05

Генерация гармоник в одномерном метаматериале из ВЧ-СКВИДов

© А.С. Аверкин,[1] Л.В. Филиппенко[2]

[1]Национальный исследовательский технологический университет „МИСИС“,
Москва, Россия,
[2]Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
Москва, Россия
e-mail: averkin.as@misis.ru

Поступило в Редакцию 4 марта 2026 г.
В окончательной редакции 7 июля 2026 г.
Принято к публикации 13 июля 2026 г.

Экспериментально и теоретически исследована генерация нечетных гармоник в метаматериале на основе ВЧ-СКВИДов под воздействием СВЧ сигнала с частотой ω. Получены аналитические выражения для амплитуды третьей гармоники на частоте 3ω как функции амплитуды сигнала накачки. Аналитически рассчитанная мощность третьей гармоники в зависимости от мощности сигнала накачки находится в хорошем согласии с экспериментальными данными.

Ключевые слова: сверхпроводимость, джозефсоновский контакт, ВЧ-СКВИД, метаматериалы, СВЧ.

DOI: 10.61011/JTF.2027.01.64179.63-26

Введение

Джозефсоновские переходы это нелинейные элементы сверхпроводящих цепей [1,2]. В джозефсоновских переходах наблюдается множество замечательных эффектов: ступеньки Шапиро на вольт-амперных характеристиках под действием микроволнового излучения [3,4], туннелирование с участием фотонов [5], распространение магнитного флюксона [6], подавление критического тока под действием микроволнового излучения [7,8], смешивание сверхвысокочастоных (СВЧ) сигналов на контакте Джозефсона [9].

Высокочастотные сверхпроводящие квантовые интерферометры (ВЧ-СКВИДы), использующие значительную нелинейность джозефсоновского перехода, применяются для изучения нелинейного отклика [10–16]. В частности, были изучены колебания резонансной частоты под действием одиночного микроволнового сигнала [10], явление мультистабильности [11] и отклик двумерных массивов на двухтоновое возбуждение [12].

Развитие квантовых технологий стимулировало развитие сверхпроводящих параметрических усилителей, обеспечивающих усиление с практически квантово-ограниченным уровнем шума [17]. Реализованы несколько типов сверхпроводящих параметрических усилителей, использующие нелинейность кинетической индуктивности сверхпроводящих пленок [18], джозефсоновских контактов [19], а также сверхпроводящих нелинейных индуктивных элементов (SNAIL) [20,21]. Их работа основана на параметрическом процессе, требующем одновременной подачи двух сигналов: слабого сигнального тона и мощного тона накачки [14,15]. СКВИДы также находят применение в сверхпроводящих параметрических усилителях бегущей волны [15,22]. Генерация гармоник измерена на сверхпроводящем параметрическом усилителе [23].

Сверхпроводящие метаматериалы на основе ВЧ-СКВИДов представляют собой перспективную платформу для управления микроволновым излучением [24,25]. Экспериментальные исследования в этой области охватывают как одномерные [26,27], так и двумерные массивы ВЧ-СКВИДов [28–31]. Исследованы нелинейные метаматериалы на основе ВЧ-СКВИДов: мультистабильность [11] и реакция двумерных массивов на двухтоновое возбуждение [12].

Одномерные массивы ВЧ-СКВИДов [32] и джозефсоновские передающие линии, состоящие из СКВИДов [16], исследованы при помощи двухтоновой спектроскопии; получены аналитические решения, характеризующее джозефсоновскую индуктивность как функцию мощности микроволнового сигнала.

Таким образом, изучение параметрических эффектов в ВЧ-СКВИДах представляет существенный интерес как для понимания физики нелинейных сверхпроводящих метаматериалов, так и для оптимизации работы сверхпроводниковых параметрических усилителей.

В настоящей работе экспериментально и аналитически исследован процесс генерации гармоник в одномерном массиве ВЧ-СКВИДов. Проведены измерения мощности гармоник в зависимости от мощности СВЧ сигнала накачки. Получены аналитические выражения, описывающие нелинейный отклик ВЧ-СКВИДа, которые устанавливают связь амплитуд первой и третьей гармоник с мощностью возбуждающего сигнала.

