 1–4 распространяет зависимость (20) на случай конечных  $M$ . Увеличение относительного перепада плотности  $\varepsilon$  также приводит к параллельному сдвигу дисперсионной кривой вверх, который при малых  $\varepsilon$  также мал. Соответствующие поверхностным волнам

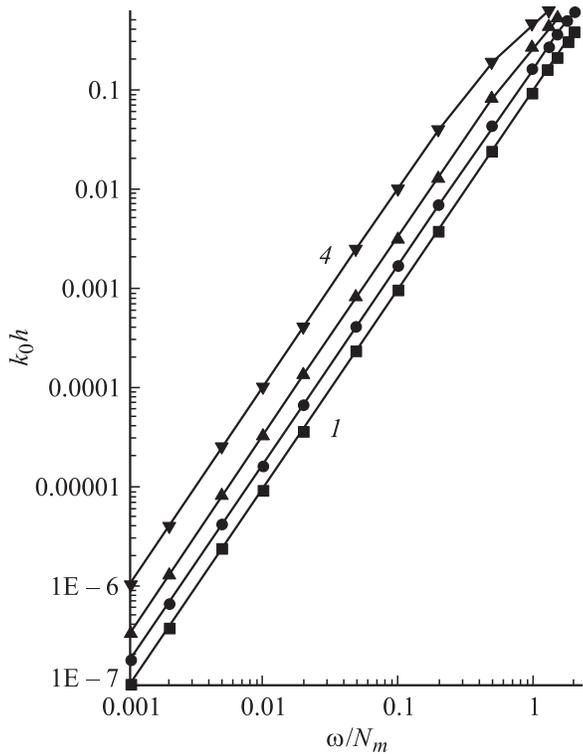


Рис. 1. Дисперсионные соотношения поверхностных ван-дер-ваальсовых волн для  $M/N_m^2 = 0, 5, 8, 10$  (1–4 соответственно).

собственные функции (12), (13) имеют максимальное значение на свободной границе, монотонно убывают в глубину, обращаются в нуль только на дне.

Возбуждения с законом дисперсии (20) наблюдались в тонких слоях ( $l \simeq 20$  nm) сверхтекучего гелия [14], у которого очень малый коэффициент поверхностного натяжения. Они были названы третьим звуком. Приведенные данные свидетельствуют, что и в обычных классических жидкостях могут возбуждаться поверхностные ван-дер-ваальсовы волны. В маловязких жидкостях на глубокой воде затухание волн должно быть малым.

5.2. Помимо поверхностных в системе нормальных волн имеются при  $\omega < N_m$  волны, соответствующие последующим корням  $\tau_1, \tau_2, \dots$  дисперсионного уравнения (18). Это внутренние ван-дер-ваальсовы волны. Первые четыре собственных значения  $k_n(\omega)$  изображены на рис. 2 (1–4). Полученный закон дисперсии типичен для многомодового волновода, что оправдывает применение термина поверхностный волновод. С увеличением номера гармоники при фиксированной частоте длина волны становится меньше. При одинаковых допустимых длинах волн ван-дер-ваальсовы частоты могут на несколько порядков превышать гравитационные. Во внутренних волнах в океане максимальные вертикальные смещения частиц происходят на глубине в областях наибольших градиентов плотности. В рассматриваемом случае последние располагаются в слое малой толщины  $h$  у поверхности. По расположению внутренние волны подоб-

ны поверхностным, ибо движением в обоих случаях, согласно (12), охватывается толщина  $\sim \lambda$ . Необходимые для существования внутренних ван-дер-ваальсовых волн условия идентичны условиям в „мертвой воде“ для внутренних гравитационных волн, когда пресная вода находится над более тяжелой с повышенной соленостью [11]. В обоих случаях гидростатическое равновесие является устойчивым и конвекция не возникает, градиенты плотности и силы параллельны. Поэтому наличие в спектре возбуждений ветви, соответствующей внутренним ван-дер-ваальсовым волнам, не представляется неожиданным.

5.3. Представляет интерес рассмотреть поверхностные ван-дер-ваальсовы волны в противоположном предельном случае, когда амплитуда смещения свободной поверхности  $\xi_m$  намного больше  $h$ . При сделанных ранее предположениях о глубине жидкости  $l$  ее плотность вне поверхностного слоя можно считать постоянной. Изучая волны с вертикальным смещением частиц жидкости  $\sim l$ , можно ограничиться рассмотрением движения в объеме вне поверхностного слоя неоднородной плотности. Возможность гидродинамического описания жидкости

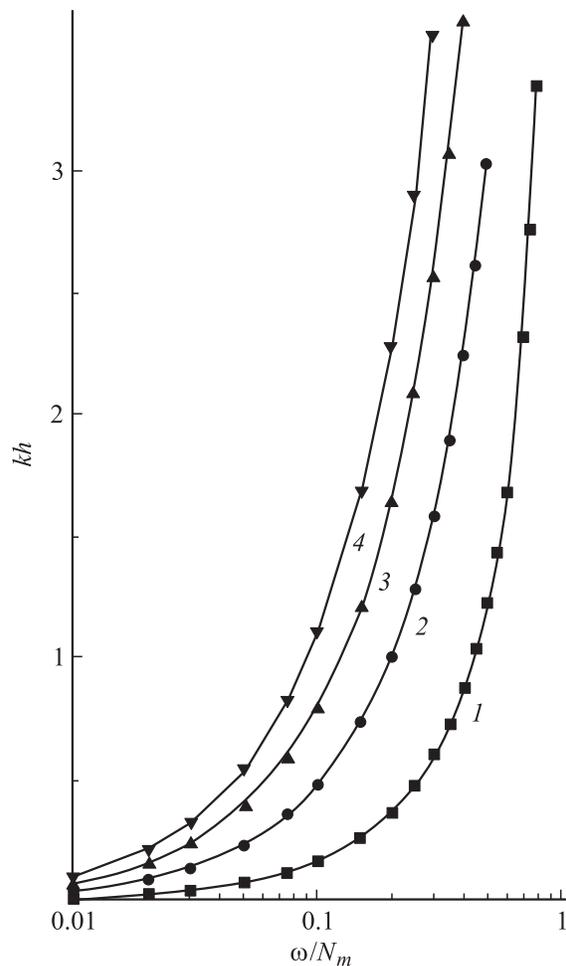


Рис. 2. Закон дисперсии внутренних ван-дер-ваальсовых волн ( $\varepsilon/\chi = 0.1, M = 0$ ).

