

02

Однофотонный и двухфотонный каналы распада сверхтекучего тока в тонких кольцах, облучаемых когерентным низкочастотным электромагнитным полем

© А.И. Агафонов

Национальный исследовательский центр „Курчатовский институт“,
Москва, Россия

E-mail: aai@issph.kiae.ru

(Поступила в Редакцию 10 января 2012 г.)

Предсказан распад сверхпроводящего тока в тонких кольцах, облучаемых когерентным низкочастотным электромагнитным полем. Когерентные осцилляции всего сверхпроводящего конденсата, вызванные этим полем, приводят к испусканию фотонов, энергия которых определяется, в основном, дискретными значениями энергии сверхпроводящего кольца. Толщина кольца должна быть меньше как скин-слоя для этого поля, так и лондоновской глубины проникновения. Впервые исследован дискретный распад сверхтока, сопровождающийся испусканием одного и двух фотонов. Представлены численные результаты для угловых и энергетических распределений фотонов, а также для времени жизни сверхтоковых состояний в зависимости от размеров колец и числа флюксоидов в начальном состоянии.

1. Введение

Ток в многосвязанных сверхпроводниках, который в принципе метастабилен, может изменяться квантовыми скачками, при которых число квантов магнитного потока, захваченных в сверхпроводнике, изменяется на одну или несколько единиц [1]. Для спонтанного затухания сверхтока такой квантовый скачок требует коллективного перехода всех куперовских пар, вовлеченных в ток [2]. Вероятность же подобной макроскопической флуктуации является исчезающе малой, что и обуславливает устойчивость сверхтекучего тока в кольце. Изменения числа квантов магнитного потока и соответственно дискретные переходы сверхтока можно вызывать приложением внешнего магнитного поля к кольцу [3–6]. Также квантованный распад токовых состояний можно индуцировать неупругим магнитным рассеянием нейтронов сверхпроводящим кольцом [7]. Однако сечение рассеяния оказывается весьма малым.

Неустойчивость сверхтока в кольцах по отношению к электромагнитному вакууму, насколько нам известно, ранее не изучалась. Оператор взаимодействия можно представить в виде $\int \mathbf{j} \mathbf{A} d\mathbf{r}$, где \mathbf{j} — оператор плотности тока в кольце, \mathbf{A} — оператор вектор-потенциала, порождаемого кольцом электромагнитного поля. Легко убедиться, что для макроскопических значений числа бозонов $N \gg 1$ в сверхпроводнике матричный элемент этого оператора при испускании одного фотона практически нулю. Это связано с тем, что при переходе токовых состояний $m \rightarrow m_1$ под интегралом содержится функция $\exp(iN(m - m_1)\varphi)$ с очень большой суммарной фазой когерентного конденсата. Здесь m и m_1 есть числа флюксоидов в начальном и конечном состояниях конденсата.

Основная идея настоящей работы состоит в следующем. Как известно, ускоренные заряженные частицы

излучают электромагнитные волны. При облучении достаточно тонкого кольца когерентным электромагнитным полем, на регулярное круговое движение куперовских пар в сверхтоковом состоянии это внешнее поле накладывает когерентные осцилляции всего конденсата. Осциллирующий как целое конденсат должен излучать фотоны, энергия которых определяется в основном дискретными значениями энергии сверхпроводящего кольца.

Работа посвящена теоретическому исследованию однофотонного и двухфотонного каналов распада сверхтекучего тока в тонких кольцах, облучаемых когерентным низкочастотным электромагнитным полем. Впервые получены вероятности этих процессов и показано, что возмущение сверхпроводящего конденсата этим полем приводит к конечным, измеряемым временам жизни токовых состояний в тонких сверхпроводящих кольцах относительно малых размеров.

2. Сверхтоковые состояния в поле когерентной волны

Рассмотрим сверхпроводящее, тонкое кольцо прямоугольного сечения с внутренним радиусом $a \gg \lambda$ (где λ — глубина проникновения поля) и внешним радиусом b таким, что $b - a \gg \lambda$ и $(b - a)/b \ll 1$. Толщина кольца d должна быть существенно меньше как толщины скин-слоя низкочастотного поля, которым облучается кольцо, так и глубины проникновения поля. Это условие необходимо для того, чтобы это поле одновременно действовало на весь конденсат. Кроме этого, частота этой когерентной волны считается много меньшей сверхпроводящей щели.

Кольцо находится в токовом состоянии с потоком магнитной индукции, захваченным в кольце, $\Phi_m = m\Phi_0$,

где m — число квантов магнитного потока (флюксоидов) $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$. Полный сверхток в кольце принимает лишь дискретные значения, пропорциональные m .

В теории Лондонов энергия состояния с квантовым числом m складывается из энергии магнитного поля, создаваемого сверхпроводящим током, и кинетической энергии конденсата. В общем случае эта энергия есть $E_m = E_0 m^2$, где характерная энергия кольца $E_0 = \Phi_0^2 / 2L$ определяется его коэффициентом самоиндукции L .

Волновую функцию одной куперовской пары можно представить в виде

$$\psi_m(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = f(\mathbf{r}_{12}) \exp(i\phi_m(\mathbf{r})) \chi_{12}, \quad (1)$$

где $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ — радиус-вектор центра масс связанной пары частиц, χ_{12} — синглетная спиновая функция. Нормированные функции $f(\mathbf{r}_{12})$ представляют внутреннее движение куперовской пары и имеют пространственный размер, определяющийся длиной когерентности сверхпроводника. Для БКШ-сверхпроводников это характерный масштаб порядка нескольких тысяч ангстрем, а для ВТСП-материалов — порядка нескольких десятков ангстрем. Движение пары как целого описывается функцией $\exp(i\phi_m(\mathbf{r}))$ в правой части (1).

Многочастичная волновая функция сверхпроводящего конденсата является антисимметричной по перестановке электронов. Это достигается введением оператора, который делает антисимметричным произведение синглетных спиновых функций χ_{ij} . Ниже рассматривается взаимодействие конденсата с электромагнитными полями, которое не оказывает влияния на спиновые переменные. Поэтому без каких-либо ограничений спиновую часть волновой функции конденсата можно опустить. Далее, мы будем предполагать, что при переходе супертоковых состояний в кольце $m \rightarrow m_1$ функции $f(\mathbf{r}_{ij})$ не меняются. В этом случае для каждого бозона будет важна только фазовая функция в (1).

Макроскопическое квантовое состояние любого сверхпроводника характеризуется фазовым упорядочением куперовских пар, которые имеют идентичные волновые функции. Это приводит к когерентному состоянию конденсата, в котором все куперовские пары находятся в одном и том же квантовом состоянии с хорошо определенной фазой [8–11]. Поэтому многочастичная волновая функция сверхпроводящего конденсата является суперпозицией состояний $|N\rangle$ с различным числом куперовских пар N . Эта суперпозиция имеет вид когерентного волнового пакета

$$\Psi_m = \sum_N c_N \psi_{N_m} |N\rangle, \quad (2)$$

где c_N есть амплитуда вероятности состояния с числом куперовских пар N , а координатная волновая функция этого состояния определяется фазой в (1),

$$\psi_{N_m} = \frac{1}{\sqrt{\Omega_r}} \exp(iN\phi_m). \quad (3)$$

В m -токовом состоянии сверхпроводящего конденсата $\phi_m = m\varphi$, где φ — азимутальный угол в цилиндрических координатах, привязанных к кольцу ($a \leq \rho \leq b$ и $-d/2 \leq z \leq d/2$).

Отметим, что когерентный волновой пакет (2)–(3) имеет нормировку $\int |\Psi_m|^2 d\mathbf{r} = 1$, где интеграл берется по объему кольца Ω_r .

Амплитуда c_N имеет острый максимум, расположенный при среднем числе куперовских пар N в кольце. Ширина этого пика ΔN есть среднеквадратичное отклонение числа бозонов в конденсате или, другими словами, неопределенность их числа. Конечно $\Delta N/N \ll 1$.

Как известно, N и ϕ_m являются канонически сопряженными величинами. Для рассматриваемых ниже колец отношение $\Delta N/N$ и неопределенность фазы $\Delta\phi_m$, связанные соотношением $\Delta\phi_m \Delta N \sim 1$ являются весьма малыми величинами. Поэтому фазу можно трактовать как квазиклассическую переменную [8]

$$\frac{d}{dt} \hbar \nabla \phi_m = \mathbf{F}(t), \quad (4)$$

где $\mathbf{F}(t)$ есть сила, действующая на частицы. Начальным условием уравнения (4) является $\phi_m(t=0) = m\varphi$. Воздействие на кольцо когерентного низкочастотного излучения можно описать силой

$$\mathbf{F}(t) = 3e\mathbf{E}_0 \cos(\omega_0 t), \quad (5)$$

где $2e$ есть заряд бозона, \mathbf{E}_0 есть напряженность этого внешнего когерентного поля с частотой ω_0 , много меньшей сверхпроводящей щели. Здесь мы учли, что длина волны поля много больше характерного размера кольца, так что поле можно считать однородным. Без ограничения общности, положим, что \mathbf{E}_0 направлено против оси y , для орта которой имеем $\mathbf{i}_y \mathbf{i}_\varphi = \cos\varphi$. Из (4) и (5) получим

$$\phi_m(\rho, \varphi, t) = m\varphi - \frac{2eE_0}{\hbar\omega_0} \rho \sin(\varphi) \sin(\omega_0 t). \quad (6)$$

Конечно, воздействие этого поля может привести к изменению энергии кольца в начальном состоянии. Чтобы избежать этого, будем рассматривать поля низкой интенсивности, для которых полевая добавка к скорости бозонов $\mathbf{v} = \hbar \nabla \phi_m / m_C$ (m_C — масса куперовской пары) является малой величиной. Используя (6), получим, что поправкой к энергии, которая пропорциональна E_0^2 , можно пренебречь при ограничении на напряженность поля

$$(\xi_0 b / m)^2 \ll 1, \quad (7)$$

где

$$\xi_0 = \frac{2eE_0}{\hbar\omega_0}. \quad (8)$$

Учитывая (5), можно полагать, что при условии (7) потенциальная энергия конденсата во внешнем поле

$$U_f = 2eN\mathbf{E}_0 \mathbf{r} \cos(\omega_0 t) \quad (9)$$

не влияет на энергию сверхтоковых состояний в кольце, а лишь приводит к изменению фазы (6) волновой функции конденсата.