1. Эксперимент

Образец представляет собой массив из 54 ВЧ-СКВИДов, размещенных в зазоре ниобиевой

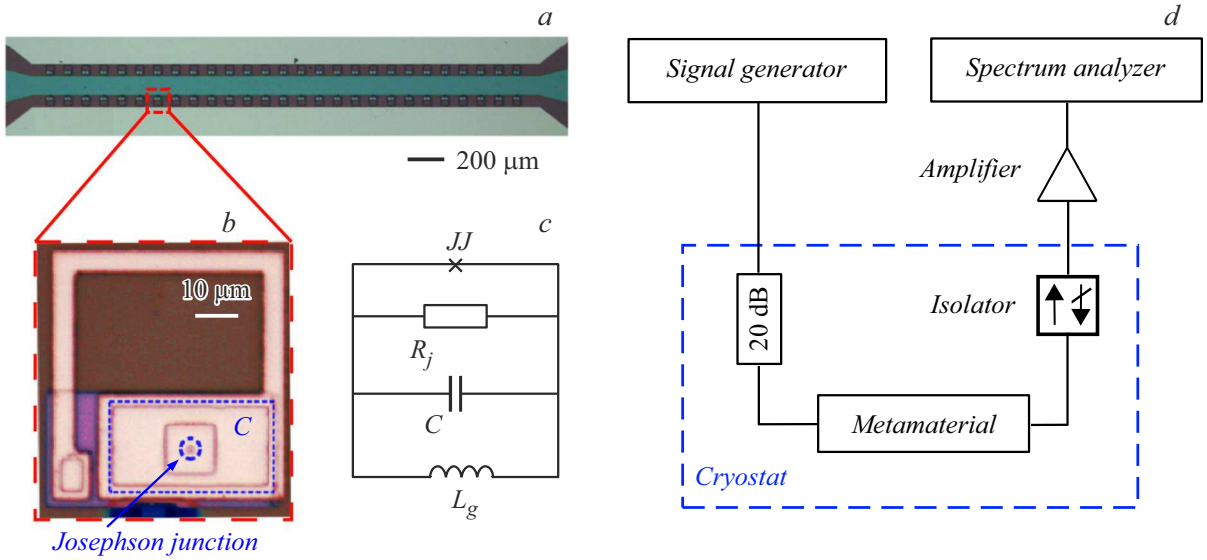


Рис. 1. *a* — фотография метаматериала, состоящего из 54 ВЧ-СКВИДов, встроенных в зазор копланарной линии (КЛ). *b* — фотография ВЧ-СКВИДа, состоящего из сверхпроводящего контура, перехваченного джозефсоновским переходом и шунтирующего конденсатора, подключенного параллельно. *c* — эквивалентная схема ВЧ-СКВИДа. ВЧ-СКВИД можно представить как идеальный джозефсоновский переход, шунтирующую емкость C, сопротивление контакта в нормальном состоянии R_j и геометрическую индуктивность кольца ВЧ-СКВИДа L_g. *d* — в экспериментальной установке микроволновый сигнал от генератора подается на образец через коаксиальные кабели и аттенюатор. Сигнал взаимодействует с образцом, усиливается СВЧ усилителем при комнатной температуре, после чего детектируется анализатором спектра.

копланарной линии (КЛ), изготовленной на кремниевой подложке (рис. 1, *a*). Каждый ВЧ-СКВИД индуктивно связан с центральным проводником КЛ с характеристическим импедансом $Z_0 = 50\,\Omega$. Ключевым элементом образца является ВЧ-СКВИД, состоящий из ниобиевого кольца, перехваченного $Nb/AlO_x/Nb$ джозефсоновским переходом (рис. 1, *b*). Параллельно к джозефсоновскому переходу подключен плоскопараллельный конденсатор. Образцы изготовлены со следующими параметрами: критический ток джозефсоновского перехода $I_c = 1.8\,$uA, емкость шунтирующего конденсатора $C = 2\,$pF, сопротивление джозефсоновского перехода в нормальном состоянии $R_j = 1\,\mathrm{k}\Omega$, геометрическая индуктивность сверхпроводящего кольца ВЧ-СКВИДа $L_g = 82.5\,$pH. Индуктивность джозефсоновского перехода при нулевой разности фаз на контакте $L_j(0) = 183\,$pH, параметр экранирования ВЧ-СКВИДа $\beta_L = L_g/L_j(0)$ определяет, то что ВЧ-СКВИД является безгистерезисным ($\beta_L = 0.45 < 1$). Образцы изготовлены с использованием трехслойного $Nb/AlO_x/Nb$ процесса [33] на оборудовании, входящем в состав уникальной научной установки УНУ „Криоинтеграл“ [34].

