

05

## Численное моделирование зарождения магнитных неоднородностей в ферромагнетиках с неоднородными параметрами

© Е.Г. Екомасов, Р.Р. Муртазин, Ш.А. Азаматов

Башкирский государственный университет,  
Уфа, Россия

E-mail: EkomasovEG@gmail.com

(Поступила в Редакцию в окончательном виде 10 января 2012 г.)

Теоретически исследованы зарождение и эволюция динамических магнитных неоднородностей типа покоящегося бризера, появляющихся в плоском слое с параметрами магнитной анизотропии и обменного взаимодействия, отличными от параметров в основном объеме бесконечного ферромагнетика после прохождения  $180^\circ$  доменной границы. Для найденных магнитных неоднородностей построены зависимости амплитуды и частоты колебаний от параметров дефекта, найдены области значений параметров, определяющих возможность их существования.

### 1. Введение

Содержащиеся в реальных магнетиках различного типа структурные и химические неоднородности, а также локальное воздействие (механическое, тепловое или световое) приводят к появлению локальных изменений магнитных параметров [1,2]. Наличие таких неоднородностей (или дефектов) может приводить к появлению пространственно локализованных мод колебаний и образованию различного рода магнитных неоднородностей, которые влияют на процессы перемагничивания образца [3–5]. Подстройка структуры магнитных неоднородностей под профиль дефекта также приводит к искажению в этой области доменной структуры, характерной для всего образца. Последнее в свою очередь служит надежным индикатором наличия дефектов в кристалле.

Ввиду того что точный (микроскопический) расчет обычно провести сложно, приходится моделировать функции, описывающие параметры неоднородного материала (например, константу магнитной анизотропии, параметр обменного взаимодействия и др.). Для ферромагнетиков часто применяется аппроксимация дефекта в виде плоского (или пластинчатого) магнитного включения (ПМВ), которое считается либо бесконечно тонким (с толщиной, сравнимой с межатомным расстоянием) [6,7], либо конечным по толщине [8,9]. Влияние ПМВ на статические и некоторые динамические свойства магнитных неоднородностей изучалось как аналитическими [6–11], так и численными методами [12–15]. Другим направлением изучения поведения магнитных неоднородностей является моделирование их потенциала взаимодействия с дефектами [4,16,17], что позволяет определить, например, коэрцитивную силу и даже изучать нелинейную динамику доменных границ. Отметим, что и при изучении многослойных магнитных структур применяются модели, учитывающие как локальную, так и периодическую пространственную модуляцию магнитных параметров материала (см., например, [18,19]).

В то же время учет пространственной зависимости параметров материала при изучении динамики доменной границы (ДГ) приводит к интересной и с математической точки зрения задаче нахождения решения модифицированного уравнения типа уравнения синус-Гордона с переменными коэффициентами, имеющего важное значение для многих областей современной физики [20–22]. Известно также, что в таких системах кроме обычных линейных возбуждений — спиновых волн — существуют и нелинейные возбуждения, например бризеры [23,24].

Часто магнитные неоднородности, зарождающиеся на дефектах, описывают в виде  $0^\circ$  ДГ [5,25]. Отметим, что в бездефектном магнетике магнитные неоднородности типа  $0^\circ$  ДГ являются энергетически невыгодными по сравнению с однородным состоянием вектора намагниченности. Наличие же дефектов, локально меняющих знак одноосной анизотропии кристалла, может приводить к энергетической выгоде  $0^\circ$  ДГ [10] и ее зарождению при наличии возбуждения в системе [24]. Однако обычно в дефектной области магнетика должны изменяться вместе с константами анизотропии и обменные константы. Поэтому в [26] нами изучены особенности динамики  $180^\circ$  ДГ в бесконечном ферромагнетике с плоским слоем, имеющим параметры магнитной анизотропии и обменного взаимодействия, отличные от параметров в основном объеме. В настоящей работе рассмотрены условия возбуждения в области таких ПМВ, после прохождения ДГ локализованных высокоамплитудных нелинейных магнитных волн.