3. Оператор перехода

Стимулированный переход сверхпроводящего конденсата из начального m -состояния в конечное m_1 -состояние ($m_1 < m$), сопровождаемый испусканием фотонов, означает одновременный переход всех куперовских пар, в котором угловой момент бозона меняется на величину $\hbar(m - m_1)$. Гамильтониан рассматриваемой системы можно представить в виде

$$H = H_0 + V + W + U_f. \quad (10)$$

Здесь H_0 есть гамильтониан для исходных сверхтоковых состояний кольца и свободного электромагнитного поля. Первый член оператора взаимодействия в правой части (10) есть

$$V = \int \mathbf{j}(N)\mathbf{A}d\mathbf{r}, \quad (11)$$

где \mathbf{j} — оператор плотности сверхпроводящего тока в кольце, \mathbf{A} — оператор вектор-потенциала, порождаемого кольцом электромагнитного поля, а интегрирование проводится по объему кольца. Учитывая нормировку волновой функции (3), второй член оператора взаимодействия можно представить в виде

$$W = \frac{2e^2N}{mc} \int \hat{\mathbf{A}}^2 d\mathbf{r}. \quad (12)$$

Последний член в правой части (10) есть потенциальная энергия конденсата (9).

В случае ограничения (7) можно пренебречь полевой поправкой к энергии кольца, а коммутатор $[U_f, H_0] \approx 0$. Затухание сверхтока в кольце с испусканием одного фотона определяется матричным элементом (11) в первом порядке теории возмущений. Двухфотонное затухание сверхтока будет задаваться составным матричным элементом от оператора (11) во втором порядке, описывающим процесс последовательного испускания двух фотонов, и матричным элементом оператора (12) в первом порядке, представляющим одновременное испускание двух фотонов. Ниже мы обоснуем утверждение, что для макроскопических колец оператор (12) определяет в основном двухфотонную эмиссию.

Оператор эволюции удовлетворяет уравнению

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} S(t, 0) = H_{\text{int}}(t)S(t, 0) \quad (13)$$

с начальным условием $S(0, 0) = 1$, где в представлении взаимодействия с учетом (10)

$$H_{\text{int}}(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} H_0 t\right) (V + W) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_0 t\right) + U_f. \quad (14)$$

Используя (13)–(14), в первом порядке по взаимодействиям (11)–(12) получим

$$S_1(t, 0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t U_f(t_1) dt_1\right) \tilde{S}(t, 0), \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1(t, 0) = & -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt_1 \exp\left(\frac{i}{\hbar} \left[H_0 t_1 + \int_0^{t_1} U_f(t_2) dt_2 \right]\right) \\ & \times (V + W) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \left[H_0 t_1 + \int_0^{t_1} U_f(t_2) dt_2 \right]\right). \end{aligned} \quad (16)$$

В (16) член с оператором W можно упростить, поскольку (12) коммутирует с классической энергией (9). Взаимодействие (11), связанное с оператором плотности сверхпроводящего тока в кольце, не коммутирует с U_f . Поэтому к плотности тока появится поправка, связанная с движением частиц в низкочастотном поле. Однако для слабых низкочастотных полей, удовлетворяющих (7), эта добавка оказывается малой, что будет обсуждаться в следующем разделе.

Легко видеть, что действие $\exp(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t U_f(t_1) dt_1)$ на волновую функцию начального состояния ψ_{N_m} (3) приводит к изменению фазы, соответствующему (6).

4. Однофотонное затухание сверхтока

Из (3) и (15)–(16) амплитуда однофотонного перехода сверхтока $m \rightarrow m_1$ есть

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{1k}, \psi_{m_1} | S | \psi_{m, 0} \rangle = & -\frac{i}{\hbar} \int_0^t V_{m_1, m}^{-\mathbf{k}, 0}(t, t_1) \\ & \times \exp\left(-\frac{it_1}{\hbar} (E_m - E_{m_1} - \hbar\omega_k)\right) dt_1. \end{aligned} \quad (17)$$

В правой части (17) матричный элемент оператора взаимодействия (11) есть

$$V_{m_1, m}^{\mathbf{k}, 0} = \left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_k}\right)^{1/2} \int \mathbf{l}_{k\sigma} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) (\tilde{\psi}_{N_{m_1}}^* \hat{\mathbf{j}} \tilde{\psi}_{N_m}) d\mathbf{r}, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{N_m}(\mathbf{r}, t_1) = & \psi_{N_m} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^{t_1} dt' U_f(t')\right), \\ \tilde{\psi}_{N_{m_1}}(\mathbf{r}, t, t_1) = & \psi_{N_{m_1}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^t dt' U_f(t')\right), \end{aligned} \quad (19)$$

$\mathbf{l}_{k\sigma}$ есть вектор поляризации фотона с волновым вектором \mathbf{k} и энергией $\hbar\omega_k$.

Используя (19), известное выражение для оператора плотности тока [1] и закон Био–Савара, ток перехода в (18) приводится к виду

$$\begin{aligned} (\tilde{\psi}_{N_{m_1}}^* \hat{\mathbf{j}} \tilde{\psi}_{N_m}) = & \mathbf{j}_{m_1 m}(\mathbf{r}, t, t_1; N) \\ & \times \exp[iN((m - m_1)\varphi - \xi_0 \rho \sin(\varphi) \sin(\omega_0 t))], \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{j}_{m_1 m} = \frac{e \hbar N}{m_C \Omega_r} \left\{ \frac{m + m_1}{\rho} \mathbf{i}_\varphi - \xi_0 (2 \sin(\omega_0 t_1) - \sin(\omega_0 t)) \mathbf{i}_y \right\} - \frac{1}{4\pi\lambda(N/\Omega_r)^2} \int \frac{f \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|} \mathbf{j}_{m_1 m}(\mathbf{r}_1) \times e^{iN[(m-m_1)(\varphi_1-\varphi) - \xi_0(\rho_1 \sin(\varphi_1) - \rho \sin(\varphi)) \sin(\omega_0 t)]}. \quad (20)$$

Диамагнитный ток перехода, который представлен вторым слагаемым в правой части (20), подавлен, поскольку под интегралом содержится быстро осциллирующая фазовая функция. Учитывая только парамагнитный ток перехода в (18), (20) преобразуется как

$$V_{m_1, m}^{k, 0}(N) = \frac{e}{m_C \Omega_r} \left(\frac{\hbar^3}{2\varepsilon_0 \omega_k} \right)^{1/2} \frac{2 \sin\left(\frac{k d}{2} \cos \theta_k\right)}{k \cos \theta_k} (I_1 - I_2). \quad (21)$$

Поскольку $\mathbf{i}_\varphi \mathbf{l}_{k\sigma} = \sin(\theta_l) \sin(\varphi_l - \varphi)$ и $\mathbf{i}_y \mathbf{l}_{k\sigma} = \sin(\theta_l) \sin(\varphi_l)$, где θ_l и φ_l есть полярный и азимутальный углы вектора $\mathbf{l}_{k\sigma}$, в (21) введены обозначения

$$I_1(N) = N(m + m_1) \sin(\theta_l) \int_a^b d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \sin(\varphi_l - \varphi) \times \exp(-ik_\rho \rho \cos(\varphi - \varphi_k) + iN[(m - m_1) \times \varphi - \xi_0 \rho \sin(\varphi) \sin(\omega_0 t)]),$$

$$I_2 = N\xi_0 [2 \sin(\omega_0 t_1) - \sin(\omega_0 t)] \sin(\theta_l) \sin(\varphi_l) \times \int_a^b \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \exp(-ik_\rho \rho \cos(\varphi - \varphi_k) + iN[(m - m_1)\varphi - \xi_0 \rho \sin(\varphi) \sin(\omega_0 t)]). \quad (22)$$

Здесь $k_\rho = k \sin(\theta_k)$, θ_k и φ_k есть полярный и азимутальный углы волнового вектора фотона.