Схема экспериментальной установки показана на рис. 1, *d*. Образец смонтирован в держателе с помощью алюминиевых проволочных соединений (wire-bonds). Держатель образца помещен внутрь магнитного экрана, изготовленного из Cryoperm. Измерения проводились внутри криостата Triton Oxford Instruments. Для подачи и считывания СВЧ сигналов используются две коаксиальные линии, установленные в криостате. Аттенюатор с ослаблением 20 dB установлен внутри криостата на входной микроволновой линии. Выходная микроволновая линия проходит через микроволновый изолятор и усилитель, установленный при комнатной температуре (ZVA-183-S+). Измерения проводились при базовой температуре криостата $T = 1.5\,$K. Микроволновый сигнал подавался от микроволнового генератора (Anapico RFSG20), а спектр измерялся с помощью анализатора спектра (Keysight N9010B).

В эксперименте СВЧ сигналы от генератора подавались на частотах 5 либо 7 GHz. При подаче СВЧ сигнала на частоте $f_1 = 5\,$GHz на спектре видны пики на частотах $f_1 = 5$ и $f_3 = 15\,$GHz (рис. 2). Также были измерены спектры образца, если сигнал СВЧ генератора подавался на частоте $f_1 = 7\,$GHz. В этом случае гармоника появляется на утроенной частоте $f_3 = 3f_1$.

Выполнена серия измерений, при которых спектры образца измерены при различных мощностях сигнала СВЧ генератора. Если сигнал СВЧ генератора подавался на частоте 5 GHz, то мощность первой и третьей гармоник измерялась на частотах 5 и 15 GHz соответственно (рис. 3). Если сигнал СВЧ генератора подавался на частоте 7 GHz, то мощность первой и третьей гармоник измерялась на частотах 7 и 21 GHz соответственно (рис. 4).

На рис. 3 видно, что измеренная мощность первой гармоники на частоте 5 GHz растет с увеличением мощности сигнала накачки. Гармоника на утроенной частоте не видна на фоне шумов, если мощность сигнала накачки менее 10 GHz. Когда мощность сигнала накачки

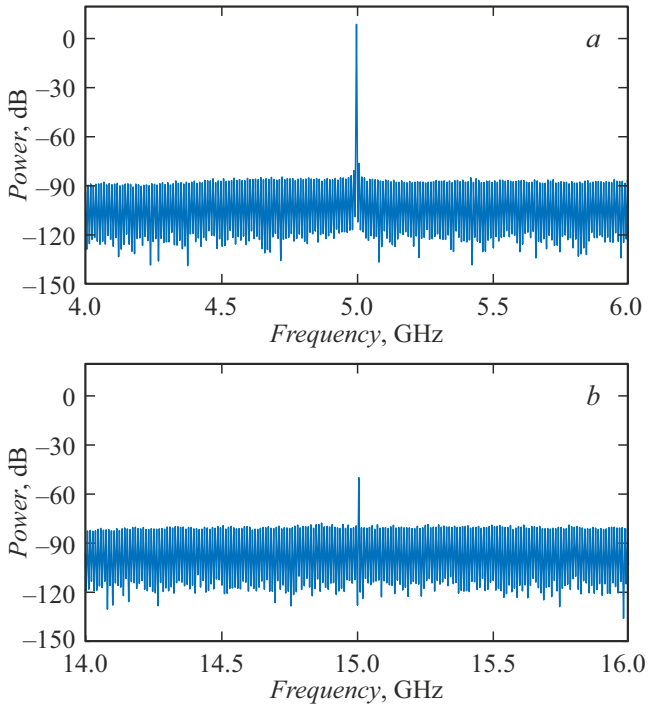


Рис. 2. Измеренный спектр образца. Возбуждающий сигнал подавался от СВЧ генератора на частоте 5 GHz мощностью $P = 20$ dBm. *a* — спектр измерен вблизи частоты сигнального тона 5 GHz. *b* — спектр измерен вблизи частоты гармоники 15 GHz.