### 2. Основные уравнения и метод решения

Рассмотрим бесконечный ферромагнетик, кристаллографические оси которого  $(a, b, c)$  совпадают с декартовыми осями координат  $(x, y, z)$ . Геометрия рассматриваемой модели показана на рис. 1 ( $\mathbf{m}$  — фер-

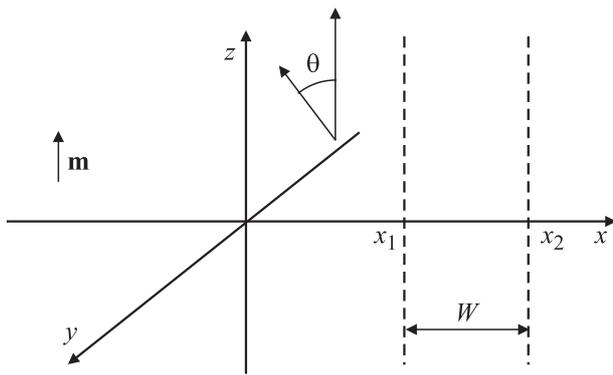


Рис. 1. Геометрия рассматриваемой задачи.

ромагнитный вектор,  $\theta$  — угол в плоскости  $yz$  между направлением вектора магнитного момента  $\mathbf{m}$  и осью легкого намагничивания (ось  $Oz$ ). Учитывая в плотности энергии магнетика обменное взаимодействие, анизотропию, зеемановскую энергию и затухание, уравнение движения для намагниченности в угловых переменных  $\mathbf{m} = \mathbf{m}(0, \cos \theta, \sin \theta)$  можно представить в безразмерном виде [8]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( g(x) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{1}{2} f(x) \sin 2\theta = h \sin \theta + \alpha \frac{\partial \theta}{\partial t}, \tag{1}$$

где  $g(x)$  — функция, определяющая распределение неоднородности параметра обменного взаимодействия,  $f(x)$  — функция, определяющая распределение неоднородности константы анизотропии,  $h$  — нормированное внешнее магнитное поле,  $\alpha$  — нормированная константа затухания. Координата  $x$  нормирована на  $\delta_0$  ( $\delta_0$  — ширина статической блоховской ДГ), время  $t$  нормировано на  $\delta_0/c$  ( $c$  — предельная уокеровская скорость стационарного движения [4]). Заметим, что уравнение типа (1) можно получить и для случая слабых ферромагнетиков и ферритов, тогда  $c$  — скорость спиновых волн. Оно описывает также конформационную динамику в квазиодномерных макромолекулах, в том числе и ДНК [20,22]. Уравнение (1), интенсивно изучаемое в настоящее время, представляет собой модифицированное уравнение синус-Гордона с переменными коэффициентами. Например, много работ посвящено изучению влияния зависящей от времени неоднородной внешней силы, описываемой параметром  $h$  [20,27]. Несмотря на то что имеются хорошо разработанная теория возмущений для этого уравнения [20,21,28,29] и точные решения для отдельных частных случаев [30], для рассматриваемого нами случая произвольных изменений значений функций  $g(x)$  и  $f(x)$  необходимо использовать численные методы.

Наиболее интересен случай, когда размер ДГ и размер, характеризующий неоднородность параметров, одного и того же порядка, тогда форма ДГ должна претерпевать существенные изменения при прохождении через

неоднородную область [31]. Функцию, описывающую зависимости  $g(x)$  и  $f(x)$ , будем моделировать в виде прямоугольного включения с размытыми границами (в виде трапеции)

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \leq x_1, x \geq x_2, \\ 1 + \text{tg} \beta (x - x_1) \text{sgn}(A - 1), & x_1 < x < x_1 + \xi_1, \\ A, & x_1 + \xi_1 \leq x \leq x_2 - \xi_1, \\ A - \text{tg} \beta (x - x_2 + \xi_1) \text{sgn}(A - 1), & x_2 - \xi_1 < x < x_2, \end{cases} \tag{2}$$

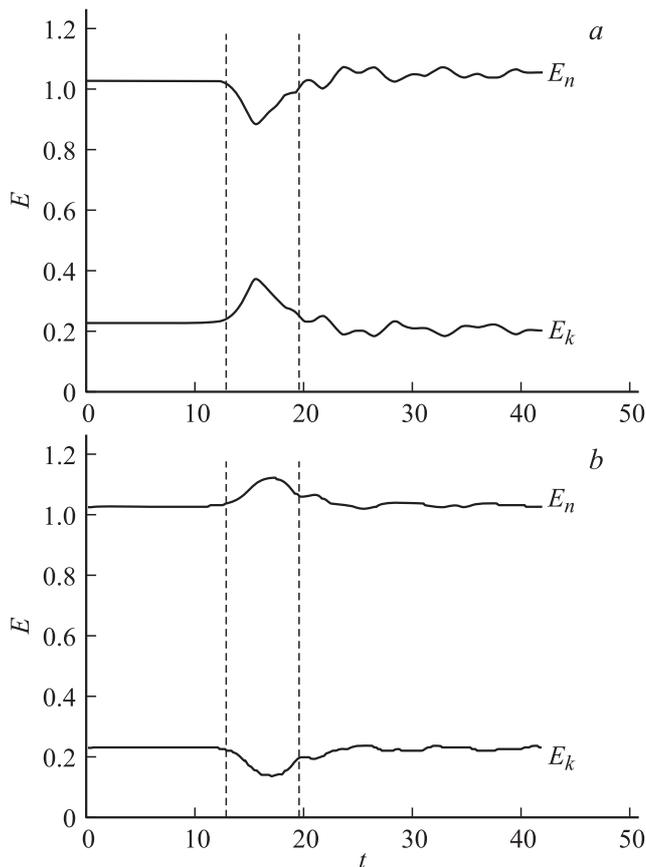
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq x_1, x \geq x_2, \\ 1 + \text{tg} \beta (x - x_1) \text{sgn}(K - 1), & x_1 < x < x_1 + \xi_2, \\ K, & x_1 + \xi_2 \leq x \leq x_2 - \xi_2, \\ K - \text{tg} \beta (x - x_2 + \xi_2) \text{sgn}(K - 1), & x_2 - \xi_2 < x < x_2, \end{cases} \tag{3}$$