В слабых низкочастотных полях, удовлетворяющих (7), $I_2 \ll I_1$. Поэтому можно ограничиться вычислением интеграла I_1 . Используя известное разложение плоских волн по функциям Бесселя, имеем

$$\exp(-ik_\rho \rho \cos(\varphi - \varphi_k)) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(k_\rho \rho) \exp(ip(\varphi - \tilde{\varphi}_k)), \quad (23)$$

где $\tilde{\varphi}_k = \varphi_k + \pi/2$, и

$$\exp(-iN\xi_0 \rho \sin(\varphi) \sin(\omega_0 t)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(N\xi_0 \rho \sin(\varphi)) \times \exp(-in\omega_0 t). \quad (24)$$

С учетом (23)–(24) интеграл в правой части $I_1(N)$ (22) преобразуется к виду

$$I_1(N) = N \frac{m + m_1}{2i} \sin(\theta_l) \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{-ip\tilde{\varphi}_k} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-in\omega_0 t} \times \int_a^b J_p(k_\rho \rho) d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi J_n(N\xi_0 \rho \sin(\varphi)) \times (e^{i(\varphi_l - \varphi)} - e^{-i(\varphi_l - \varphi)}) e^{i(N(m - m_1) + p)\varphi}. \quad (25)$$

Интеграл по углу φ в (25) сводится к

$$I_\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi J_n(N\xi_0 \rho \sin \varphi) e^{iM_\pm \varphi},$$

где $M_\pm = N_p \pm 1$ и $N_p = N(m - m_1) + p$. Согласно [12], имеем

$$I_\varphi = \pi \left(e^{i\frac{\pi}{2} M_\pm} + (-1)^n e^{-i\frac{\pi}{2} M_\pm} \right) J_{\frac{n - M_\pm}{2}} \times \left(\frac{N}{2} \xi_0 \rho \right) J_{\frac{n + M_\pm}{2}} \left(\frac{N}{2} \xi_0 \rho \right). \quad (26)$$

В (25) удобно прийти к суммированию только по положительным значениям n . Используя (26), в результате получим

$$I_1(N) = -i\pi N(m + m_1) \sin(\theta_l) \int_a^b d\rho \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{-ip\tilde{\varphi}_k} J_p(k_\rho \rho) \times \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{2} N_p\right) \left[e^{i\varphi_l} J_{-\frac{M_-}{2}} \left(\frac{N}{2} \xi_0 \rho\right) J_{\frac{M_-}{2}} \left(\frac{N}{2} \xi_0 \rho\right) + e^{-i\varphi_l} J_{-\frac{M_+}{2}} \left(\frac{N}{2} \xi_0 \rho\right) J_{\frac{M_+}{2}} \left(\frac{N}{2} \xi_0 \rho\right) \right] + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} N_p\right) \sum_{k=1}^{\infty} \cos(2k\omega_0 t) \times \left[e^{i\varphi_l} J_{k - \frac{M_-}{2}} J_{k + \frac{M_-}{2}} + e^{-i\varphi_l} J_{k - \frac{M_+}{2}} J_{k + \frac{M_+}{2}} \right] \left(\frac{N}{2} \xi_0 \rho\right) - 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} N_p\right) \sum_{k=0}^{\infty} \sin((2k + 1)\omega_0 t) \times \left[e^{i\varphi_l} J_{k + \frac{1}{2} - \frac{M_-}{2}} J_{k + \frac{1}{2} + \frac{M_-}{2}} + e^{-i\varphi_l} J_{k + \frac{1}{2} - \frac{M_+}{2}} J_{k + \frac{1}{2} + \frac{M_+}{2}} \right] \right\}. \quad (27)$$

В фигурных скобках в правой части (27) имеется три члена. Первый и второй члены являются ненулевыми только для нечетных значений $N_p = N(m - m_1) + p$. Отсюда $M_\pm = N_p \pm 1$ являются четными и $\frac{1}{2}(N_p \pm 1)$

целыми. Для третьего члена в (27) N_p являются четными, а индексы функций Бесселя $k + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}M_{\pm}$ являются целыми.

Используя свойства функций Бесселя, первый член в фигурных скобках в (27) приводим к виду

$$I_1^{(1)}(N) = -i\pi N(m + m_1) \sin(\theta_l) \int_a^b d\rho \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{-ip\tilde{\varphi}_k} J_p(k\rho\rho) \times \left[e^{i\varphi_l} J_{\frac{N(m-m_1)+p-1}{2}}\left(\frac{N}{2}\xi_0\rho\right) - e^{-i\varphi_l} J_{\frac{N(m-m_1)+p+1}{2}}\left(\frac{N}{2}\xi_0\rho\right) \right]. \tag{28}$$

В выражениях (27) и (28) удобно воспользоваться формулой Лангера для асимптотики функций Бесселя при больших их индексах и аргументах [13]. В нашем случае $v = (N(m - m_1) + p \pm 1)/2$, $v x = N\xi_0\rho/2$ и

$$J_v(vx) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\text{arth}(s)}{s} - 1 \right)^{1/2} K_{1/3}(\xi), & x \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{\text{arctg}(s)}{s} \right)^{1/2} (J_{1/3}(\xi) + J_{-1/3}(\xi)), & x \geq 1. \end{cases} \tag{29}$$

Здесь $s = \sqrt{|1 - x^2|}$ и

$$\xi = \begin{cases} v(\text{arth}(s) - s), & x \leq 1 \\ v(s - \text{arctg}(s)), & x \geq 1. \end{cases} \tag{30}$$

Учитывая асимптотику $K_{1/3}(\xi)$ и $J_{\pm 1/3}(\xi)$, наиболее значимый результат для вероятности перехода токовых состояний в кольце с испусканием фотона следует ожидать при значениях $x > 1$. В этом случае, согласно (29), (30), имеем

$$J_{\frac{N(m-m_1)+p\pm 1}{2}}\left(\frac{N}{2}\xi_0\rho\right) = \frac{4}{\pi N} \times \left[\xi_0^2\rho^2 - \left(m - m_1 + \frac{p \pm 1}{N}\right)^2 \right]^{-1/2} \cos\left(\xi(\rho) - \frac{\pi}{4}\right), \tag{31}$$

где

$$\xi = \frac{1}{2}(N(m - m_1) + p \pm 1) \left[\sqrt{x^2 - 1} - \text{arctg} \sqrt{x^2 - 1} \right].$$

Заменяя быстро осциллирующую функцию в (31) на ее среднее значение, для этого первого вклада в $I_1^{(1)}(N)$ получим

$$I_1^{(1)}(N) = -2i(m + m_1) \sin(\theta_l) \int_a^b d\rho \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{-ip\tilde{\varphi}_k} J_p(k\rho\rho) \times \left[e^{i\varphi_l} \left[\xi_0^2\rho^2 - \left(m - m_1 + \frac{p - 1}{N}\right)^2 \right]^{-1/2} - e^{-i\varphi_l} \left[\xi_0^2\rho^2 - \left(m - m_1 + \frac{p + 1}{N}\right)^2 \right]^{-1/2} \right], \tag{32}$$

где $N(m - m_1) + p$ является нечетным.

Конечно, число бозонов в кольце является макроскопическим, а сумма по p в (32) набирается при значениях $p \ll N$. Последняя есть [14]:

$$\sum_p' e^{-ip\tilde{\varphi}_k} J_p(k\rho\rho) = \begin{cases} \cos(k\rho \sin(\theta_k) \cos(\varphi_k)), & N(m - m_1) \text{ нечетно} \\ -i \sin(k\rho \sin(\theta_k) \cos(\varphi_k)), & N(m - m_1) \text{ четно.} \end{cases}$$

Здесь знак штрих у суммы означает по всем четным значениям p при нечетных значениях $N(m - m_1)$ и по всем нечетным значениям p для четных значений $N(m - m_1)$. В результате (32) приводится к виду

$$I_1^{(1)}(N) = 4(m + m_1) \sin(\theta_l) \sin(\varphi_l) \times \int_a^b \frac{d\rho}{\sqrt{\xi_0^2\rho^2 - (m - m_1)^2}} \begin{cases} \cos(k\rho \sin(\theta_k) \cos(\varphi_k)) \\ -i \sin(k\rho \sin(\theta_k) \cos(\varphi_k)). \end{cases} \tag{33}$$

Если внутренний радиус кольца мало отличается от внешнего, $(b - a)/b \ll 1$, при условии $b - a \gg \lambda$, то интеграл в правой части (33) дает

$$I_1^{(1)}(N) = \frac{4(m + m_1)}{k\sqrt{\xi_0^2 R^2 - (m - m_1)^2}} \frac{\sin(\theta_l) \sin(\varphi_l)}{\sin(\theta_k) \cos(\varphi_k)} \times \begin{cases} \sin(kb \sin(\theta_k) \cos(\varphi_k)) - \sin(ka \sin(\theta_k) \cos(\varphi_k)), & N(m - m_1) \text{ нечетно} \\ i(\cos(kb \sin(\theta_k) \cos(\varphi_k)) - \cos(ka \sin(\theta_k) \cos(\varphi_k))), & N(m - m_1) \text{ четно.} \end{cases} \tag{34}$$

Подчеркнем, что формула (34) применима для каналов переходов $m \rightarrow m_1$, для которых $\xi_0 a > (m - m_1)$ и $\xi_0 b > (m - m_1)$. При этом $R, a < R < b$, определяется теоремой о среднем для интеграла в правой части (33).

Теперь рассмотрим два оставшихся вклада в $I_1(N)$ (27). Для них функции Бесселя, входящие парными произведениями, являются независимыми. При

$$x_{\pm} = \frac{N\xi_0\rho}{N(m - m_1) + p \pm 1 \pm 2k} > 1$$

наиболее медленно меняющая часть произведения $J_{k-\frac{M_{-}}{2}} J_{k+\frac{M_{-}}{2}}$ пропорциональна функции $\cos(\xi(x_{-}) - \xi(x_{+}))$, где $\xi(x_{\pm})$ определяется (30). Наши расчеты показывают, что для колец со средним числом куперовских пар $N > 10^9$ и их плотностью $N = 10^{21} \text{ cm}^{-3}$ эта функция является быстро осциллирующей и дающей нулевое среднее значение. Поэтому для колец с относительно большим числом бозонов вклад в $I_1(N)$ этих членов в правой части (27) будет мал по сравнению с первым членом.