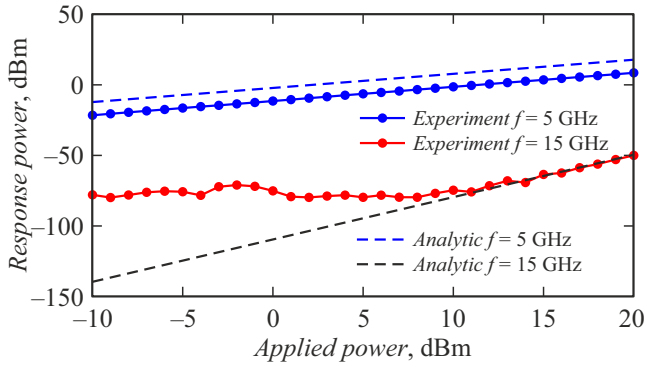


Рис. 3. Измеренная мощность первой гармоники и гармоники на утроенной частоте в зависимости от приложенной СВЧ мощности. Сигнал накачки подавался на частоте 5 GHz. Первая гармоника измерена на частоте 5 GHz, третья гармоника — на частоте 15 GHz. Зависимости мощности гармоник от мощности накачки рассчитаны аналитически по формулам (19) и (20).

превышает 10 dBm, то мощность третьей гармоники на частоте 15 GHz начинает возрастать быстрее чем мощность первой гармоники. Если СВЧ сигнал накачки подан на частоте 7 GHz, то отклик образца похож на отклик при частоте накачки 5 GHz. На рис. 3, 4 видно, что зависимость мощности третьей гармоники от СВЧ сигнала накачки имеет более крутой наклон по срав-

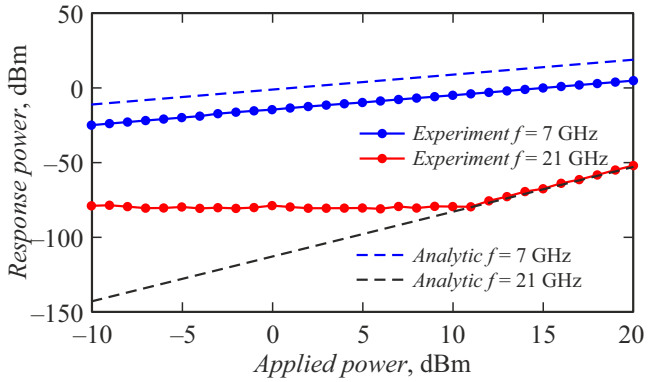


Рис. 4. Измеренная мощность первой гармоники и гармоники на утроенной частоте в зависимости от приложенной СВЧ мощности. Сигнал накачки подавался на частоте 7 GHz. Первая гармоника измерена на частоте 7 GHz, третья гармоника — на частоте 21 GHz. Зависимости мощности гармоник от мощности накачки рассчитаны аналитически по формулам (19) и (20).

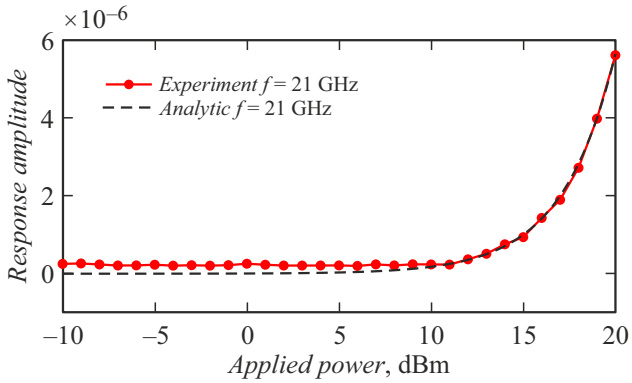


Рис. 5. Измеренная и рассчитанная амплитуды третьей гармоники на частоте 21 GHz в зависимости от СВЧ мощности сигнала накачки. Сигнал накачки подан на частоте 7 GHz. Амплитуда третьей гармоники в зависимости от мощности накачки рассчитана аналитически по формуле (18).

нению с зависимостью мощности первой гармоники от мощности накачки.

Измерена зависимость амплитуды гармоники на утроенной частоте от мощности сигнала накачки, приложенного на частоте 7 GHz (рис. 5). На рисунке измеренная мощность гармоники пересчитана в амплитуду.