где  $A$  — нормированный параметр обменного взаимодействия,  $K$  — нормированная константа магнитной анизотропии,  $W = x_2 - x_1$  — ширина дефекта,  $\xi_1 = |1 - A|/\text{tg} \beta$ ,  $\xi_2 = |1 - K|/\text{tg} \beta$ ,  $0 < \beta < 90^\circ$ ,  $\beta$  — внешний угол между боковыми сторонами трапеции и малым основанием трапеции, параллельным оси  $Ox$ .

Для исследования нелинейной динамики ДГ уравнение (1) решалось численно с использованием явной схемы интегрирования [32]. Дискретизация уравнения проводилась по стандартной пятиточечной схеме типа „крест“ [32]. Распределение намагниченности в начальный момент времени задавалось в виде блоховской ДГ  $\theta_0(x) = 2 \text{arctg}(e^x)$ , находящейся вне области неоднородности. Граничные условия имеют следующий вид:  $\theta(\pm\infty) = 0, \pi$ ;  $\theta'(\pm\infty) = 0$ . Для расчетов применен равномерную сетку с шагом  $\xi$  по координате  $x$ :  $\{x_i = \xi i, i = 0, \pm 1, \dots, \pm N_x\}$ , с шагом  $\tau$  по времени  $t$ :  $\{t_n = \tau n, n = 0, 1, \dots, N_t\}$ , где  $N_x, N_t$  — число точек сетки. Соблюдая условие сходимости явной схемы  $\tau/\xi \leq 0.25$ , мы вычисляли значение угла  $\theta$  в следующие моменты времени. Затем для структуры ДГ в каждый момент времени рассчитывались ее основные динамические характеристики. Все результаты, представленные в настоящей работе, приведены для случая  $\alpha = 0.01$ ,  $h = 0.016$  [24] и  $\beta = 75^\circ$ .

### 3. Зарождение магнитных неоднородностей в области дефекта

Как известно, дефекты могут создавать потенциальную яму либо потенциальный барьер для ДГ и ее энергия понижается или повышается вследствие взаимодействия с дефектами. Какими свойствами должны обладать для этого дефекты, качественно можно судить, зная, что в одноосном ферромагнетике удельная энергия



**Рис. 2.** Зависимости потенциальной  $E_n$  и кинетической  $E_k$  энергии ДГ от времени.  $A = 0.6$  (а) и  $1.4$  (б).  $K = 1$ ,  $W = 2$ ,  $h = 0$ ,  $v = 0.6$ ,  $\alpha = 0$ . Временной интервал, ограниченный штриховыми линиями, — интервал взаимодействия ДГ с дефектом.

ДГ  $E \sim \sqrt{AK}$ , а ширина  $\delta \sim \sqrt{A/K}$ . В статическом случае показано (см., например, [6,25,33]), что  $180^\circ$  ДГ и  $0^\circ$  ДГ энергетически более выгодно располагаться в области с пониженной анизотропией и обменом. Для случая дефекта, меняющего локально только анизотропию материала, и для динамического случая показана справедливость того, что область с пониженной анизотропией — это потенциальная яма для ДГ, а область с повышенной анизотропией — потенциальный барьер (см., например, [34]). Для понимания влияния неоднородности параметра обменного взаимодействия на динамику ДГ рассмотрим другой простой случай:  $k = 1$  при  $\alpha = 0$ ,  $h = 0$ . Сначала найдем зависимость кинетической и потенциальной энергии ДГ от времени. Для всех рассмотренных случаев оказалось (см., например, рис. 2), что при  $A < 1$  скорость ДГ при вхождении в область дефекта увеличивается, а при выходе уменьшается, что характерно для движения частицы в потенциальной яме. При  $A > 1$ , наоборот, скорость ДГ при вхождении в область дефекта уменьшается, а при выходе увеличивается, что характерно для движения частицы через потенциальный барьер. Это означает, что для случая