в указанном слое позволяет учесть действие ван-дер-ваальсовой силы, видоизменив соответствующим образом граничное условие (9) для уравнения в объеме. При определении приращения  $p_0(\xi) - p_0(0)$  следует иметь в виду, что значения  $p_0(\xi)$  и  $p_0(r\xi)$  мало отличаются друг от друга, если величина  $r$  порядка отношения  $b/\xi_m$ . Замена  $p_0(\xi)$  на  $p_0(r\xi)$  с постоянной  $r$  означает фактически предположение о том, что граница слоя неоднородной плотности повторяет форму свободной поверхности. Ввиду условия  $\xi_m \ll \lambda$  такое приближение представляется допустимым. Тогда после линеализации (9) динамическое граничное условие на невозмущенной свободной поверхности можно записать в виде

$$p|_{z=0} = f_l \rho_\infty \xi - \gamma \Delta_2 \xi, \quad (21)$$

где  $f_l$  — предельное значение  $f_s$ , достигаемое при  $\xi_m \gtrsim b$ .

Граничное условие для  $w$  на свободной поверхности, которое получается из (21) после исключения  $p$  и  $\xi$ , отличается от (10) только заменой  $f_s$  на  $f_l$ . Уравнения движения в объеме жидкости получаются из (7), если положить  $\mathbf{f} = d\rho_0/dz = 0$ . Из них следует, что возмущения плотности в объеме не возникают и влиянием архимедовых сил можно пренебречь. Система сводится к известному в теории гравитационно-капиллярных волн уравнению для  $w$  [11]. Оно, если использовать условие непротекания при  $z = -l$ , удовлетворяется решением для  $w$  в виде

$$w = \text{sh } k(z + l) \exp[i(k_x x + k_y y - \omega t)].$$

Подстановка указанного выражения в динамическое граничное условие приводит к дисперсионному уравнению

$$\omega^2 = (\chi f_l k + \gamma k^3 / \rho_0(0)) \text{th } kl. \quad (22)$$

При  $k^2 \ll \chi \rho_\infty f_l / \gamma$  (22) принимает вид

$$\omega^2 = \chi f_l k. \quad (23)$$

Таким образом, закон дисперсии поверхностных ван-дер-ваальсовых волн на глубокой воде, утверждающий пропорциональность  $\omega^2$  и  $k$ , выполняется для любых допустимых в линейной теории амплитуд возмущений. Коэффициент пропорциональности зависит от характерных значений объемной ван-дер-ваальсовой силы.

**6. Физический анализ поля ван-дер-ваальсовых сил в жидкости** приводит к выражению для удельной массовой силы, согласующемуся с профилем плотности, вытекающим из строгой теории. Это оправдывает ее введение в уравнения гидродинамики, в том числе в уравнения для возмущений. Выведено граничное условие на поверхности раздела, учитывающее наличие ван-дер-ваальсовых сил. Рассмотрена физическая модель поверхностного волновода, в которой используется естественная аппроксимация коэффициентных функций уравнения для волн. Выведено дисперсионное уравнение, приближенно описывающее как спектр поверхностных, так и внутренних волн.

## Список литературы

- [1] Бараш Ю.С. Силы Ван-дер-Ваальса. М., 1988. 344 с.
- [2] Русанов А.И., Куни Ф.М. // ЖФХ. 1968. Т. 42. № 5. С. 1189–1195.
- [3] Куни Ф.М., Русанов А.И. // ЖФХ. 1968. Т. 42. № 10. С. 2569–2575.
- [4] Дзялошинский И.Е., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. ЖЭТФ. 1959. Т. 37. Вып. 1 (7). С. 222–241.
- [5] Набутовский В.М., Белослудов В.Р., Коротких А.М. // КЖ. 1979. Т. 41. № 5. С. 876–880.
- [6] Пихица П.В., Салистра Г.И. // УФЖ. 1980. Т. 25. № 6. С. 974–981.
- [7] Набутовский В.М., Белослудов В.Р. // КЖ. 1983. Т. 45. № 2. С. 263–268.
- [8] Koplik J., Banavar J.R., Willemsen J.F. // Phys. Rev. Lett. 1988. Vol. 60. N 13. P. 1282–1285. Phys. Fluids. A. 1989. Vol. 1. P. 781.
- [9] Alder B.J., Alley W.E. // Physics Today. 1984. January. P. 56. (Физика за рубежом. Сер. А. Исследования. Сб. статей. М.: Мир, 1986. 259 с.).
- [10] Саночкин Ю.В. // ИАН. МЖГ. 2000. № 4. С. 156–164.
- [11] Бреховский Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред. Приложение к теории волн. М., 1982. 335 с.
- [12] Hamaker H.C. // Physica. 1937. Vol. 4. N 10. P. 1058–1072.
- [13] Френкель Я.И. Кинетическая теория жидкостей. М.; Л., 1959. 460 с.
- [14] Паттерман С. Гидродинамика сверхтекучей жидкости. М., 1978. 520 с.