

01;03

## Об устойчивости неосесимметричной заряженной струи вязкой электропроводной жидкости

© С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, Т.В. Левчук, М.В. Рыбакова

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
150000 Ярославль, Россия  
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 10 июля 2002 г. В окончательной редакции 28 октября 2002 г.)

Выведено дисперсионное уравнение для капиллярных колебаний (как осесимметричных, так и неосесимметричных) струи вязкой электропроводной жидкости, поддерживаемой при постоянном потенциале. Показано, что при высокой поверхностной плотности электрического заряда на струе создаются оптимальные условия для реализации неустойчивости неосесимметричных мод по сравнению с осесимметричными, что приводит в итоге к разбиению струи на капли разных размеров. Это обстоятельство позволяет корректно истолковать данные экспериментов по спонтанному дроблению заряженных струй.

**1.** Феномен капиллярного распада заряженных струй жидкости представляет интерес в связи с многочисленными приложениями в различных направлениях техники и химической технологии (см., например, [1] и указанную там литературу) и поэтому неоднократно исследовался как экспериментально [2,3], так и теоретически [4–10]. Тем не менее некоторые его аспекты пока остаются неясными. Сказанное относится, в частности, к изучению закономерностей реализации распада неосесимметричных струй. В экспериментальных работах [2,3] неосесимметричный распад заряженных струй освещался достаточно подробно, в частности, было отмечено возрастание роли неосесимметричного распада с ростом величины подаваемого на струю электрического потенциала. Более того, это явление интересно и в связи с академически (геофизически) ориентированными исследованиями распада во внешнем электростатическом поле свободно падающих заряженных капель. Так, в [11] зафиксирован выброс с противоположных вершин капли вдоль направления внешнего электростатического поля струй жидкости, распадающихся на отдельные дочерние капельки неосесимметричным образом. При экспериментальном исследовании электростатического распыления жидкости с торца капилляра (феномена, имеющего весьма обширные технические приложения [12]), по которому жидкость подается в разрядную систему, также зафиксирован выброс с вершины мениска жидкости на торце капилляра тонких струек жидкости, распадающихся на дочерние весьма мелкие капельки неосесимметричным образом [13]. Именно особенности неосесимметричного распада струй жидкости в таких экспериментах приводят к большому разнообразию экспериментально наблюдаемых режимов электростатического диспергирования жидкости [14,15]. Связи со сказанным основное внимание будет уделено исследованию особенностей реализации неустойчивости неосесимметричных заряженных струй электропроводной жидкости.

**2.** Рассмотрим бесконечную, движущуюся вдоль оси симметрии с постоянной скоростью  $U_0$  цилиндриче-

скую струю радиуса  $R$  вязкой несжимаемой жидкости с массовой плотностью  $\rho$ , кинематической вязкостью  $\nu$  и коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$ , поддерживаемую при постоянном электрическом потенциале  $\Phi_*$ . Будем считать, что жидкость является идеально проводящей и электрический заряд распределен по цилиндрической в отсутствие возмущений поверхности струи с постоянной поверхностной плотностью заряда  $\kappa_0$ . Поскольку мы рассматриваем бесконечную струю, то для упрощения задачи перейдем в инерциальную систему координат, движущуюся вместе со струей с такой же скоростью  $U_0$ . Очевидно, что в такой системе отсчета поле скоростей течения жидкости в струе  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$  полностью определяется возможными (имеющими, например, тепловую природу) капиллярными осцилляциями ее поверхности и является величиной такого же порядка малости, что и амплитуда колебаний. Будем исследовать условия реализации неустойчивости капиллярных колебаний поверхности струи.

Все расчеты проведем в цилиндрической системе координат  $r, \phi, z$ , орт  $\mathbf{n}_z$  которой совпадает по направлению с осью симметрии струи. Уравнение поверхности струи, возмущенной капиллярным волновым движением, запишем в виде

$$r = R + \xi(z, \phi, t), \quad |\xi| \ll R.$$

Математическая формулировка задачи о расчете капиллярных осцилляций струи состоит из уравнений гидродинамики и электростатики (в предположении, что скорость движения жидкости много меньше релятивистской)

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{U},$$

$$\nabla \mathbf{U} = 0, \quad \Delta \Phi = 0;$$

условий ограниченности

$$r \rightarrow 0: \quad |\mathbf{U}| < \infty,$$

$$r \rightarrow \infty: \quad |\nabla \Phi| \rightarrow 0;$$

гидродинамических граничных условий на свободной поверхности струи: кинематического

$$r = R + \xi: \quad -\frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{U} \nabla [r - (R + \xi(z, \phi, t))] = 0$$

и динамического для его касательных

$$r = R + \xi: \quad \frac{\partial U_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} U_\phi = 0,$$

$$\frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial z} = 0$$

и нормальной

$$r = R + \xi: \quad -P(\mathbf{r}, t) - P_0 + 2\nu \frac{\partial U_r}{\partial r} - P_\kappa + P_0 = 0$$

компонент, а также условия эквипотенциальности поверхности струи

$$\Phi = \Phi_*$$

Здесь  $U_r, U_\phi, U_z$  — компоненты поля скоростей в цилиндрической системе координат;  $P(\mathbf{r}, t)$  — гидродинамическое давление;  $P_0$  — атмосферное давление;  $P_\kappa$  — давление электрического поля;  $P_\sigma$  — давление сил поверхностного натяжения;  $\Phi$  — электростатический потенциал.