2. Аналитический расчет

ВЧ-СКВИД состоит из сверхпроводящего кольца, перехваченного джозефсоновским контактом. Эквивалентная схема ВЧ-СКВИДа показана на рис. 1, *c*. Контакт Джозефсона описывается резистивно-емкостной шунтированной моделью [35,36]. Ток, протекающий в ВЧ-СКВИДе, равен сумме токов через идеальный контакт Джозефсона, конденсатор, резистор, а также тока, протекающего через геометрическую индуктивность

сверхпроводящего кольца ВЧ-СКВИДа L_g:

$$C\frac{\Phi_0}{2\pi}\ddot{\varphi}+\frac{\Phi_0}{2\pi R_J}\dot{\varphi}+I_c\sin(\varphi)+\frac{\Phi_0}{2\pi L_g}\varphi=I(t), \quad (1)$$

где C — шунтирующая емкость, $\Phi_0=h/(2e)$ — квант магнитного потока, φ — разность фаз на контакте Джозефсона, первая $\dot{\varphi}$ и вторая $\ddot{\varphi}$ производные фазы по времени, R_J — сопротивление контакта Джозефсона в нормальном состоянии, I_c — критический ток контакта Джозефсона, h — постоянная Планка и $2e$ — заряд куперовской пары. Подставим сигнал накачки на частоте ω в уравнение (1):

$$\omega_g^{-2}\ddot{\varphi}+\gamma\dot{\varphi}+\varphi+\beta_L\sin(\varphi)=A_{pe}\cos(\omega t), \quad (2)$$

где $\omega_g=1/\sqrt{L_gC}$ — резонансная частота ВЧ-СКВИДа, $\gamma=L_g/R_J$ — коэффициент потерь, $\beta_L=L_g/L_J(0)$ — параметр экранирования СКВИДа, $L_J(0)=\Phi_0/(2\pi I_c)$ — джозефсоновская индуктивность при нулевой разности фаз на контакте, амплитуда накачки:

$$A_{pe}\propto q\sqrt{10^{-3}10^{P_p/10}}, \quad (3)$$

где q — коэффициент пропорциональности, P_p — мощность накачки в dBm. Будем искать решение уравнения (2) в виде анзаца, представляющего собой сумму двух гармоник:

$$\varphi(t)=A_1\cos(\omega t+\delta)+A_3\cos(3\omega t+\alpha). \quad (4)$$

В выражении (4) A_1 и A_3 амплитуды первой и третьей гармоник, которые осциллируют на частотах ω и 3ω соответственно. Начальные фазы колебаний δ и α. Подставляем анзац (4) в нелинейный член уравнения (2):

$$\begin{aligned}\sin(\varphi)=&\sin(A_1\cos(\omega t+\delta))\cos(A_3\cos(3\omega t+\alpha))\\&+\cos(A_1\cos(\omega t+\delta))\sin(A_3\cos(3\omega t+\alpha)).\end{aligned} \quad (5)$$

Используем разложения Якоби-Ангера [31]:

$$\begin{aligned}\sin(A_1\cos(\omega t+\delta))\approx&2J_1(A_1)\cos(\omega t+\delta)\\&-2J_3(A_1)\cos(3\omega t+3\delta).\end{aligned} \quad (6)$$

$$\cos(A_3\cos(3\omega t+\alpha))\approx J_0(A_3), \quad (7)$$

$$\cos(A_1\cos(\omega t+\delta))\approx J_0(A_1), \quad (8)$$

$$\sin(A_3\cos(3\omega t+\alpha))\approx 2J_1(A_3)\cos(3\omega t+\alpha), \quad (9)$$

где $J_0(A_1)$, $J_0(A_3)$, $J_1(A_1)$, $J_1(A_3)$, $J_3(A_1)$ — это функции Бесселя первого рода. Подставляем разложения Якоби-Ангера в нелинейный член (5):

$$\begin{aligned}\sin(\varphi)=&2J_1(A_1)J_0(A_3)\cos(\omega t+\delta)\\&+2J_0(A_1)J_1(A_3)\cos(3\omega t+\alpha)\\&-2J_3(A_1)J_0(A_3)\cos(3\omega t+3\delta).\end{aligned} \quad (10)$$