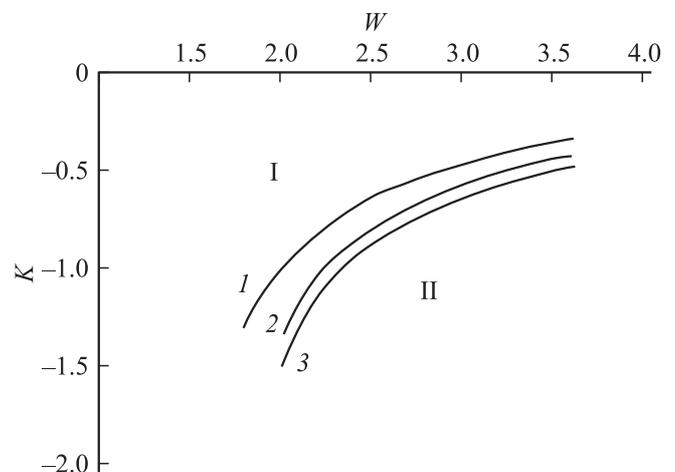
дефекта, меняющего локально только величину параметра обмена материала, область с пониженным значением обмена — потенциальная яма для ДГ, а область с повышенным значением обмена — потенциальный барьер. При этом отметим, что ДГ тормозится при пересечении области материала, содержащего дефекты, создающие как потенциальную яму, так и барьер для ДГ. В общем случае при наличии дефекта, приводящего к локальному изменению параметров анизотропии и обмена разного знака, тип потенциальной функции (яма или барьер) может определяться конкуренцией между величинами изменения параметров анизотропии и обмена.

Учтем также, что, как показано ранее для случая дефекта, меняющего локально только анизотропию материала [10,35], при некоторых критических значениях параметров  $K$  и  $W$  в области дефекта может существовать магнитная неоднородность в виде устойчивого статического солитона. Результаты численных расчетов показывают, что начиная с некоторых значений  $A$ ,  $K$ , и  $W$  в области примеси существует магнитная неоднородность типа солитона (или  $0^\circ$  ДГ). Полученную численно зависимость амплитуды  $0^\circ$  ДГ от параметра дефекта можно приближенно описать формулой