Решение сформулированной задачи будем искать в виде разложения по малому параметру  $|\xi|/R$ . В нулевом приближении получим неподвижный цилиндрический столб жидкости, а также известные выражения для лапласовского давления под свободной цилиндрической поверхностью жидкости и давления электрического поля на поверхность равномерно заряженного бесконечного цилиндра фиксированного радиуса.

3. В следующем линейном приближении по  $|\xi|/R$ , если за всеми физическими величинами оставить прежние обозначения, обсуждаемая задача в безразмерных переменных, в которых  $R = 1, \rho = 1, \sigma = 1$ , запишется в виде

$$r = 1 + \xi(\phi, z, t), \quad |\xi| \ll 1, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{U}, \quad (2)$$

$$\nabla \mathbf{U} = 0, \quad (3)$$

$$\Delta \varphi = 0, \quad (4)$$

$$r \rightarrow 0: \quad |\mathbf{U}| < \infty, \quad (5)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad |\nabla \varphi| \rightarrow 0, \quad (6)$$

$$r = 1: \quad -\frac{\partial \xi}{\partial t} + U_r = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial U_\phi}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial \phi} - U_\phi = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial z} = 0, \quad (9)$$

$$-p + 2\nu \frac{\partial U_r}{\partial r} - p_\kappa + p_\sigma = 0, \quad (10)$$

$$\varphi - 4\pi\kappa_0\xi = 0. \quad (11)$$

В уравнениях (1)–(11)  $\varphi, p, p_\kappa, p_\sigma$  — вызванные капиллярными колебаниями поверхности добавки первого порядка малости по  $|\xi|$  к электрическому потенциалу, гидродинамическому давлению, давлению электрических сил и сил поверхностного натяжения соответственно.

Раскладывая по малой величине  $\xi$  известные аналитические выражения для лапласовского давления  $P_\sigma = \text{div } \mathbf{n}$  (где  $\mathbf{n}$  — орт нормали к поверхности (1)) и давления электрического поля  $P_\kappa = 2\pi\kappa_0^2$  (см. Приложение), для входящих в (10) величин первого порядка малости  $p_\kappa$  и  $p_\sigma$  несложно получить следующие соотношения:

$$p_\sigma = -\left(\xi + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right), \quad (12)$$

$$p_\kappa = -4\pi\kappa_0^2\xi - \kappa_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \quad (13)$$

4. Систему уравнений (2), (3) будем решать методом операторной скаляризации (подробно изложенным в [16]), раскладывая поле скоростей  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$  на сумму трех ортогональных векторных полей при помощи векторных дифференциальных операторов  $\hat{\mathbf{N}}_i$

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{N}}_i \psi_i(\mathbf{r}, t) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (14)$$

удовлетворяющих условиям ортогональности

$$\hat{\mathbf{N}}_j^+ \hat{\mathbf{N}}_i = 0 \quad (\text{при } i \neq j; \quad i, j = 1, 2, 3) \quad (15)$$

и условия коммутативности с оператором Лапласа

$$\Delta \hat{\mathbf{N}}_i = \hat{\mathbf{N}}_i \Delta. \quad (16)$$

В выражениях (14), (15)  $\psi_i(\mathbf{r}, t)$  — неизвестные скалярные функции;  $\hat{\mathbf{N}}_j^+$  — операторы, эрмитовосопряженные к операторам  $\hat{\mathbf{N}}_j$ .

Поскольку равновесная форма струи обладает осевой симметрией, то операторы  $\hat{\mathbf{N}}_i$  удобно выбрать в виде

$$\hat{\mathbf{N}}_1 = \nabla, \quad \hat{\mathbf{N}}_2 = \nabla \times \mathbf{e}_z, \quad \hat{\mathbf{N}}_3 = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{e}_z).$$

Поле скоростей  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$  в цилиндрической системе координат будет иметь следующие компоненты, выраженные через скалярные функции  $\psi_i(\mathbf{r}, t)$ :

$$U_r = \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z \partial r},$$

$$U_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \phi} - \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z \partial \phi},$$

$$U_z = \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi_3}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial \phi^2} \right]. \quad (17)$$

Подставляя разложение (14) в систему (2), (3) и используя свойства операторов (15), (16), получим систему скалярных уравнений

$$\Delta \psi_1 = 0, \quad \Delta \psi_i - \frac{1}{\nu} \frac{\partial \psi_i}{\partial t} = 0 \quad (i = 2, 3), \quad (18)$$

$$p = -\frac{\partial \psi_1}{\partial t}. \quad (19)$$

Используя (12), (13), (17), (19), граничные условия (7)–(10) преобразуем в граничные условия для неизвестных функций  $\psi_i$  и  $\xi$

$$\begin{aligned}
 r = 1: \quad & \frac{\partial \xi}{\partial t} - \left[ \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z \partial r} \right] = 0, \\
 & 2 \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \psi_1 \right\} - \left\{ \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r^2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \phi^2} \right\} \\
 & \quad + 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \phi} \left\{ \frac{\partial \psi_3}{\partial r} - \psi_3 \right\} = 0, \\
 & \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi_3}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial \phi^2} \right] \right\} \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z \partial r} \right\} = 0, \\
 & \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + 2\nu \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z \partial r} \right\} \\
 & \quad + 4\pi\kappa_0^2 \xi + \kappa_0 \frac{\partial \phi}{\partial r} - \left( \xi + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Поскольку функции  $\xi$ ,  $\phi$ , и  $\psi_i$  описывают малые отклонения от равновесного состояния, то для того чтобы проследить эволюцию этих отклонений во времени, примем, что временная зависимость всех малых величин определяется экспонентой

$$\xi, \phi, \psi_i \sim \exp(st),$$

где  $s$  — комплексная частота.