Подставляем анзац (4) и нелинейный член (10) в уравнение (2):

$$\begin{aligned}&-\omega^2\omega_g^{-2}A_1\cos(\omega t+\delta)-9\omega^2\omega_g^{-2}A_3\cos(3\omega t+\alpha)\\&-\gamma\omega A_1\sin(\omega t+\delta)-3\gamma\omega A_3\sin(3\omega t+\alpha)+A_1\cos(\omega t+\delta)\\&+A_3\cos(3\omega t+\alpha)+2\beta_L[J_1(A_1)J_0(A_3)\cos(\omega t+\delta)\\&+J_0(A_1)J_1(A_3)\cos(3\omega t+\alpha)-J_3(A_1)J_0(A_3)\cos(3\omega t+3\delta)]\\&=A_{pe}\cos(\omega t).\end{aligned} \quad (11)$$

Разделяем члены, осциллирующие на различных частотах, на два уравнения:

$$\begin{aligned}&[(1-\omega^2\omega_g^{-2})A_1+2\beta_LJ_1(A_1)J_0(A_3)]\cos(\omega t+\delta)\\&-\gamma\omega A_1\sin(\omega t+\delta)=A_{pe}\cos(\omega t),\end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}&[(1-9\omega^2\omega_g^{-2})A_3+2\beta_LJ_0(A_1)J_1(A_3)]\cos(3\omega t+\alpha)\\&-3\gamma\omega A_3\sin(3\omega t+\alpha)=2\beta_LJ_3(A_1)J_0(A_3)\cos(3\omega t+3\delta).\end{aligned} \quad (13)$$

Используем теорему о сложении гармоник [37]:

$$\left[\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2\right)A_1+2\beta_LJ_1(A_1)J_0(A_3)\right]^2+[\gamma\omega A_1]^2=A_{pe}^2, \quad (14)$$

$$\left[\left(1-\left(\frac{3\omega}{\omega_g}\right)^2\right)A_3+2\beta_LJ_0(A_1)J_1(A_3)\right]^2+[3\gamma\omega A_3]^2=[2\beta_LJ_3(A_1)J_0(A_3)]^2. \quad (15)$$

Функция Бесселя первого рода в виде ряда Тейлора:

$$J_n(A)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\left(\frac{A}{2}\right)^{2k+n}. \quad (16)$$

Рассмотрим уравнения (14) и (15) в приближении слабого сигнала. Для этого заменим функции Бесселя первыми членами в разложении (16): $J_0(A_1)=J_0(A_3)\approx 1$; $J_1(A_1)\approx A_1/2$; $J_1(A_3)\approx A_3/2$; $J_3(A_1)\approx A_1^3/48$. Подставляем приближенные выражения для функций Бесселя в уравнения (14) и (15). Получаем выражение для амплитуды отклика ВЧ-СКВИДа на частоте накачки ω:

$$A_1=\frac{A_{pe}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2+\beta_L\right]^2+(\gamma\omega)^2}}. \quad (17)$$

И выражение для амплитуды отклика ВЧ-СКВИДа на частоте третьей гармоники 3ω:

$$A_3=\frac{\beta_LA_1^3}{24\sqrt{\left[1-\left(\frac{3\omega}{\omega_g}\right)^2+\beta_L\right]^2+(3\gamma\omega)^2}}. \quad (18)$$

Из формулы видно, что амплитуда сгенерированной третьей гармоники на частоте 3ω пропорциональна кубу от амплитуды отклика на частоте накачки $A_3 \propto A_1^3$. Мощность первой гармоники на частоте ω в dBm, вычисленная из амплитуды гармоники:

$$P_1 \propto 10Log_{10}[10^3(A_1/q)^2]. \quad (19)$$

Мощность гармоники на частоте 3ω в dBm, вычисленная из амплитуды гармоники:

$$P_3 \propto 10Log_{10}[10^3(A_3/q)^2], \quad (20)$$

где q — коэффициент пропорциональности такой же как и в формуле (3). Амплитуды A_1 и A_3 в формулах (19) и (20) даны формулами (17) и (18) соответственно.

Выражения (17) и (18) справедливы в пределе слабых сигналов: $A_1 << 1$, $A_3 << A_1$. В пределе больших сигналов необходимо решать систему трансцендентных уравнений (14) и (15). Однако в эксперименте амплитуды сигналов на ВЧ-СКВИДах относительно малы, поэтому уравнения (17) и (18) хорошо описывают экспериментальные результаты.