Отметим, что последнее утверждение не относится к мезоскопическим кольцам с характерным размером порядка глубины проникновения поля.

Из (7), (8) и условия $x > 1$ получим окончательное ограничение на величину напряженности низкочастотного поля

$$m - m_1 < \frac{2eE_0R}{\hbar\omega_0} \ll m. \quad (35)$$

Подставляя (34) в (21), квадрат модуля матричного элемента однофотонного распада сверхтока в кольце приведем к виду

$$|V_{m_1 m}^{k0}(N)|^2 = \frac{2^5 e^2 \hbar^3}{c \varepsilon_0 m_c^2 \Omega_f^2} \frac{(m + m_1)^2}{(\xi_0^2 R^2 - (m - m_1)^2)} \times \frac{\sin^2(\frac{1}{2}kd \cos(\theta_k))}{k^5 \cos^2(\theta_k)} \frac{\sin^2(\theta_l) \sin^2(\varphi_l)}{\sin^2(\theta_k) \cos^2(\varphi_k)} F, \quad (36)$$

где c — скорость света в вакууме и

$$F(N) = \begin{cases} [\sin(kb \sin(\theta_k) \cos(\varphi_k)) - \sin(ka \sin(\theta_k) \cos(\varphi_k))]^2, & N(m - m_1) \text{ нечетно} \\ [\cos(kb \sin(\theta_k) \cos(\varphi_k)) - \cos(ka \sin(\theta_k) \cos(\varphi_k))]^2, & N(m - m_1) \text{ четно.} \end{cases} \quad (37)$$

С учетом (36), (37) вероятность стимулированного низкочастотным излучением однофотонного распада сверхтока в канале $m \rightarrow m_1$ есть

$$w_{m_1 m}^s = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_N \sum_k |c_{Nm}|^2 \langle |V_{m_1 m}^{k0}(N)|^2 \rangle_{\text{pol}} \times \delta(E_m - E_{m_1} - \hbar\omega_k), \quad (38)$$

где $\langle \dots \rangle_{\text{pol}} = \pi^{-1} \int_0^{2\pi} d\varphi_l \dots$ означает усреднение по поляризации фотона.

Сначала выполним суммирование по N . Здесь удобно воспользоваться очевидным свойством амплитуд вероятности состояния c_N с числом куперовских пар N в волновом пакете (2): $\sum_{\text{четные } N} |c_N|^2 = \sum_{\text{нечетные } N} |c_N|^2 = \frac{1}{2}$.

Если $m - m_1$ является нечетным, то, используя (37), имеем

$$\sum_N |c_{Nm}|^2 F(N) = 2 \sin^2 \left(\frac{1}{2} k(b - a) \sin(\theta_k) \cos(\varphi_k) \right). \quad (39)$$

Соответственно для четного канала распада получим

$$\sum_N |c_{Nm}|^2 F(N) = 4 \sin^2 \left(\frac{1}{2} k(b + a) \sin(\theta_k) \cos(\varphi_k) \right) \times \sin^2 \left(\frac{1}{2} k(b - a) \sin(\theta_k) \cos(\varphi_k) \right). \quad (40)$$

Теперь в (38) проведем усреднение по поляризации фотонов. Используя $\mathbf{k}|_{\mathbf{k}\sigma} = 0$ и действительные векторы поляризации, имеем

$$\sin^2(\theta_l) = (1 + \text{tg}^2(\theta_k) \cos^2(\varphi_l - \varphi_k))^{-1}.$$

После интегрирования по φ_l вероятность перехода (38) приводится к виду

$$w_{m_1 m}^s = 2^{13} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^4 \left(\frac{2m_e}{m_c} \right)^2 \frac{c \lambda_e^2 R_L^3}{\Omega_f^2} \times \frac{F_{m-m_1}^0(k)}{(m + m_1)(m - m_1)^3 (\xi_0^2 R^2 - (m - m_1)^2)}, \quad (41)$$

где α — постоянная тонкой структуры, m_e — масса электрона, λ_e — комптоновская длина волны электрона, $R_L = L/\mu_0$, $k = \frac{E_0}{c\hbar} (m^2 - m_1^2)$ — модуль волнового вектора испускаемого фотона и

$$F_{m-m_1}^0 = \int_0^{2\pi} d\varphi_k \int_0^\pi d\theta_k \sin(\theta_k) F_{m-m_1}(\theta_k, \varphi_k; k). \quad (42)$$

Функция $F_{m-m_1}(\theta_k, \varphi_k; k)$, определяющая угловые распределения испускаемых фотонов, имеет вид

$$F_{m-m_1}(\theta_k, \varphi_k; k) = \frac{\sin^2 \left(\frac{1}{2} kd \cos(\theta_k) \right)}{\cos^2(\theta_k)} \times \frac{\sin^2 \left(\frac{1}{2} k(b - a) \sin(\theta_k) \cos(\varphi_k) \right)}{\sin^2(\theta_k) \cos^2(\varphi_k)} \times \left[|\cos(\theta_k)| \left(1 + \frac{1 + \cos^2(\theta_k)}{\sin^2(\theta_k)} \cos(2\varphi_k) \right) - 2 \frac{\cos(2\varphi_k)}{\text{tg}^2(\theta_k)} \right] f, \quad (43)$$

где

$$f = \begin{cases} 1, & m - m_1 \text{ нечетно} \\ 2 \sin^2 \left(\frac{1}{2} k(b + a) \sin(\theta_k) \cos(\varphi_k) \right), & m - m_1 \text{ четно.} \end{cases} \quad (44)$$

Выражение для вероятности перехода (41)–(44) получено для напряженностей низкочастотного поля, удовлетворяющих (35), где $R(a < R < b)$ определяется теоремой о среднем значении для интеграла в правой части (33). То есть этой формулой можно пользоваться только для каналов распада токовых состояний $m \rightarrow m_1$ в сверхпроводящем кольце, удовлетворяющих условиям $\xi_0 a > (m - m_1)$ и $\xi_0 b > (m - m_1)$. Эти переходы можно назвать разрешенными. Согласно (35) с ростом амплитуды низкочастотного поля число разрешенных переходов увеличивается.

В случае $\xi_0 b < (m - m_1)$ вероятность канала $m \rightarrow m_1$ будет также конечной, но экспоненциально малой в соответствии с асимптотикой функции Бесселя $K_{1/3}(\xi)$ в (29). Эти переходы можно трактовать как запрещенные переходы.

Если $\xi_0 a < (m - m_1)$ и $\xi_0 b > (m - m_1)$, то существует значение ρ , для которого $\xi_0 \rho = (m - m_1)$. Тогда в интервале (a, ρ) значения $x < 1$, а в области (ρ, b) $x > 1$, что определяет функцию $J_\nu(vx)$ (29), а матричный элемент перехода можно найти только численными методами. Очевидно, что вероятность такого канала распада будет меньше вероятности для разрешенного перехода.

Поскольку вероятность перехода (41) явным образом обратно пропорциональна квадрату объема кольца, для колец малого размера можно ожидать большее значение вероятности однофотонного распада сверхтока.

5. Двухфотонное затухание сверхтока

Согласно (21), составной матричный элемент оператора (11) во втором порядке теории возмущений явным образом обратно пропорционален квадрату объема кольца. В то же время двухфотонный матричный элемент оператора (12) в первом порядке обратно пропорционален первой степени объема кольца. Поэтому для макроскопических колец мы ограничимся вычислением последнего. Это означает, что мы будем исследовать процесс одновременного испускания двух фотонов сверхпроводящим кольцом.

Учитывая (12) и (15), (16), для амплитуды двухфотонного перехода находим

$$\langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2, \psi_{m_1} | S | \psi_m, 0 \rangle = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t W_{m_1, m}^{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2, 0} \times \exp\left(-\frac{it_1}{\hbar}(E_m - E_{m_1 - \hbar\omega_{k_1} - \hbar\omega_{k_2}})\right) dt_1. \quad (45)$$

В (45) матричный элемент оператора взаимодействия (12)

$$W_{m_1, m}^{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2, 0} = \frac{2e^2 N}{m_C \Omega_r} \int d\mathbf{r} \langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | \mathbf{A} | 0 \rangle \psi_{N m_1}^* \tilde{\psi}_{N m} \quad (46)$$

с учетом (3) и (19) приводится к виду

$$W_{m_1, m}^{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2, 0}(N) = \frac{e^2}{m_C \Omega_r} \frac{\hbar(\mathbf{l}_{k_1 \sigma_1} \mathbf{l}_{k_2 \sigma_2})}{\varepsilon_0 \sqrt{\omega_{k_1} \omega_{k_2}}} \times \frac{2 \sin\left(\frac{d}{2}(k_1 \cos \theta_{k_1} + k_2 \cos \theta_{k_2})\right)}{k_1 \cos \theta_{k_1} + k_2 \cos \theta_{k_2}} I_3(N), \quad (47)$$

где

$$I_3(N) = N \int_a^b \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \exp\left(iN[(m - m_1)\varphi - \xi_0 \rho \sin(\varphi) \sin(\omega_0 t)]\right) \exp\left(ik_1 \rho \sin(\theta_{k_1}) \cos(\varphi - \varphi_{k_1}) - ik_2 \rho \sin(\theta_{k_2}) \cos(\varphi - \varphi_{k_2})\right), \quad (48)$$

$\mathbf{l}_{k_1 \sigma_1}$ и $\mathbf{l}_{k_2 \sigma_2}$ — векторы поляризации фотонов с энергиями $\hbar\omega_{k_1}$ и $\hbar\omega_{k_2}$, θ_{k_1} , θ_{k_2} и φ_{k_1} , φ_{k_2} — полярные и азимутальные углы их волновых векторов.