Учитывая это, решения уравнений (18) и (4) в цилиндрической системе координат, удовлетворяющие условиям ограниченности (5), (6), будем искать в виде разложений по волнам, бегущим вдоль оси  $OZ$ ,

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty C_1 I_m(kr) \exp(im\phi) \exp(ikz) \exp(st) dk, \\
 \psi_i &= \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty C_i I_m(lr) \exp(im\phi) \exp(ikz) \exp(st) dk \quad (i = 2, 3), \\
 \phi &= \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty C_4 K_m(kr) \exp(im\phi) \exp(ikz) \exp(st) dk. \quad (22)
 \end{aligned}$$

В виде аналогичного разложения представим и функцию  $\xi(z, \phi, t)$

$$\xi(z, \phi, t) = \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty D \exp(im\phi) \exp(ikz) \exp(st) dk. \quad (23)$$

В (21)–(23)  $k$  — волновое число;  $l^2 \equiv k^2 + s/\nu$ ;  $m$  — азимутальные числа, т. е. целые числа, характеризующие

неосесимметричность решений;  $I_m(x)$ ,  $K_m(x)$  — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода;  $C_i$ , где  $i = 1, 2, 3, 4$ , и  $D$  — коэффициенты разложений, зависящие от  $m$  и  $k$ .

Используя условие эквипотенциальности поверхности струи (11), решения (22), (23) и учитывая свойства ортонормированности функций  $\exp(im\phi)$  и  $\exp(ikz)$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \exp[i(m_1 - m_2)\phi] d\phi &= \delta_{m_1, m_2}, \\
 \int_{-\infty}^\infty \exp[i(k_1 - k_2)z] dz &= \delta(k_1 - k_2), \quad (24)
 \end{aligned}$$

где  $\delta_{m_1, m_2}$  — дельта-символ Кронекера;  $\delta(k_1 - k_2)$  — дельта-функция Дирака, несложно получить связь коэффициентов  $D$  и  $C_4$

$$C_4 = \frac{4\pi\kappa_0 D}{K_m(k)}. \quad (25)$$

Подставляя решения (21), (22) с учетом (25) и разложение (23) в граничные условия (20) и используя соотношения (24), получим систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $D$  и  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )

$$\begin{aligned}
 Ds - C_1 k I'_m(k) - C_2 i m I_m(l) - C_3 i k l I'_m(l) &= 0, \\
 C_1 2im(k I'_m(k) - I_m(k)) + C_2 (I'_m(l) - m^2 I_m(l) - l^2 I''_m(l)) \\
 & \quad + C_3 2mk(I_m(l) - I'_m(l)) = 0, \\
 C_1 2ik^2 I'_m(k) - C_2 mk I_m(l) - C_3 (l^3 I'''_m(l) + l^2 I''_m(l) \\
 & \quad + l(k^2 - m^2 - 1)I'_m(l) + 2m^2 I_m(l)) = 0, \\
 D \left\{ 4\pi\kappa_0^2 \left( 1 + \frac{k K'_m(k)}{K_m(k)} \right) + k^2 + m^2 - 1 \right\} \\
 & \quad + C_1 (s I_m(k) + 2\nu k^2 I''_m(k)) + C_2 2\nu i m (I'_m(l) - I_m(l)) \\
 & \quad + C_3 2\nu i k l^2 I''_m(l) = 0. \quad (26)
 \end{aligned}$$

Штрихами обозначены производные функций Бесселя  $m$ -го порядка по их аргументу, которые могут быть выражены через функции Бесселя  $m$ -го и  $(m + 1)$ -го порядков с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned}
 I'_m(x) &= I_{m+1}(x) + \frac{m}{x} I_m(x) = I_{m-1}(x) - \frac{m}{x} I_m(x), \\
 I''_m(x) &= -\frac{1}{x} I_{m+1}(x) + \left( 1 + \frac{m(m-1)}{x^2} \right) I_m(x), \\
 I'''_m(x) &= \left( 1 + \frac{m^2 + 2}{x^2} \right) I_{m+1}(x) \\
 & \quad + \frac{m-1}{x} \left( 1 + \frac{m(m-2)}{x^2} \right) I_m(x), \\
 K'_m(x) &= \frac{m}{x} K_m(x) - K_{m+1}(x).
 \end{aligned}$$