Зависимости мощности гармоник от мощности сигнала накачки, рассчитанные по формулам (19) и (20), представлены на рис. 3, 4. Видно, что мощности первой и третьей гармоник, рассчитанные аналитически как функции мощности сигнала накачки, хорошо совпали с измеренными мощностями гармоник в зависимости от мощности СВЧ сигнала накачки. На рисунках видно, что мощности гармоник на частоте 3ω растут быстрее, чем мощности гармоник на частоте ω. Наклоны экспериментальных и аналитических кривых на рис. 3, 4 соответствуют формулам (17) и (18).

Зависимость амплитуды гармоники на утроенной частоте от мощности сигнала накачки, приложенного на частоте 7 GHz рассчитана по формуле (18) аналитически (рис. 5). Измеренная и рассчитанная кривые хорошо совпадают друг с другом. Небольшие отклонения аналитической кривой от измеренной кривой при малой мощности объясняются присутствием шумов на измеренных спектрах.

Заключение

Проведено экспериментальное и теоретическое исследование процесса генерации нечетных гармоник в одномерном метаматериале на основе высокочастотных сверхпроводниковых квантовых интерферометров (ВЧ-СКВИДов). Измерены зависимости мощности первой и третьей гармоник (на утроенной частоте) от мощности СВЧ сигнала накачки. Показано, что нелинейная динамика системы приводит к эффективной генерации нечетных гармоник, характерной для структур с кубической нелинейностью.

Аналитически решено уравнение, описывающее нелинейный отклик ВЧ-СКВИДа в режиме генерации гармоник. Получены выражения, устанавливающие связь между амплитудами сигнала накачки и генерируемых гармоник. В частности, показано, что амплитуда первой гармоники линейно зависит от амплитуды внешнего сигнала: $A_1 \propto A_{pe}$, тогда как амплитуда третьей гармоники пропорциональна кубу амплитуды первой гармоники: $A_3 \propto A_1^3$. Измеренные мощности первой и третьей гармоник в зависимости от мощности сигнала накачки хорошо совпали с зависимостями, рассчитанными аналитически.

Результаты работы представляют интерес для развития нелинейных сверхпроводниковых метаматериалов, а также могут быть использованы при разработке и оптимизации джозефсоновских параметрических усилителей.

Благодарности

Авторы благодарят М.В. Фистуля, А.В. Устинова и В.П. Кошельца за помощь при выполнении работы.

Финансирование работы

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках программы Приоритет-2030 (Стратегический технологический проект НИТУ МИСИС „Квантовый интернет“). Экспериментальные образцы были изготовлены в рамках Госзадания ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] B. Josephson. Phys. Lett., **1** (7), 251 (1962).
[2] P.W. Anderson, J.M. Rowell. Phys. Rev. Lett., **10**, 230 (1963).
[3] S. Shapiro. Phys. Rev. Lett., **11**, 80 (1963).
[4] W.C. Danchi, F. Habbal, M. Tinkham. Appl. Phys. Lett., **41**, 883 (1982).
[5] P.K. Tien, J.P. Gordon. Phys. Rev., **129**, 647 (1963).
[6] M. Wildermuth, L. Powalla, J.N. Voss, Y. Sch.on, A. Schneider, M.V. Fistul, H. Rotzinger, A.V. Ustinov. Appl. Phys. Lett., **120** (11), (2022).
[7] Y. Koval, M.V. Fistul, A.V. Ustinov. Phys. Rev. Lett., **93**, 087004 (2004).
[8] S. Guozhu, W. Yiwen, C. Junyu, C. Jian, J. Zhengming, K. Lin, X. Weiwei, Y. Yang, H. Siyuan, W. Peiheng. Phys. Rev. B, **77**, 104531 (2008).
[9] C.C. Grimes, S. Shapiro. Phys. Rev., 169 (1968).
[10] J. Hizanidis, N. Lazarides, G.P. Tsironis. Phys. Rev. E, **94**, 032219 (2016).
[11] P. Jung, S. Butz, M. Marthaler, M.V. Fistul, J. Leppäkangas, V.P. Koshelets, A.V. Ustinov. Nature Commun., **5**, 174507 (2014).
[12] D. Zhang, M. Trepanier, T. Antonsen, E. Ott, S.M. Anlage. Phys. Rev. B, **94**, 174507 (2016).
[13] A.L. Pankratov. Phys. Rev. B, **68**, 024503 (2003).
[14] O. Yaakobi, L. Friedland, C. Macklin, I. Siddiqi. Phys. Rev. B, **87**, 144301 (2013).
[15] A.B. Zorin. Phys. Rev. Appl., **6**, 034006 (2016).