Используя процедуру, представленную выше при получении выражения $I_1^{(1)}(N)$ (28), главный вклад в (48) для макроскопических колец есть

$$I_3^{(1)}(N) = 2\pi N \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{-ip\tilde{\varphi}_{k_1}} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{-il\tilde{\varphi}_{k_2}} \times \int_a^b \rho d\rho J_p(k_1 \rho \sin \theta_{k_1}) J_l(k_2 \rho \sin \theta_{k_2}) J_{\frac{N(m-m_1)+p+l}{2}}^2 \left(\frac{N}{2} \xi_0 \rho\right). \quad (49)$$

Здесь $\tilde{\varphi}_{k_{1,2}} = \varphi_{k_{1,2}} + \pi/2$ и целое $N(m - m_1) + p + l$ является четным. Для последней функции Бесселя под интегралом в правой части (49) мы также используем формулу Лангера для асимптотики функций Бесселя при больших их индексах и аргументах [15]. В этом случае $v = (N(m - m_1) + p + l)/2$ и $vx = \frac{N}{2} \xi_0 \rho$. Наиболее значимый результат для вероятности двухфотонного перехода токовых состояний следует ожидать при значениях $x = N\xi_0 \rho / (N(m - m_1) + p + l) > 1$. Согласно (29), (30), получим

$$J_v^2(vx) = \frac{4}{\pi N} \left[\xi_0^2 \rho^2 - \left(m - m_1 + \frac{p + l}{N}\right)^2 \right]^{-1/2} \times \cos^2\left(\xi(\rho) - \frac{\pi}{4}\right), \quad (50)$$

где

$$\xi = \frac{1}{2}(N(m - m_1) + p + l) \left[\sqrt{x^2 - 1} - \arctg \sqrt{x^2 - 1} \right].$$

Заменяя быстро осциллирующую функцию в (50) на ее среднее значение и полагая, что суммы по p, l в (49) набираются при значениях $p, l \ll N$, выражение для $I_3^{(1)}(N)$ приведем к виду

$$I_3^{(1)}(N) = 4 \int_a^b \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\xi_0^2 \rho^2 - (m - m_1)^2}} \times \sum_p' e^{-ip\tilde{\varphi}_{k_1}} J_p(k_1 \rho \sin \theta_{k_1}) \sum_p' e^{-il\tilde{\varphi}_{k_2}} J_l(k_2 \rho \sin \theta_{k_2}). \quad (51)$$

В (51) штрих у сумм связан с тем, что $N(m - m_1) + p + l$ является четным. Если $N(m - m_1)$ является нечетным, то суммирование проводится по всем значениям p и l , при которых $p + l$ является нечетным. При четных значениях $N(m - m_1)$ значения $p + l$ должны быть четными. Здесь суммирование производится по всем четным значениям p и l , а также по всем только нечетным значениям как p , так и l . Эти суммы легко

вычисляются [14]. В результате имеем

$$I_3^{(1)}(N) = 4 \int_a^b \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\xi_0^2 \rho^2 - (m - m_1)^2}} \times \begin{cases} -i \sin(\rho\chi), & N(m - m_1) \text{ нечетно} \\ \cos(\rho\chi), & N(m - m_1) \text{ четно} \end{cases}, \quad (52)$$

где

$$\chi = k_1 \sin \theta_{k_1} \cos \varphi_{k_1} + k_2 \sin \theta_{k_2} \cos \varphi_{k_2}. \quad (53)$$

Если внутренний радиус кольца мало отличается от внешнего, $(b - a)/b \ll 1$, при условии $b - a \gg \lambda$, то для интеграла в правой части (52) можно получить

$$I_3^{(1)} = \frac{2(a + b)}{\sqrt{\xi_0^2 R_2^2 - (m - m_1)^2}} \frac{T}{\chi}, \quad (54)$$

где

$$T = \begin{cases} i(\cos(\chi b) - \cos(\chi a)), & N(m - m_1) \text{ нечетно} \\ \sin(\chi b) - \sin(\chi a), & N(m - m_1) \text{ четно} \end{cases}. \quad (55)$$

Подставляя (54), (55) в (47) и используя (45), получаем вероятность стимулированного низкочастотным излучением распада сверхтока в канале $m \rightarrow m_1$ с одновременным испусканием двух фотонов:

$$w_{m_1 m}^f = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_N \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} |c_{Nm}|^2 \langle |W_{m_1 m}^{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2, 0}(N)|^2 \rangle_{\text{pol}} \times \delta(E_m - E_{m_1} - \hbar\omega_{k_1} - \hbar\omega_{k_2}), \quad (56)$$

где

$$\langle \dots \rangle_{\text{pol}} = (2\pi)^{-2} \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \int_0^{2\pi} d\varphi_{l_1} \int_0^{2\pi} d\varphi_{l_2} \dots$$

означает усреднение по поляризациям фотонов, φ_{l_1} и φ_{l_2} есть азимутальные углы векторов поляризации фотонов.

При суммировании по N мы опять воспользуемся свойством, представленным в разделе 4, для амплитуд вероятности состояния c_N . Если $m - m_1$ является нечетным для канала перехода $m \rightarrow m_1$, число $N(m - m_1)$ может быть как четным, так и нечетным. В этом случае имеем

$$\sum_N |c_{Nm}|^2 |T|^2 = 2 \sin^2 \left(\frac{1}{2} \chi(b - a) \right). \quad (57)$$

Соответственно для любого четного канала перехода $m \rightarrow m_1$ значение $N(m - m_1)$ всегда четно

$$\sum_N |c_{Nm}|^2 |T|^2 = 4 \cos^2 \left(\frac{1}{2} \chi(b + a) \right) \sin^2 \left(\frac{1}{2} \chi(b - a) \right). \quad (58)$$

Усреднение по поляризациям фотонов в (56) сводится к вычислению функции

$$D(\theta_{k_1}, \varphi_{k_1}, \theta_{k_2}, \varphi_{k_2}) = (2\pi)^{-2} \times \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \int_0^{2\pi} d\varphi_{l_1} \int_0^{2\pi} d\varphi_{l_2} (\mathbf{l}_{k_1 \sigma_1} \mathbf{l}_{k_2 \sigma_2})^2, \quad (59)$$

где

$$\mathbf{l}_{k_1 \sigma_1} \mathbf{l}_{k_2 \sigma_2} = \frac{\text{tg}(\theta_{k_1}) \cos(\varphi_{k_1} - \varphi_{l_1}) \times \text{tg}(\theta_{k_2}) \cos(\varphi_{k_2} - \varphi_{l_2}) + \cos(\varphi_{l_1} - \varphi_{l_2})}{\sqrt{1 + \text{tg}^2(\theta_{k_1}) \cos^2(\varphi_{k_1} - \varphi_{l_1})} \times \sqrt{1 + \text{tg}^2(\theta_{k_2}) \cos^2(\varphi_{k_2} - \varphi_{l_2})}}. \quad (60)$$

Подставляя (60) в (59), после интегрирования по углам φ_{l_1} и φ_{l_2} получим

$$D = 2|\cos \theta_{k_1} \cos \theta_{k_2}| + 4(1 - |\cos \theta_{k_1}|)(1 - |\cos \theta_{k_2}|) \times \left(1 + \frac{2 \cos(\varphi_{k_1} - \varphi_{k_2})}{\text{tg} \theta_{k_1} \text{tg} \theta_{k_2}} \right) + 8 \cos 2(\varphi_{k_1} - \varphi_{k_2}) \times \frac{1 - (1 + \frac{1}{2} \text{tg}^2 \theta_{k_1}) |\cos \theta_{k_1}|}{\text{tg}^2 \theta_{k_1}} \frac{1 - (1 + \frac{1}{2} \text{tg}^2 \theta_{k_2}) |\cos \theta_{k_2}|}{\text{tg}^2 \theta_{k_2}}. \quad (61)$$

Учитывая (47), (57), (58) и (61), вероятность стимулированного двухфотонного распада сверхтока в кольце (56) приводится к виду

$$w_{m_1 m}^f = \pi^{-5} \frac{\hbar e^4}{m_c^2 \varepsilon_0^2 \Omega_c^2 c^2 E_0 (m^2 - m_1^2)} \frac{(a + b)^2}{\xi_0^2 R_2^2 - (m - m_1)^2} \times \int_0^1 \gamma(1 - \gamma) d\gamma \int_0^\pi \sin \theta_{k_1} d\theta_{k_1} \int_0^\pi \sin \theta_{k_2} d\theta_{k_2} \times \int_0^{2\pi} d\varphi_{k_1} \int_0^{2\pi} d\varphi_{k_2} \left[\frac{\sin(\beta(\gamma(\cos \theta_{k_1} - \cos \theta_{k_2}) + \cos \theta_{k_2}))}{\gamma(\cos \theta_{k_1} - \cos \theta_{k_2}) + \cos \theta_{k_2}} \right]^2 \times D(\theta_{k_1}, \varphi_{k_1}, \theta_{k_2}, \varphi_{k_2}) \times \left[\frac{\sin(\mu(\gamma(\sin \theta_{k_1} \cos \varphi_{k_1} - \sin \theta_{k_2} \cos \varphi_{k_2}) + \sin \theta_{k_2} \cos \varphi_{k_2}))}{\gamma(\sin \theta_{k_1} \cos \varphi_{k_1} - \sin \theta_{k_2} \cos \varphi_{k_2}) + \sin \theta_{k_2} \cos \varphi_{k_2}} \right]^2 \times \begin{cases} 1, & m - m_1 \text{ нечетно} \\ 2 \cos^2(\eta(\gamma(\sin(\theta_{k_1}) \cos(\varphi_{k_1} - \sin \theta_{k_2} \cos \varphi_{k_2}) + \sin \theta_{k_2} \cos \varphi_{k_2}))), & m - m_1 \text{ четно.} \end{cases} \quad (62)$$

Здесь введены обозначения: $\gamma = \hbar\omega_{k_1}/E_0(m^2 - m_1^2)$, $\beta = dE_0(m^2 - m_1^2)/2c\hbar$, $\mu = (b - a)E_0(m^2 - m_1^2)/2c\hbar$ и $\eta = (b + a)E_0(m^2 - m_1^2)/2c\hbar$.