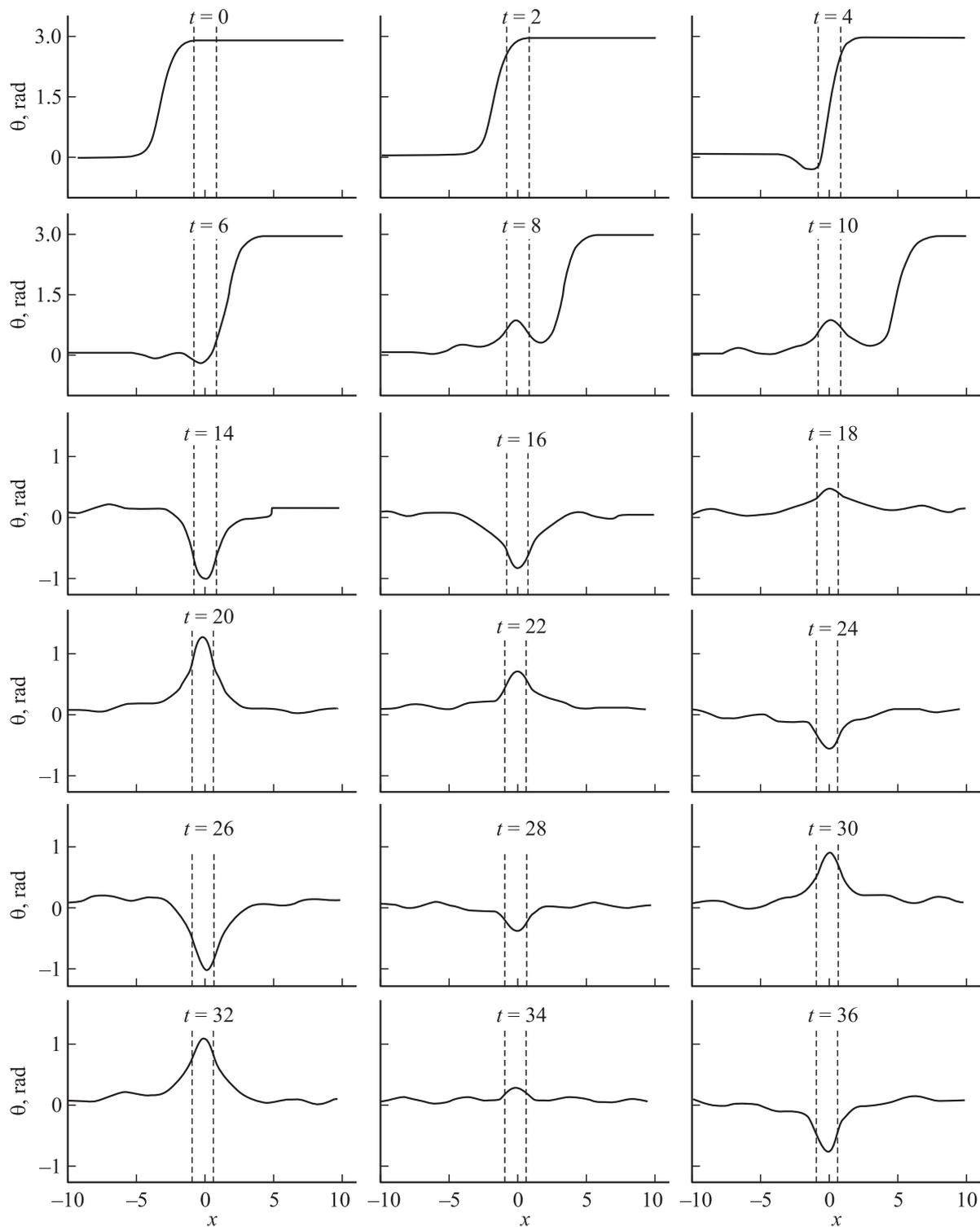
$$\cos \theta^* \approx 5A^n (|K|W^m), \quad (4)$$

где  $n = 0.56$  и  $m = 2$ . На рис. 3 приведены области значений параметров дефекта, определяющих возможность существования магнитной неоднородности типа солитона. Из рисунка видно, что качественно вид зависимости по сравнению со случаем  $A = 1$  не меняется. С увеличением параметра  $A$  происходит сдвиг кривых в область больших значений параметров  $|K|$  и  $W$ .

При рассмотрении динамики пересечения ДГ области ПМВ, с параметрами, лежащими в области I (рис. 3), было обнаружено, что в этой области возникают магнит-



**Рис. 3.** Области параметров, определяющих существование магнитной неоднородности типа бризера (выше линий 1–3) — область I;  $0^\circ$  ДГ (ниже линий 1–3) — область II. А: 1 — 0.6, 2 — 1, 3 — 1.4.



**Рис. 4.** Зарождение и эволюция магнитной неоднородности типа покоящегося бризера в области дефекта (ограниченного штриховыми линиями) при  $A = 0.6$ ,  $K = -0.6$ ,  $W = 2$ .

ные неоднородности. На рис. 4 приведена типичная картина прохождения ДГ через область дефекта и эволюции возникающей в этой области магнитной неоднородности. Хотя время прохождения ДГ через область дефекта мало (составляет порядка десяти временных единиц),

сам „переходный“ процесс сопровождается заметным изменением скорости движения и структуры ДГ. При этом возбуждаются внутриграничные моды (трансляционная и пульсационная) колебаний ДГ и наблюдается излучение объемных волн. Существует также критическое

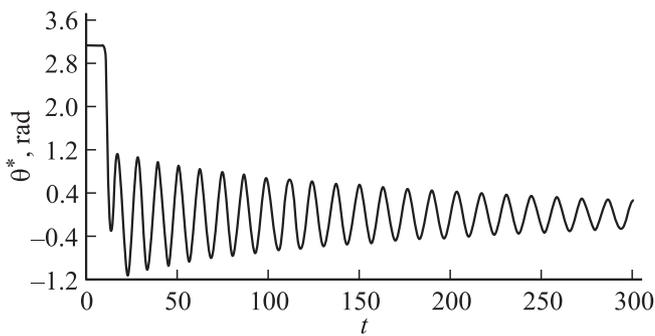


Рис. 5. Зависимость значения угла в центре дефекта  $\theta^*$  от времени для случая, изображенного на рис. 4.