[16] A.S. Averkin, A.A. Kopasov, I.E. Pologov, A.N. Bolgar, D.A. Kalacheva, V.B. Lubsanov, M.V. Fistul, A. Karpov. Phys. Rev. Appl. (2026).
[17] M.A. Castellanos-Beltran, K.D. Irwin, G.C. Hilton, L.R. Vale, K.W. Lehnert. Nature Physics, **4**, 929 (2008).
[18] B. Ho Eom, P.K. Day, H.G. LeDuc, J. Zmuidzinas. Nature Physics, **8**, 623 (2012).
[19] K.O. Brien, C. Macklin, I. Siddiqi, X. Zhang. Phys. Rev. Lett., **113**, 157001 (2014).
[20] N.E. Frattini, U. Vool, S. Shankar, A. Narla, K.M. Sliwa, M.H. Devoret. Appl. Phys. Lett., **110**, 222603 (2017).
[21] A. Ranadive, M. Esposito, L. Planat, E. Bonet, C. Naud, O. Buisson, W. Guichard, N. Roch. Nature Commun., **13**, 1737 (2022).
[22] V. Gaydamachenko, C. Kissling, L. Grüunhaupt. Phys. Rev. Appl., **23**, 064053 (2025).
[23] A.Y. Levochkina, H.G. Ahmad, P. Mastrovito, I. Chatterjee, G. Serpico, L. Di Palma, R. Ferroiuolo, R. Satariano, P. Darvehi, A. Ranadive, G. Cappelli, G. Le Gal, L. Planat, D. Montemurro, D. Massarotti, F. Tafuri, N. Roch, G.P. Pepe, M. Esposito. Supercond. Sc. Technol., **37**, 115021 (2024).
[24] N. Lazarides, G. Tsironis. Phys. Reports, **752**, 1 (2018).
[25] P. Jung, A.V. Ustinov, S.M. Anlage. Supercond. Scien. Technol., **27**, 073001 (2014).
[26] P. Jung, S. Butz, S.V. Shitov, A.V. Ustinov. Appl. Phys. Lett., **102**, 062601, (2013).
[27] S. Butz, P. Jung, L.V. Filippenko, V.P. Koshelets, A.V. Ustinov. Opt. Express, **22**, 13041 (2014).
[28] M. Trepanier, D. Zhang, O. Mukhanov, S.M. Anlage. Phys. Rev. X, **3**, 041029 (2013).
[29] A.S. Averkin, A.P. Zhuravel, P. Jung, N. Maleeva, V.P. Koshelets, L.V. Filippenko, A. Karpov, A.V. Ustinov. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, **26** (3), 1 (2016).
[30] M. Trepanier, D. Zhang, O. Mukhanov, V.P. Koshelets, P. Jung, S. Butz, E. Ott, T.M. Antonsen, A.V. Ustinov, S.M. Anlage. Phys. Rev. E, **95**, 050201 (2017).
[31] M. Abramovitz, I. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions* (1972, See particularly), p. 361.
[32] E.I. Kiselev, A.S. Averkin, M.V. Fistul, V.P. Koshelets, A.V. Ustinov. Phys. Rev. Res., **1**, 033096 (2019).
[33] L. Filippenko, S. Shitov, P. Dmitriev, A. Ermakov, V. Koshelets, J.-R. Gao. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, **11** (1), 816 (2001).
[34] *УНУ „Криоинтеграл" — „Технологический и измерительный комплекс для создания сверхпроводниковых наносистем на основе новых материалов".* http://www.cplire.ru/rus/kriointegral/index.html; http://ckprf.ru/usu/352529/
[35] Лихарев. *Введение в динамику джозефсоновских переходов. Современные проблемы физики* (Наука, М., 1985)
[36] M. Tinkham. *Introduction to superconductivity 2d ed.*, (1996), p. 454.
[37] T. Apostol. *Calculus* (Wiley, NY., second ed., 1967)