Выражение для вероятности перехода (62) получено для напряженностей низкочастотного поля, удовлетворяющих (35), где $R_2(a < R_2 < b)$ определяется теоремой о среднем значении для интеграла в правой части (52). То есть эту формулу можно использовать только для разрешенных каналов распада сверхтока, удовлетворяющих условиям $\xi_0 a > (m - m_1)$ и $\xi_0 b > (m - m_1)$. В случае $\xi_0 b < (m - m_1)$ вероятность запрещенного $m \rightarrow m_1$ будет также конечной, но экспоненциально малой в соответствии с асимптотикой функции Бесселя $K_{1/3}(\xi)$ в (29), и по этой причине не представляет интереса.

6. Асимптотика вероятности двухфотонного перехода

Полученное выражение (62) является сложным для численного анализа. Его можно привести к более простому виду в случае

$$\mu = \frac{(b - a)E_0(m^2 - m_1^2)}{2c\hbar} = \frac{\pi(m^2 - m_1^2)}{16\alpha} \frac{b - a}{R_L} \gg 1,$$

где $R_L = L/\mu_0$. При этом можно использовать следующую замену

$$\left[\frac{\sin(\mu(\gamma(\sin\theta_{k_1}\cos\varphi_{k_1} - \sin\theta_{k_2}\cos\varphi_{k_2}) + \sin\theta_{k_2}\cos\varphi_{k_2}))}{\gamma(\sin\theta_{k_1}\cos\varphi_{k_1} - \sin\theta_{k_2}\cos\varphi_{k_2}) + \sin\theta_{k_2}\cos\varphi_{k_2}} \right]^2 \Rightarrow \frac{\pi(b - a)E_0(m^2 - m_1^2)}{2c\hbar} \times \delta(\gamma(\sin\theta_{k_1}\cos\varphi_{k_1} - \sin\theta_{k_2}\cos\varphi_{k_2}) + \sin\theta_{k_2}\cos\varphi_{k_2}).$$

Используя эту замену и выполняя интегрирование по полярному углу θ_{k_2} , вероятность перехода (62) для плоского кольца приводим к виду

$$w_{m_1 m}^t = w_0 \int_0^1 \gamma d\gamma \int_0^{\pi/2} \sin\theta_{k_1} d\theta_{k_1} \int_0^{\pi/2} d\varphi_{k_1} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\text{tg}\theta_{k_2}^* d\varphi_{k_2}}{|\cos\varphi_{k_2}|} \times \{G(\pi + \theta_{k_2}^*)[D(\theta_{k_1}, \theta_{k_2}^*, \varphi_{k_1} - \varphi_{k_2}) + D(\theta_{k_1}, \theta_{k_2}^*, \varphi_{k_1} + \varphi_{k_2})] + G(\theta_{k_2}^*) \times [D(\pi - \theta_{k_1}, \theta_{k_2}^*, \varphi_{k_1} - \varphi_{k_2}) + D(\pi - \theta_{k_1}, \theta_{k_2}^*, \varphi_{k_1} + \varphi_{k_2})]\}. \tag{63}$$

Здесь введено обозначение

$$w_{m_1 m}^0 = \frac{2^3 \alpha^2}{\pi^4} \left(\frac{2m_e}{m_c}\right)^2 \frac{\lambda_e^2 c}{d^2(b - a)} \frac{3 + (-1)^{m - m_1}}{\xi_0^2 R_2^2 - (m - m_1)^2}, \tag{64}$$

$$G(\theta_{k_2}^*) = \left[\frac{\sin(\beta(\gamma(\cos\theta_{k_1} + \cos\theta_{k_2}^*) - \cos\theta_{k_2}^*))}{\gamma(\cos\theta_{k_1} + \cos\theta_{k_2}^*) - \cos\theta_{k_2}^*} \right]^2,$$

$$\theta_{k_2}^* = \arcsin\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \sin\theta_{k_1} \frac{\cos\varphi_{k_1}}{\cos\varphi_{k_2}}\right),$$

а интегрирование по указанным областям для переменных $\gamma, \theta_{k_1}, \varphi_{k_1}$ и φ_{k_2} ограничено условием

$$-1 \leq \frac{\gamma}{1 - \gamma} \sin\theta_{k_1} \frac{\cos\varphi_{k_1}}{\cos\varphi_{k_2}} \leq 0. \tag{65}$$

Отметим, что вероятность двухфотонного распада тока (63) пропорциональна лишь квадрату постоянной тонкой структуры. Это обусловлено тем, что „квант“ энергии кольца $E_0 = \Phi_0^2/2L$ обратно пропорционален квадрату заряда электрона.

7. Расчеты вероятностей распада сверхтока

Расчеты вероятностей переходов проводились для колец прямоугольного сечения с четырьмя различными внешними радиусами $b = 5\mu, 16.7\mu, 50\mu$ и 500μ . Внутренний радиус кольца полагался $a = 0.8b$. Мы использовали результаты расчета величин $R_L = L/\mu_0$ как функции внутреннего радиуса a для тонкого сверхпроводящего кольца прямоугольного сечения, представленные на рис. 2 работы [15]. Параметром зависимостей служила величина Λ/b , где $\Lambda = \lambda^2/d$ есть эффективная двумерная глубина проникновения поля, а толщина кольца $d < \lambda/2$. В представленных ниже расчетах использовалось $d = 0.4\lambda$. Тогда параметр приведенных кривых есть $2.5\lambda/b$, где b — внешний радиус кольца. В качестве глубины проникновения поля использовалось типичное значение для сверхпроводников второго рода $\lambda = 2 \cdot 10^3 \text{ \AA}$. Толщина кольца, меньшая скин-слоя для низкочастотного поля, полагалась $d = 800 \text{ \AA}$. Вводя обозначение $R_L = \beta a$, получаем $\beta(b = 5\mu) = 7.1, \beta(b = 16.7\mu) = 4.6, \beta(b = 50\mu) = 3.7$ и $\beta(b = 500\mu) = 3.4$, которым соответствуют энергии $E_0(b = 5\mu) = 374 \text{ meV}, E_0(b = 16.7\mu) = 173 \text{ meV}, E_0(b = 50\mu) = 71.8 \text{ meV}$ и $E_0(b = 500\mu) = 7.8 \text{ meV}$.

Проведем оценку напряженности поля с частотой $\omega_0 = 10^{12} \text{ s}^{-1}$. Пусть $\xi_0 R = 3.5$, т.е. полученные формулы для вероятностей переходов (41) и (63) действительны для трех разрешенных переходов с изменением числа флюксоидов $m - m_1 = 1, 2, 3$. Учитывая (8), имеем $E_0 = 1.8\hbar\omega_0/eR$. Для значения $R = 10\mu$ получим, что интенсивность СВЧ-поля $\approx 1.3 \text{ mW/cm}^2$.

7.1. Однофотонный распад сверхтока. Полагая $m_c = 2m_e$, вероятность перехода (41) приведем к виду

$$w_{m_1 m}^s = K_0 \frac{\beta^3}{b} \frac{F_{m - m_1}^0(k)}{(m + m_1)(m - m_1)^3 (\xi_0^2 R^2 - (m - m_1)^2)}, \tag{66}$$

где $K_0 = 6.673 \cdot 10^{-10} \text{ m/s}$.

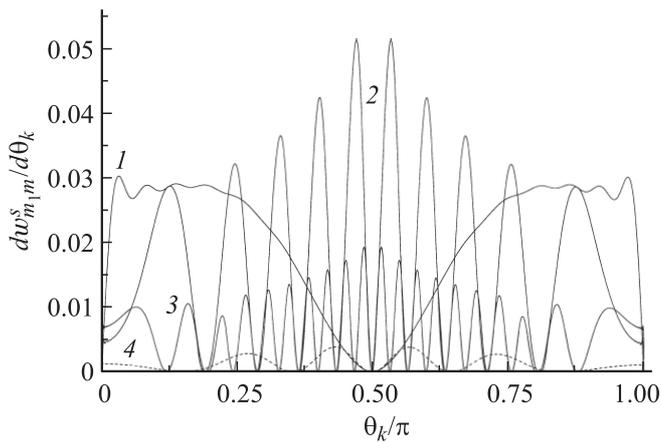


Рис. 1. Распределения по полярному углу фотонов, испускаемых сверхпроводящими кольцами при однофотонном распаде тока. Амплитуда СВЧ-поля $\xi_0 R = 3.3$. Для колец с внешним радиусом $b = 5\mu$: кривая 1 — $m = 11$ и $m - m_1 = 1$; кривая 2 — $m = 101$ и $m - m_1 = 1$; кривая 3 — $m = 101$ и $m - m_1 = 2$. Для колец с внешним радиусом $b = 16.7\mu$ пунктирная кривая 4 — $m = 101$ и $m - m_1 = 1$.