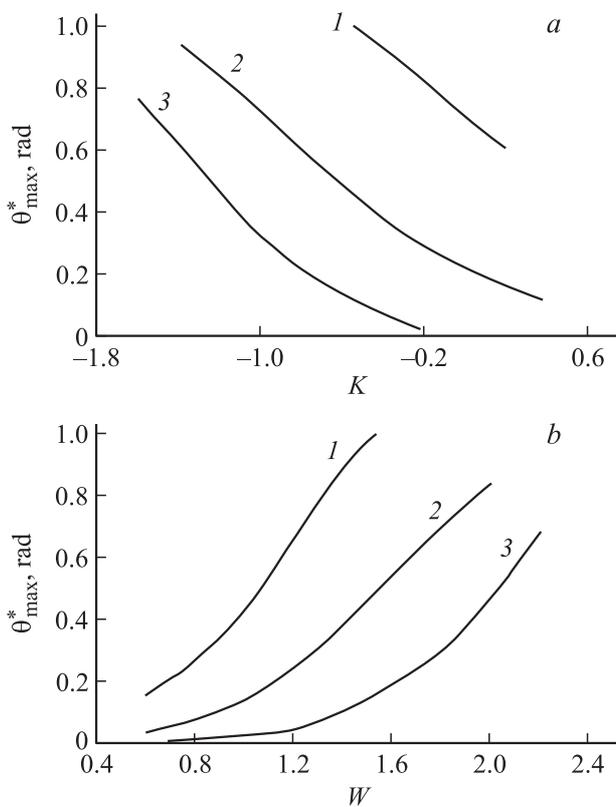


Рис. 6. Зависимость максимальной амплитуды магнитной неоднородности типа затухающего бризера  $\theta_{\max}^*$  от параметра  $K$  при  $W = 2$  (а) и от параметра  $W$  при  $K = -1.2$  (б).  $A = 0.6$  (1), 1 (2) и 1.4 (3).

значение скорости наезда ДГ, ниже которого произойдет ее пиннинг на дефекте [26]. В области дефекта после ухода ДГ возникает магнитная неоднородность солитонного вида, амплитуда которой (максимальная в центре области дефекта) колеблется от  $\theta_{\max}^*$  до  $-\theta_{\max}^*$ . Заметим, что величина амплитуды сильно зависит от значений параметров  $K$ ,  $A$  и  $W$ . На рис. 5 для случая, рассмотренного на рис. 4, приведена зависимость значения угла в центре области дефекта от времени  $\theta^*(t)$ . Видно, что эта функция периодическая с частотой колебаний  $\omega = 0.45$ .

Совпадение полученной численно функции  $\theta^*(t)$  с формулой [36]

$$\theta = \theta_{\max}^* \exp(-\alpha(t - t_0)) \times \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{1 - \omega^2}}{\omega} \sin(\omega(t - t_0)) \operatorname{sech} \left( x \sqrt{1 - \omega^2} \right) \right) \quad (5)$$

(где  $\theta_{\max}^* = 1.14$ ,  $x = 0$ ), описывающей решение уравнения синус-Гордона типа покоящегося бризера, записанного с учетом затухания, позволяет в дальнейшем считать найденную в данном случае магнитную неоднородность неоднородностью типа покоящегося бризера. Полученный из аппроксимации зависимости угла  $\theta^*$  от времени декремент затухания оказался практически равным задаваемому значению  $\alpha$ . Заметим, что время, необходимое для затухания бризера, составляет несколько сотен нормированных единиц времени. Для слабых ферромагнетиков это время порядка 0.1 ns, а для случая ферромагнетиков оно может быть на несколько порядков больше.

На рис. 6 а и б приведены зависимости максимальной амплитуды бризера в начальный момент времени  $\theta^*$  от величины параметров  $K$  и  $W$  для различных значений  $A$ . Видно, что аналогично случаю  $A = 1$ , рассмотренному в [24], при уменьшении величины  $(1 - K)$  и  $W$  для всех рассмотренных значений параметра  $A$  значение  $\theta_{\max}^*$  убывает и стремится к нулю. Отметим, что увеличение