Напомним, что система однородных линейных уравнений (26) имеет нетривиальное решение только в случае, если ее определитель равен нулю  $\det[a_{ij}] = 0$ , где элементы  $a_{ij}$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned} a_{11} &= s, & a_{21} &= a_{31} = 0, \\ a_{41} &= k^2 + m^2 - 1 + 4\pi\kappa_0^2 \left\{ 1 + m - k \frac{K_{m+1}(k)}{K_m(k)} \right\}, \\ a_{12} &= -(kI_{m+1}(k) + mI_m(k)), \\ a_{22} &= 2im(kI_{m+1}(k) + (m-1)I_m(k)), \\ a_{32} &= 2ik(kI_{m+1}(k) + mI_m(k)), \\ a_{42} &= [s + 2v(k^2 + m(m-1))]I_m(k) - 2vkI_{m+1}(k), \\ a_{13} &= -imI_m(l), & a_{23} &= 2lI_{m+1}(l) - (l^2 + 2m(m-1))I_m(l), \\ a_{33} &= -mkI_m(l), & a_{43} &= 2vim(kI_{m+1}(l) + (m-1)I_m(l)), \\ a_{14} &= -ik(lI_{m+1}(l) + mI_m(l)), \\ a_{24} &= -2mk(lI_{m+1}(l) + (m-1)I_m(l)), \\ a_{34} &= -(l^2 + k^2)(lI_{m+1}(l) + mI_m(l)), \\ a_{44} &= 2vik([l^2 + m(m-1)]I_m(l) - lI_{m+1}(l)). \end{aligned} \quad (27)$$

5. Раскрывая определитель четвертого порядка с элементами (27), получим дисперсионное уравнение, связывающее частоты  $s$  неосесимметричных колебаний поверхности струи с волновым числом  $k$ ,

$$\begin{aligned} & s^2 \left\{ m[l^2(l^2 + k^2) + 2m(m-1)l^2] \right. \\ & + F_m(l)l[(l^2 + k^2)(l^2 - 4m) + 2l^2m^2] - 2l^2(l^2 + k^2)F_m^2(l) \left. \right\} \\ & + 2sv \left\{ -ml^2(l^2 - k^2)(k^2 - m(m-1)) \right. \\ & + F_m(l)l \left[ l^2k^2(l^2 + k^2) + l^2m(m-1)(l^2 - 2m(m+1)) \right. \\ & + l^2k^2m(3m+1) - 4k^2m(k^2 - m(m^2 - 1)) \left. \right] \\ & - 2l^2[k^2(l^2 + k^2) + m(m^2 - 1)(l^2 - k^2)]F_m^2(l) \\ & - F_m(k)k \left( 2l^2(l^2k^2 + m^2(m^2 - 1)) + l^2m(l^2 + k^2(4m - 5)) \right. \\ & + F_m(l)l[l^4 - 5l^2k^2 + 4m(m^2 - 1)(l^2 - k^2)] \\ & + 2l^2(m^2 - 1)(l^2 - k^2)F_m^2(l) \left. \right\} = f(m, w, k) \\ & \times \left\{ m \left( l^2m(l^2 - k^2) + F_m(l)l[l^2(l^2 - k^2) - 2m(l^2 - 2k^2)] \right. \right. \\ & - 2l^2(l^2 - k^2)F_m^2(l) \left. \right) + F_m(k)k \left( m[l^2(l^2 - k^2) - 2ml^2] \right. \\ & \left. + l(l^2 - k^2)(l^2 - 4m)F_m(l) - 2l^2(l^2 - k^2)F_m^2(l) \right) \left. \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(m, w, k) &\equiv \left[ 1 - m^2 - k^2 - w \left( 1 + m - \frac{kK_{m+1}(k)}{K_m(k)} \right) \right], \\ w &\equiv 4\pi\kappa_0^2, & F_m(x) &\equiv \frac{I_{m+1}(x)}{I_m(x)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Анализ уравнения (28) в общем случае достаточно проблематичен и доступен только численными методами.

Дисперсионное уравнение для случая осесимметричных колебаний заряженной струи, в том либо ином варианте упрощений обсуждавшееся в [4–10], несложно получить из (28), положив  $m = 0$ ,

$$\begin{aligned} & s^2 + 2vk^2s \left[ 1 - F_0(k) \left( \frac{2kl}{(l^2 + k^2)F_0(l)} + \frac{l^2 - k^2}{k(l^2 + k^2)} \right) \right] \\ & = k \frac{l^2 - k^2}{l^2 + k^2} F_0(k) f(0, w, k). \end{aligned}$$

При  $w = 0$  это выражение совпадает с дисперсионным уравнением для незаряженной струи вязкой жидкости, выведенным в [17].

Для струи маловязкой жидкости, когда выполняется условие  $l \gg k$ , уравнение (28) приводится к более простому виду

$$\begin{aligned} & s^2 + 2sv(k^2 + m(m-1) - kF_m(k)) \\ & = f(m, w, k)(m + kF_m(k)). \end{aligned} \quad (29)$$

При малой вязкости линейное по  $s$  слагаемое в уравнении (29) также можно опустить [17]

$$s^2 = f(m, w, k)(m + kF_m(k)). \quad (30)$$

При  $f > 0$  соотношение (30) определяет инкремент нарастания неустойчивости цилиндрической волны  $s = \sqrt{f(m + kF_m(k))}^{1/2}$ . Приравнявая к нулю первую производную от инкремента по волновому числу, можно найти волновое число капиллярной волны с максимальным значением инкремента и, подставив его в (30), получить величину самого инкремента. На рис. 1 приведены результаты подобных расчетов, проведенных с помощью программы аналитических расчетов „Математика“ в виде зависимостей  $s = s(w)$ ,  $k = k(w)$  для первых пяти значений азимутального числа  $m$ .