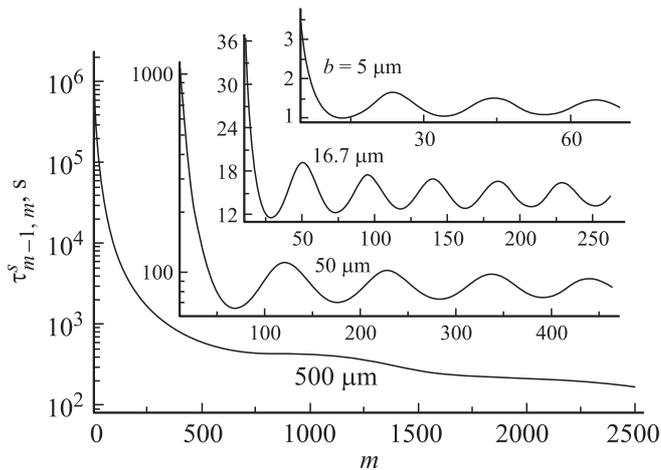


Рис. 2. Зависимость времени жизни сверхтока для канала $m \rightarrow m - 1$ однофотонного распада от числа флюксоидов в начальном состоянии для четырех колец различных размеров.

На рис. 1 представлены распределения по полярному углу фотонов, испускаемых сверхпроводящими кольцами с внешним радиусом $b = 5\mu$ и 16.7μ для каналов распада $m - m_1 = 1$ и 2, что соответствует уменьшению числа квантов магнитного потока, захваченных в кольце, в конечном состоянии на 1 и 2 соответственно. Амплитуда напряженности СВЧ-поля соответствует $\xi_0 R = 3.3$. Эти распределения всегда симметричны относительно угла $\theta_k = \pi/2$, при котором эмиссия фотонов отсутствует. При относительно небольшом числе флюксоидов в начальном состоянии кольца распределения соответствуют двум, симметричным относительно $\theta_k = \pi/2$, широким пикам, как это демонстрирует кривая 1 на рис. 1.

С ростом числа флюксоидов в начальном состоянии и с его изменением в конечном состоянии осцилляции

в распределении по углу θ_k усиливаются, как показано на рис. 1 кривыми 2 и 3. Вместе с тем при увеличении размера кольца эти осцилляции ослабевают (кривая 4, рис. 1).

Распределение по азимутальному углу φ_k всегда представляет два очень узких пика, максимумы которых приходятся на углы $\varphi_k = \pi/2$ и $\varphi_k = 3\pi/2$. Эти направления соответствуют у-оси, вдоль которой была направлена напряженность низкочастотного поля E_0 . То есть положения пиков в азимутальных распределениях определяются вектором $E_0(t)$. С ростом числа флюксоидов в начальном состоянии эти пики становятся все более узкими.

Представленные выше особенности в угловых распределениях фотонов были найдены для всех исследованных колец.

Время жизни сверхтока для канала распада $m \rightarrow m_1$ есть $\tau_{m_1 m}^s = (w_{m_1, m}^s)^{-1}$. На рис. 2 представлены зависимости времени жизни сверхтока от числа флюксоидов в начальном состоянии для четырех колец различных размеров. Общая закономерность заключается в том, что с ростом m сначала наблюдается резкое уменьшение $\tau_{m-1, m}$, а затем время ожидания перехода осциллирует около некоторого среднего значения, определенного для каждого кольца. Амплитуда этих осцилляций уменьшается, хотя и слабо, с увеличением числа флюксоидов.

С ростом напряженности низкочастотного когерентного поля загухание сверхпроводящего тока в кольце может быть обусловлено возможностью нескольких каналов распада $m \rightarrow m_1$. В этом случае можно ввести полную вероятность распада сверхпроводящего тока $w_m^s = \sum_{m_1} w_{m_1, m}^s$ и соответственно время жизни $\tau_m^s = (w_m^s)^{-1}$.

В табл. 1 представлены значения $\tau_{m_1, m}^s$ для разрешенных токовых переходов в зависимости от амплитуды микроволнового поля, которое дано в единицах $\xi_0 R$ для сверхпроводящего кольца с внешним радиусом $b = 5\mu$ и числом флюксоидов $m = 101$ в начальном состоянии. Вместе с временами жизни указаны и энергии испускаемых фотонов. При низких интенсивностях поля $\xi_0 b < 1$ и соответственно $\xi_0 R < 1$ разрешенные переходы отсутствуют, а сверхпроводящий ток в кольце является устойчивым.

Если $\xi_0 R > 1$ и $\xi_0 b < 2$, единственный токовый переход $m \rightarrow m - 1$ разрешен, как показано в табл. 1. Мы не

Таблица 1. Время жизни сверхпроводящего тока при однофотонном распаде для кольца с внешним радиусом $b = 5\mu$ и числом флюксоидов $m = 101$ в начальном состоянии

$\xi_0 R$	$\tau_{m-1, m}^s$ (s) (75.17 eV)	$\tau_{m-2, m}^s$ (s) (149.6 eV)	$\tau_{m-3, m}^s$ (s) (223.3 eV)	$\tau_{m-4, m}^s$ (s) (296.2 eV)	$\tau_{m-5, m}^s$ (s) (368.4 eV)
1.3	1.25	—	—	—	—
2.3	7.75	9.04	—	—	—
3.3	17.86	48.26	30.05	—	—
4.3	31.95	101.50	150.90	102.21	—
5.3	48.93	168.74	303.52	496.27	140.05

смогли вычислить минимальное время жизни для этого перехода, поскольку при получении (34) использовалась теорема о среднем. Когда $\xi_0 R > 2$ и $\xi_0 b < 3$, два токовых перехода $m \rightarrow m - 1$ и $m \rightarrow m - 2$ должны наблюдаться. При $\xi_0 R = 2.3$ среднее время ожидания первого перехода составляет $\tau_{100,101}^s = 7.75$ s, а для второго — $\tau_{99,101}^s = 9.04$ s.

С ростом интенсивности низкочастотного поля, которым облучается кольцо, хотя и увеличивается число разрешенных переходов, полная вероятность распада сверхпроводящего тока w_m^s уменьшается. Соответственно время жизни τ_m^s растет. Это ясно демонстрируют последние три строчки табл. 1, т.е. для наблюдения однофотонного распада сверхтока требуется тонкая настройка интенсивности стимулирующего поля, зависящая от размера кольца.

7.2. Расчеты вероятности двухфотонного распада тока. На рис. 3 показаны энергетические распределения фотонов, испускаемых сверхпроводящими кольцами. В расчетах использовалось выражение (63), (64). Эти распределения всегда представляют пик, максимум которого приходится на энергию каждого из двух испускаемых фотонов $\hbar\omega_{k_{1,2}} = E_0(m^2 - m_1^2)/2$, а суммарная энергия фотонов равна изменению энергии кольца $\hbar\omega_{k_1} + \hbar\omega_{k_2} = E_0(m^2 - m_1^2)$.

При малом числе флюксоидов в начальном состоянии энергетические распределения являются широкими, что говорит о том, что велика вероятность существенного различия в энергиях двух фотонов, как это демонстрирует пик 1 на рис. 3. С ростом числа флюксоидов в начальном состоянии изменение энергии кольца вследствие распада сверхтока увеличивается, а ширины энергетических распределений резко уменьшаются (кривая 2 на рис. 3), т.е. при увеличении числа m увеличивается вероятность испускания двух фотонов с энергиями,

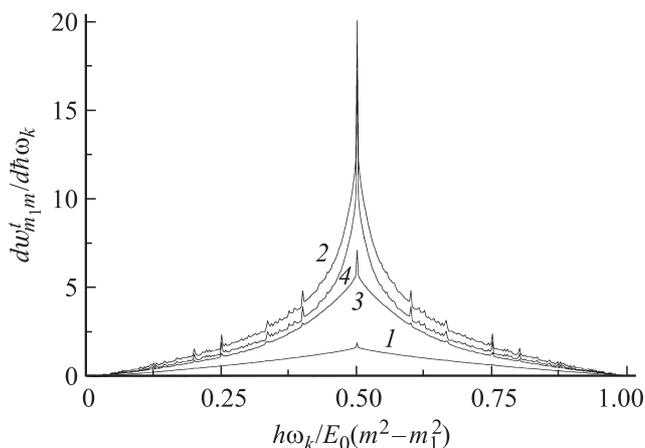


Рис. 3. Энергетические распределения фотонов, испускаемых сверхпроводящими кольцами при двухфотонном распаде сверхтока. Кривая 1 — $b = 5\mu$, $\xi_0 R = 1.3$, $m = 11$; кривая 2 — $b = 5\mu$, $\xi_0 R = 4.3$, $m = 101$, $m - m_1 = 2$; кривая 3 — $b = 16.7\mu$, $\xi_0 R = 1.2$, $m = 101$, $m - m_1 = 1$; кривая 4 — $b = 16.7\mu$, $\xi_0 R = 5.3$, $m = 101$, $m - m_1 = 5$.