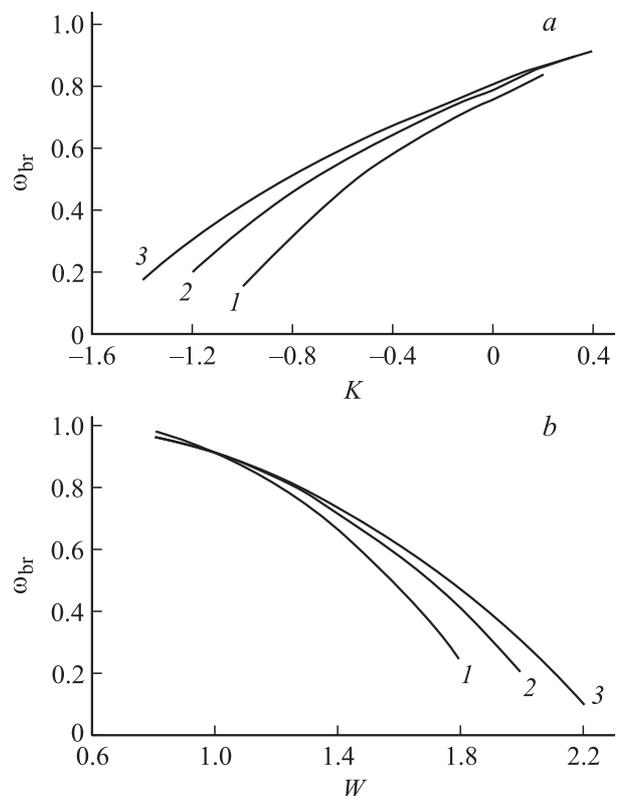


Рис. 7. Зависимость частоты колебаний бризера  $\omega_{br}$  от параметра  $K$  при  $W = 2$  (а) и параметра  $W$  при  $K = -1.2$  (б).  $A = 0.6$  (1), 1 (2) и 1.4 (3).

параметра  $A$  по сравнению с единицей приводит к уменьшению значения  $\theta_{\max}^*$ , а уменьшение параметра  $A$  по сравнению с единицей приводит к увеличению значения  $\theta_{\max}^*$ .

На рис. 7 *a* и *b* приведена зависимость  $\omega_{\text{бр}}$  — частоты колебаний угла  $\theta^*$  — для магнитной неоднородности типа бризера от  $K$  и  $W$  для различных значений  $A$ . Видно, что аналогично случаю  $A = 1$ , рассмотренному в [24], при уменьшении величины  $(1 - K)$  и  $W$  для всех рассмотренных значений параметра  $A$  частота колебаний стремится к единице. Данное обстоятельство становится понятным, если учесть, что энергия решения типа бризера  $E \sim (1 - \omega_{\text{бр}}^2)^{1/2}$  [36]; отсюда следует, что для случая малых дефектов (величины  $(1 - K)$ ,  $(1 - A)$  и  $W$  малы) энергия (как и амплитуда) полученной магнитной неоднородности типа бризера стремится к нулю.

#### 4. Заключение

Рассмотренные в работе локализованные в пространстве магнитные неоднородности играют важную роль в теории доменных границ и зародышей перемагничивания в реальных образцах. Так, магнитные бризеры, представляющие собой наиболее общий тип солитонных возбуждений, включают в себя спиновые волны и доменные границы как два предельных случая [5]. Несмотря на то, что их амплитуда убывает со временем, их возбуждение приводит к излучению объемных спиновых волн, частота которых напрямую связана со свойствами дефекта. Так же как для случая  $A = 1$  [20,21], учет взаимодействия кинков и бризеров необходим для получения с помощью теории возмущений адекватного выражения для минимальной скорости, необходимой кинку для прохождения через дефект, и приводит к появлению нового интересного резонансного эффекта — отражения кинка от притягивающего потенциала. Все это указывает на возможность экспериментального наблюдения магнитных бризеров через их излучение или влияние на динамику ДГ [37].

$0^\circ$  ДГ, стабилизированная на дефекте, может существовать достаточно долго и тоже приводит к появлению новых эффектов. Так, в [35] новую линию в найденном спектре ядерного магнитного резонанса связывали с наличием магнитной неоднородности типа  $0^\circ$  ДГ. Возникновением  $0^\circ$  доменной границы впереди движущейся  $180^\circ$  ДГ объяснялась и сверхпредельная скорость движения, наблюдаемая в экспериментах по динамике ДГ в слабых ферромагнетиках [38]. Магнитный бризер и  $0^\circ$  ДГ при определенных условиях можно рассматривать также как зародыш устойчивой фазы в недрах метастабильной [5,35,39].