Из рис. 1, *a* видно, что величины инкрементов осесимметричной моды ( $m = 0$ ) и неосесимметричных мод ( $m = 1, 2, 3, 4$ ), заметно различающиеся при малых значениях  $w$ , при достаточно больших значениях поверхностной плотности заряда  $\kappa_0$  (при больших значениях параметра  $w$ ) становятся примерно равными. Согласно рис. 1, *b*, в такой ситуации волновые числа неосесимметричных волн заметно превышают волновое число осесимметричной волны. Сказанное означает, что при одном и том же значении электрического потенциала струи создаются оптимальные условия для

реализации неустойчивости одновременно осесимметричной и нескольких неосесимметричных мод колебаний поверхности, различающихся волновыми числами наиболее неустойчивых волн. Таким образом, струя будет дробиться на капли различных размеров и будет неустойчива по отношению к закручиванию вокруг своей оси по отношению к реализации „хлыстообразного“ (согласно терминологии [2]) движения, наблюдавшегося также в экспериментах [3,11,13].

В более общей ситуации, когда линейным по  $s$  слагаемым в (29) пренебрегать нельзя, положительный корень уравнения (29), соответствующий инкременту неустойчивости, запишется в виде

$$s = -\nu G(m, k) + \left( \nu^2 G^2(m, k) + f(m, w, k)(m + kF_m(k)) \right)^{1/2},$$

$$G(m, k) = (k^2 + m(m-1) - kF_m(k)). \quad (31)$$

Несложно видеть, что критические условия реализации неустойчивости струи в используемом приближении от вязкости не зависят. В самом деле, критические условия реализации неустойчивости струи невязкой жидкости определяются согласно (30) условием  $f > 0$ , при выполнении обратного неравенства  $s$  становится

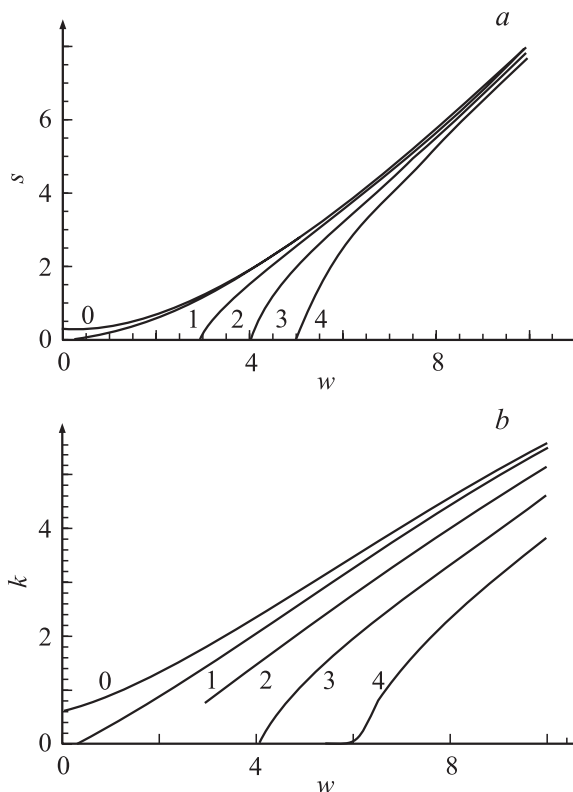


Рис. 2. Те же зависимости, что на рис. 1, рассчитанные при  $\nu = 0.1$ .

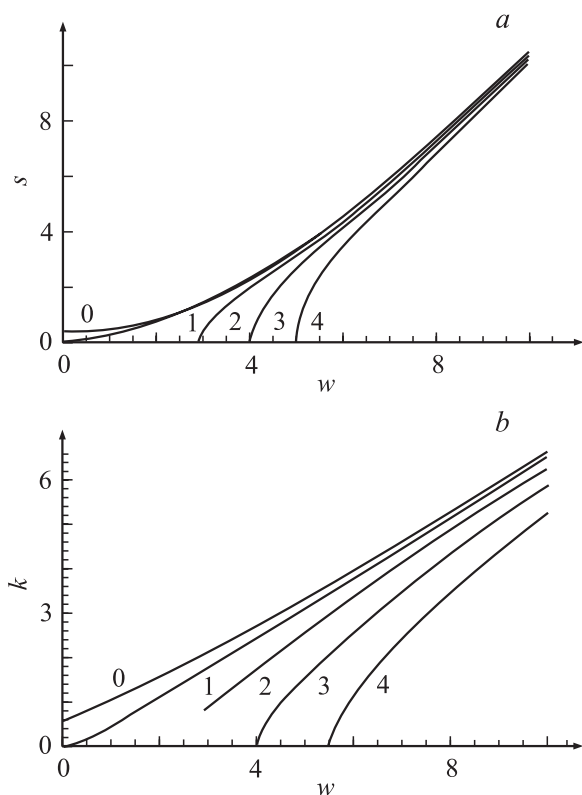
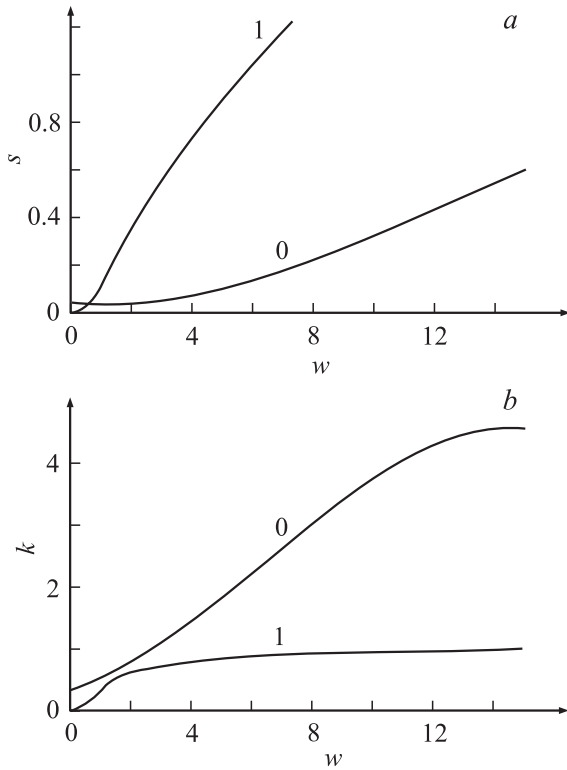