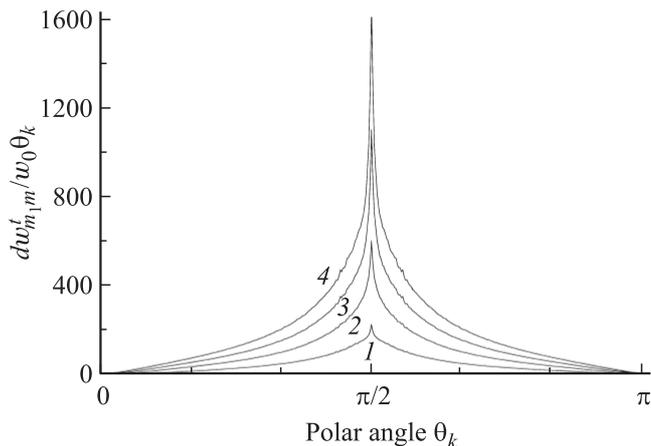


Рис. 4. Распределения по полярному углу фотонов, испускаемых кольцами с внешним радиусом $b = 5\mu$, при двухфотонном распаде сверхтока. Амплитуда СВЧ-поля $\xi_0 R = 4.3$. Число флюксоидов в начальном состоянии $m = 101$. Кривая 1 — канал распада $m - m_1 = 1$; кривая 2 — $m - m_1 = 2$; кривая 3 — $m - m_1 = 3$; кривая 4 — $m - m_1 = 4$.

приблизительно равными половине изменения энергии кольца.

Уменьшение неопределенности в энергии обоих фотонов можно также получить, увеличивая интенсивность СВЧ-поля. При этом оказываются разрешенными переходы с большими значениями $m - m_1$ и соответственно с большими изменениями энергии кольца (кривые 3 и 4 на рис. 3).

Распределения испускаемых фотонов по полярному углу θ_{k_1} представлены на рис. 4. Эти распределения также представляют собой пик. Полярный угол $\theta_{k_{1,2}} = \pi/2$ всегда соответствует положению максимума этих пиков, ширина которых уменьшается с ростом изменения энергии кольца $E_0(b)(m^2 - m_1^2)$ в начальном и конечном состояниях. Увеличение этой энергии можно получить уменьшением размера кольца, увеличением числа флюксоидов в начальном состоянии m , а также увеличением амплитуды СВЧ-поля, что приводит к разрешенным переходам с меньшими значениями числа флюксоидов в конечном состоянии m_1 . Последнее демонстрируют кривые 1–4 на рис. 4.

Распределения по азимутальному углу φ_{k_1} , равно как и по углу φ_{k_2} , качественно совпадают с распределениями по полярному углу при однофотонной эмиссии. Эти распределения всегда представляют два симметричных пика, максимумы которых приходятся на углы $\varphi_{k_{1,2}} = \pi/2$ и $\varphi_{k_{1,2}} = 3\pi/2$. Эти направления соответствуют у-оси, вдоль которой была направлена напряженность низкочастотного поля E_0 . Вместе с тем, имеется важная корреляция в испускании двух фотонов, которая прослеживается из условия (65). Согласно этому условию, $\cos \varphi_{k_1} \cos \varphi_{k_2} \leq 0$. Учитывая представленные выше распределения по полярному углу, это означает, что максимальные вероятности испускания двух фотонов отвечают условию $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2$. То есть

Таблица 2. Время жизни сверхпроводящего тока при двухфотонном распаде для кольца с внешним радиусом $b = 5\mu$ и числом флюксоидов $m = 101$ в начальном состоянии

$\xi_0 R$	$\tau_{m-1,m}^t$ (s)	$\tau_{m-2,m}^t$ (s)	$\tau_{m-3,m}^t$ (s)	$\tau_{m-4,m}^t$ (s)	$\tau_{m-5,m}^t$ (s)
1.3	0.078	—	—	—	—
2.3	0.482	0.035	—	—	—
3.3	1.111	0.186	0.067	—	—
4.3	1.965	0.392	0.338	0.033	—
5.3	3.106	0.671	0.705	0.168	0.069

Таблица 3. Время жизни сверхпроводящего тока при двухфотонном распаде для кольца с внешним радиусом $b = 16.7\mu$ и числом флюксоидов $m = 101$ в начальном состоянии

$\xi_0 R$	$\tau_{m-1,m}^t$ (s) (34.8 eV)	$\tau_{m-2,m}^t$ (s) (69.2 eV)	$\tau_{m-3,m}^t$ (s) (103.3 eV)	$\tau_{m-4,m}^t$ (s) (137 eV)	$\tau_{m-5,m}^t$ (s) (170.4 eV)
1.3	0.61	—	—	—	—
2.3	3.82	0.26	—	—	—
3.3	8.80	1.41	0.50	—	—
4.3	15.57	2.97	2.53	0.25	—
5.3	27.11	4.94	5.09	1.20	0.49

для двухфотонного распада имеется пространственная корреляция, а именно два фотона испускаются в почти противоположных направлениях, причем их волновые векторы приблизительно перпендикулярны z -оси.

Зависимость ширины пиков в распределении по азимутальному углу от параметров сверхпроводящего кольца является аналогичной представленной выше зависимости для распределения по полярному углу.

В табл. 2 представлены значения времен жизни $\tau_{m_1 m}^t = (w_{m_1 m}^t)^{-1}$ для разрешенных токовых переходов в зависимости от амплитуды микроволнового поля, которое дано в единицах $\xi_0 R$ для сверхпроводящих колец с внешним радиусом $b = 5\mu$. Число флюксоидов $m = 101$ в начальном состоянии. Вместе с временами жизни указана и суммарная энергия испускаемых фотонов в eV. При низких интенсивностях поля $\xi_0 b < 1$ и соответственно $\xi_0 R < 1$ разрешенные переходы отсутствуют, а сверхпроводящий ток в кольце является устойчивым.

Имеется явная периодическая закономерность в изменении времен жизни для разрешенных переходов. С ростом напряженности микроволнового поля наиболее быстрым является переход с максимальным изменением $m - m_1$ числа флюксоидов в начальном и конечном состояниях. При этом вероятность для этого перехода слабо зависит от интенсивности поля. Время жизни для переходов с четными значениями $m - m_1$ приблизительно в два раза больше, чем для нечетных переходов.

Те же закономерности прослеживаются и для колец большего размера. Однако при этом времена жизни довольно резко увеличиваются. Так, для колец с внешним радиусом 16.7μ времена жизни сверхтока, пред-

ставленные в табл. 3, приблизительно на один порядок больше соответствующих значений для колец с внешним радиусом 5μ .

8. Заключение

Сравнение полученных результатов для однофотонного и двухфотонного распадов сверхтока в тонких кольцах позволяет заключить, что последний процесс является доминирующим. При уменьшении размеров сверхпроводящих колец времена ожидания разрешенных переходов уменьшаются, а энергии фотонов увеличиваются. Причем эмиссия фотонной пары является пространственно коррелированной. Это позволяет сделать вывод, что предсказываемый процесс представляет по существу новый, эффективный источник генерации фотонов.

Следует отметить, что, согласно представленным результатам, существуют конечные вероятности больших пробегов фотонов в материале кольца. Эти пробеги определяются разностью между внешним и внутренним радиусами колец. В том случае, когда длина поглощения фотонов в материале кольца меньше средних длин этих пробегов, следует рассматривать взаимодействие фотонов со сверхпроводником. Конечно, для представленных энергий взаимодействие фотонов со сверхпроводящим конденсатом не является существенным, а наиболее вероятным процессом рассеяния фотонов является ионизация островных уровней атомов сверхпроводника. Это может привести к тому, что вместо эмиссии кольцом фотонов будет испускание фотоэлектронов. Здесь важно отметить, что этот процесс не приведет к изменению времен жизни сверхтоковых состояний.

Список литературы

- [1] М. Тинкхам. Введение в сверхпроводимость. Атомиздат, М. (1980). С. 24.
- [2] А. Bohr, B.R. Mottelson. Phys. Rev. **125**, 495 (1962).
- [3] F.M. Peeters, V.A. Schweigert, B.J. Baclus, P.S. Deo. Physica C **332**, 255 (2000).
- [4] D.Y. Vodolazov, F.M. Peeters, S.V. Dubonos, A.K. Geim. Phys. Rev. B **67**, 054 506 (2003).
- [5] H. Bluhm, N.C. Koshnick, M.E. Huber, K.A. Moler. Phys. Rev. Lett. **97**, 237 002 (2006).
- [6] J. Berger. J. Phys.: Condens. Matter **23**, 225 701 (2011).
- [7] A.I. Agafonov. Phys. Letter. A **374**, 2383 (2010); ФТТ **53**, 1457 (2011).
- [8] P.W. Anderson. Rev. Modern Phys. **38**, 298 (1966).
- [9] A.J. Leggett, F. Sols. Foundations of Physics **21**, 353 (1991).
- [10] A.J. Leggett. Rev. Modern Phys. **73**, 307 (2001).
- [11] Е.К. Кудинов. ФТТ **48**, 1366 (2006).
- [12] И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М. (1963). 1100 с.
- [13] А.Ф. Никифоров, В.Б. Уваров. Специальные функции математической физики. Наука, М. (1984). С. 201.
- [14] Ф. Олвер. В сб.: Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. Наука, М. (1979). С. 183.
- [15] E.H. Brandt, J.R. Clem. Phys. Rev. B **69**, 184 509 (2004).