#### Список литературы

- [1] С.В. Вонсовский. Магнетизм. Наука, М. (1971). 1032 с.
- [2] В.С. Львов. Нелинейные спиновые волны. Наука, М. (1987). 272 с.
- [3] J.M. Winter. Phys. Rev. **124**, 452 (1961).
- [4] A. Hubert, R. Schafer. Magnetic domains. Springer-Verlag, Heidelberg–Berlin (1998). 696 p.
- [5] М.А. Шамсутдинов, В.Н. Назаров, И.Ю. Ломакина, А.Т. Харисов, Д.М. Шамсутдинов. Ферро- и антиферромагнитодинамика. Нелинейные колебания, волны и солитоны. Наука, М. (2009). 456 с.
- [6] А.И. Мищек, С.С. Семянников. ФТТ **11**, 1103 (1969).
- [7] В.Г. Барьяхтар, Ю.И. Горобец. Цилиндрические магнитные домены и их решетки. Наук. думка, Киев (1988). 168 с.
- [8] D.I. Paul. J. Phys. C **12**, 585 (1979).
- [9] А.Ф. Кабыченков, В.Г. Шавров. ФТТ **29**, 202 (1987).
- [10] М.А. Шамсутдинов, В.Г. Веселаго, М.М. Фарзтдинов, Е.Г. Екомасов. ФТТ **32**, 497 (1990).
- [11] И.И. Крюков, Л.Н. Мысовская, К.С. Сахаев. ФММ **10**, 37 (1990).
- [12] В.В. Плавский, М.А. Шамсутдинов, Е.Г. Екомасов, А.Г. Давлетбаев. ФММ **75**, 26 (1993).
- [13] П.П. Дьячук, Е.В. Лариков. ФТТ **37**, 3735 (1995).
- [14] D.I. Paul. Phys. Rev. Lett. **53**, 1649 (1982).
- [15] S.C. Badescu, V. Badescu, N. Rezlescu, R. Badescu. J. Magn. Magn. Mater. **193**, 132 (1999).
- [16] А.Н. Григоренко, С.А. Мишин, Е.Г. Рудашевский. ФТТ **30**, 2948 (1988).
- [17] В.В. Махро. ФТТ **29**, 2461 (1987).
- [18] А.И. Морозов, А.С. Сигов. ФТТ **46**, 385 (2004).
- [19] В.В. Кругляк, А.Н. Кучко, В.И. Фиохин. ФТТ **46**, 842 (2004).
- [20] О.М. Браун, Ю.С. Кившарь. Модель Френкеля–Конторовой. Концепции, методы, приложения. Физматлит, М. (2008). 519 с.
- [21] Т.И. Белова, А.Е. Кудрявцев. УФН **167**, 377 (1997).
- [22] Л.В. Якушевич, Л.А. Краснобай. Биофизика **52**, 2, 237 (2007).
- [23] Р.Н. Гарифуллин, Л.А. Калякин, М.А. Шамсутдинов. Журн. вычисл. математики и мат. физики **47**, 1208 (2007).
- [24] Е.Г. Екомасов, Ш.А. Азаматов, Р.Р. Муртазин. ФММ **105**, 341 (2008).
- [25] Р.М. Вахитов, Е.Р. Гареева, М.М. Вахитова, А.Р. Юмагузин. ФТТ **51**, 1751 (2009).
- [26] Е.Г. Екомасов, Ш.А. Азаматов, Р.Р. Муртазин, А.М. Гумеров, А.Д. Давлетшина. Изв. РАН. Сер. физ. **74**, 10, 1520 (2010).
- [27] A. Chacon, A. Bellorin, L.E. Guerrero, G.A. Gonzalez. Phys. Rev. E **77**, 046 212 (2008).
- [28] M.B. Fogel, S.E. Trullinger, A.R. Bishop, J.A. Krumhandl. Phys. Rev. B **15**, 1578 (1976).
- [29] Е.М. Маслов. Phys. Lett. A **151**, 364 (1988).
- [30] I. Habibullin, A. Kundu. Nucl. Phys. B **795**, 549 (2008).
- [31] А.М. Косевич, А.С. Ковалев. Введение в нелинейную физическую механику. Наук. думка, Киев (1989). 304 с.
- [32] Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. Численные методы. Наука, М. (1987). 600 с.
- [33] В.Ф. Коваленко, Э.Л. Нагаев. УФН **148**, 561 (1986).
- [34] Е.Г. Екомасов, М.А. Шабалин. ПММ **101**, S 48 (2006).
- [35] А.М. Балбашов, А.В. Залесский, В.Г. Кривенко, Е.В. Синицын. Письма в ЖТФ **14**, 293 (1988).
- [36] Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. Мир, М. (1988). 694 с.
- [37] В.В. Киселев, А.А. Расковалов. ТМФ **163**, 94 (2010).
- [38] В.Г. Барьяхтар, Б.А. Иванов, М.В. Четкин. УФН **146**, 417 (1985).
- [39] В.Н. Назаров, Р.Р. Шафиев, М.А. Шамсутдинов, И.Ю. Ломакина. ФТТ **54**, 282 (2012).