Рис. 1. Зависимости от безразмерного параметра  $w$ , характеризующего поверхностный заряд, величины безразмерного инкремента (а) и безразмерного волнового числа (б) наиболее неустойчивой волны, рассчитанные в пренебрежении вязкостью. Цифры у кривых — значения азимутального параметра  $m$ .

мнимым, что соответствует периодическому во времени изменению амплитуды волн. Из (31) видно, что условие появления положительных решений уравнения (29) (определяющих инкременты неустойчивости) также имеет вид  $f > 0$ . Влияние вязкости в данном случае сводится к уменьшению величин инкрементов и снижению значений волновых чисел, соответствующих наиболее неустойчивым волнам. Однако степень этого влияния различна в различных диапазонах значений волновых чисел и для различных  $m$ .

В представляющем интерес (в контексте сказанного выше о закономерностях развития неустойчивости волн при больших значениях поверхностного заряда) диапазоне величин безразмерных волновых чисел  $k \sim 4-6$  и безразмерных инкрементов неустойчивости  $\sqrt{f} \sim 5-10$  (рис. 1, а, б) влияние вязкости (при  $\nu \ll 1$ ) на развивающуюся неустойчивость будет слабым, оно проявляется в снижении величин инкрементов и волновых чисел наиболее неустойчивых волн примерно на 20%. Это видно из рис. 2, где приведены результаты расчетов для  $\nu = 0.1$  в виде зависимостей  $s = s(w)$ ,  $k = k(w)$  для первых пяти значений азимутального числа  $m$ . Данные рис. 2 свидетельствуют о том, что учет вязкости, хотя бы и малой, дает преимущество развитию неустойчивости неосесимметричных волн.

Чтобы исследовать влияние вязкости на закономерности реализации неустойчивости струи в ситуации



**Рис. 3.** Те же зависимости, что и на рис. 1, рассчитанные при  $\nu = 3$ .

$\nu \sim 1$ , проанализируем асимптотику дисперсионного уравнения (28), когда  $l \approx k$  или  $k^2 \gg (s/\nu)$ . В таком приближении, раскладывая  $l$  и  $F_m(x)$  в ряд по  $(s/\nu)$  с сохранением линейных по  $(s/\nu)$  слагаемых, получим

$$\begin{aligned}
 & s^2 \left\{ -6F_0^2 k^2 + 2H(m, k) k^3 [k^2 + m(m-4)] \right. \\
 & + m[3k^2 + 2m(m-1)] + F_0 [4k^3 - 8H(m, k) k^4 \\
 & + km(3m-8)] \left. \right\} + 2ks\nu \left\{ -2F_0^3 k^2 (m^2 - 1) \right. \\
 & + F_0 [k^4 - 4H(m, k) k^5 + 4k^2 m(m-1) - 3m^2 (m-1)^2] \\
 & - 3F_0^2 k [k^2 + 2m(m^2 - 1)] + 2k [m^2 (m-1) \\
 & + H(m, k) k (k^4 + 2k^2 m(m-1) + m^2 (m-1)(3+m))] \left. \right\} \\
 & + f(m, w, k) k [F_0^2 k^2 (2F_0 - k) - 2F_0 k m (k - 3F_0) \\
 & - m^2 (2H(m, k) k^2 + k - 3F_0)] + 8F_0 \nu^2 k^3 m^2 (m-1) = 0, \\
 & H(m, k) \equiv 1 - F_m^2(k) - \frac{2m+1}{k} F_m(k). \quad (32)
 \end{aligned}$$

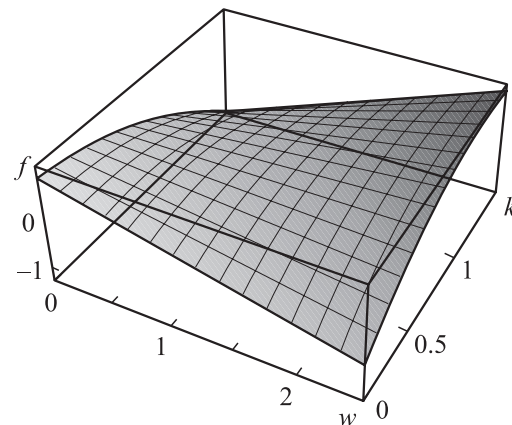
Результаты численного расчета по уравнению (32) зависимостей величин инкремента и волнового числа наиболее неустойчивой волны от параметра  $w$  для  $m = 0$  и  $m = 1$  при  $\nu = 3$  по уравнению (32) приведены на рис. 3. Видно, что при использованной в расчетах большой вязкости величина инкремента неосесимметричной

волны с  $m = 1$  существенно превышает инкремент осесимметричной волны, однако абсолютные значения величин инкрементов в обоих случаях снижаются по сравнению с величинами инкрементов для маловязких струй.

Интересно отметить, что при  $m = 0$  в области малых значений волновых чисел ( $k \leq 0.7$ ) величина инкремента немного снижается при увеличении  $w$  от нуля до  $w \approx 1.6$ . Этот эффект связан с немонотонностью при  $0 < w \leq 1.6$  зависимости  $f = f(k, w)$  в уравнениях (29)–(31) (рис. 4).

5. Интересно применить полученных результаты к рассмотрению распада на капли конической струи электропроводной жидкости, поддерживаемой при постоянном потенциале. Следует отметить, что в естественных условиях образования струй при реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости [11,13] они имеют коническую форму. Распад таких струй на капли происходит как за счет отрыва образующихся капелек с тонкого торца струи, совершающего хлыстообразное движение, так и при разрыве струи в ее сплошной части, далеко от торца [2,13]. Такой путь дробления струи приводит к расширению функции распределения дочерних капель по размерам и большому разнообразию фиксируемых режимов электродиспергирования жидкости [13–15].

В контексте проведенного исследования коническая струя, поддерживаемая при постоянном электростатическом потенциале, характеризуется различной поверхностной плотностью заряда на струе в различных ее поперечных сечениях: меньших при больших радиусах струи и больших у тонкого ее конца. Сказанное означает, что в одной и той же струе при различных значениях координаты  $z$  могут реализоваться неустойчивости различных волн с отличающимися значениями азимутального параметра  $m$ . Так, распад тонкого конца струи на капли будет происходить при определяющем влиянии неосесимметричных волн, а разрыв струи в сечении с большим радиусом, когда поверхностный заряд мал, —



**Рис. 4.** Зависимость множителя  $f(m, w, k)$  от параметра  $w$  и безразмерного волнового числа  $k$ , рассчитанная при  $m = 0$ .

за счет неустойчивости осесимметричной моды. Обсуждавшееся выше влияние вязкости в сечениях с большими и малыми радиусами струи также будет различным: безразмерная вязкость  $\nu = \nu_0(\rho/\sigma R)^{1/2}$  будет больше на узком конце струи и меньше на широком.

## Заключение

В спонтанном капиллярном распаде заряженных (поддерживаемых при постоянном электростатическом потенциале) струй на капли важную роль в формировании спектра распределения образующихся капель по размерам играет неустойчивость неосесимметричных волн. Инкременты неустойчивости неосесимметричных волн в маловязких струях при больших значениях поверхностной плотности заряда сравниваются с инкрементом неустойчивости осесимметричной волны, а в сильновязких струях существенно его превышают.

## Приложение

### Вывод выражения для давления электрического поля на поверхность струи

Вычислим давление электрического поля на заряженную поверхность цилиндрической струи вязкой несжимаемой идеально проводящей жидкости. Будем считать, что электрический ток по струе не течет, напряженность электростатического поля внутри проводника равна нулю, а на его поверхности имеет только нормальную компоненту, и заряд струи, вызванный ее электризацией, равномерно распределен по ее поверхности с плотностью  $\chi_0$ . Учтем, что в приближении идеально проводящей жидкости заряд по поверхности струи при ее капиллярных колебаниях перераспределяется с бесконечно большой скоростью, мгновенно следуя за колебаниями поверхности и обеспечивая ее эквипотенциальность в любой момент времени. В связи со сказанным, зависимость от времени потенциала  $\Phi$  электрического поля струи полностью определяется изменениями во времени формы поверхности струи, а зависимость потенциала  $\Phi$  от пространственных переменных может быть найдена из уравнения Лапласа (поскольку гидродинамические скорости много меньше скорости света).

Давление электростатического поля на поверхность заряженной проводящей струи  $P_x$  определяется известным выражением

$$P_x = \frac{(\nabla\Phi)^2}{8\pi},$$

где потенциал электрического поля вне капли  $\Phi$  является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= 0, \\ r = 1 + \xi: \quad \Phi &= \Phi_*, \\ r \rightarrow \infty: \quad \nabla\Phi &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Представим потенциал  $\Phi$  в виде разложения

$$\Phi = \Phi^0 + \varphi,$$

где  $\Phi^0$  — потенциал электрического поля вблизи невозмущенной поверхности струи;  $\varphi$  — добавка к потенциалу, вызванная возмущением поверхности  $\xi(z, \phi, t)$ , имеющая первый порядок малости по  $|\xi|$ .

Разделяя сформулированную задачу по порядкам малости, получим в нулевом приближении по  $|\xi|$

$$\Delta\Phi^0 = 0,$$

$$r = 1: \quad \Phi^0 = \Phi_*,$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \nabla\Phi^0 \rightarrow 0,$$

а в первом порядке

$$\Delta\varphi = 0,$$

$$r = 1: \quad \varphi = -\frac{\partial\Phi^0}{\partial r}\xi,$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \nabla\varphi \rightarrow 0.$$

Учтем также, что напряженность электрического поля на поверхности струи имеет только нормальную компоненту

$$r = 1: \quad \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n} = 4\pi\chi_0, \quad \mathbf{E}_0 \cdot \boldsymbol{\tau} = 0,$$

где  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\tau}$  — орты нормали и касательной к поверхности струи.

В нулевом порядке малости напряженность электрического поля вблизи невозмущенной цилиндрической поверхности струи имеет вид

$$\mathbf{E}_0 = -\nabla\Phi^0 = \frac{4\pi\chi_0\mathbf{r}}{r^2}.$$

Выражение для потенциала  $\varphi$  в цилиндрической системе координат, удовлетворяющее условию ограниченности при  $r \rightarrow \infty$ , и выражение для искажения цилиндрической формы струи  $\xi(z, \phi, t)$  запишем в виде разложений по волнам, бегущим вдоль оси  $OZ$  (вдоль оси симметрии струи),

$$\varphi = \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty C_4 K_m(kr) \exp(im\phi) \exp(ikz) \exp(st) dr,$$

$$\xi(z, \phi, t) = \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty D \exp(im\phi) \exp(ikz) \exp(st) dk,$$

где  $m$  — целые числа;  $k$  — волновое число;  $K_m(kr)$  — модифицированная функция Бесселя второго рода;  $C_4$  и  $D$  — коэффициенты разложения, зависящие от  $k$  и  $m$ .

На поверхности струи для функции  $\varphi$  имеем

$$r = 1: \quad \varphi = 4\pi\chi_0\xi.$$

Отсюда легко получить связь коэффициентов  $D$  и  $C_4$

$$C_4 = \frac{4\pi\chi_0}{K_m(k)} D.$$

При выводе этого соотношения была учтена линейная независимость функций  $\exp(im\phi)$  при разных  $m$  и функций  $\exp(ikz)$  при различных значениях волнового числа  $k$ .

Искажение равновесной цилиндрической поверхности струи волновым движением  $\xi(z, \phi, t)$  вызывает изменение давления  $P_x$ . Поскольку возмущение  $\xi$  малое, то  $P_x$  может быть разложено в ряд по  $\xi$  и представлено в виде

$$\begin{aligned} P_x|_{r=1+\xi} &\approx \frac{1}{8\pi} \left( \nabla\Phi^0 + \nabla\varphi \right)^2 \Big|_{r=1+\xi} \\ &\approx \frac{1}{8\pi} \left( (\nabla\Phi^0)^2 + 2(\nabla\varphi)(\nabla\Phi^0) \right) \Big|_{r=1+\xi} \\ &\approx \frac{1}{8\pi} \left( (\nabla\Phi^0)^2 + 2\nabla\Phi^0 \frac{\partial}{\partial r} (\nabla\Phi^0)\xi \right. \\ &\quad \left. + 2(\nabla\varphi)(\nabla\Phi^0) \right) \Big|_{r=1}. \end{aligned}$$

Используя выражение для напряженности электрического поля у поверхности невозмущенной цилиндрической струи для линейной по  $|\xi|$  добавки к давлению электрического поля, которую обозначим  $p_x(\xi)$ , получим выражение

$$r = 1: \quad p_x(\xi) = -4\pi\chi_0^2\xi - \chi_0 \frac{\partial\varphi}{\partial r}.$$

Подставляя вместо функций  $\xi$  и  $\varphi$  их интегральные представления, получим окончательное выражение для давления электрического поля, связанного с возмущением формы поверхности струи

$$p_x(\xi) = -4\pi\chi_0^2 D \left( 1 + k \frac{K'_m(k)}{K_m(k)} \right) \exp i(kz + m\varphi) \exp(st).$$

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (№ 00-15-9925).

## Список литературы

- [1] Аметистов Е.В., Блаженков В.В., Городов А.К. и др. Монодиспергирование веществ: принципы и применение. М.: Энергоатомиздат, 1991. 336 с.
- [2] Magarvey R.H., Outhouse L.E. // J. Fluid Mech. 1962. Vol. 13. N 1. P. 151–157.
- [3] Huebner A.L. // J. Fluid. Mech. 1969. Vol. 38. N 4. P. 679–688.
- [4] Schneider J., Lindbland C., hendrics Jr. // J. Appl. Phys. 1967. Vol. 38. N 6. P. 2599–2606.
- [5] Michael D.H., O Neill M.E. // Canadian J. Phys. 1969. Vol. 47. P. 1215–1220.
- [6] Grossmann S., Muller A. // Z. Phys. B. 1984. Vol. 57. P. 161–173.
- [7] Назин С.С., Изотов А.Н., Шикин В.Б. // ДАН СССР. 1985. Т. 283. № 1. С. 121–125.
- [8] Гиневский А.Ф. // Сб. науч. тр. МЭИ. М., 1986. № 119. С. 18–27.
- [9] Гиневский А.Ф., Мотин А.И. // ИФЖ. 1991. Т. 60. № 4. С. 576–582.
- [10] Горшков В.Н., Чабан М.Г. // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 1. С. 1–9.
- [11] Masky W.A. // Proc. Roy. Soc. London. 1931. Vol. 133. N A822. P. 565–587.
- [12] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [13] Cloupeau M., Prunet-Foch B. // J. Electrostatics. 1990. Vol. 25. P. 165–184.
- [14] Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1994. Т. 64. Вып. 3. С. 13–25.
- [15] Shiryayeva S.O., Grigor'ev A.I. // J. Electrostatics. 1995. Vol. 34. P. 51–59.
- [16] Ширяева С.О., Лазарянец А.Э., Григорьев А.И. и др. Препринт ИМ РАН. Ярославль, 1994. № 27. 126 с.
- [17] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959. 699 с.