01

Комплексная лемма дуальности и интерференция полей в поглощающей среде

© Л.А. Апресян, В.И. Красовский

Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН,
Москва, Россия
e-mail: leon_apresyan@mail.ru

Поступило в Редакцию 3 апреля 2026 г.
В окончательной редакции 29 мая 2026 г.
Принято к публикации 5 июня 2026 г.

Рассмотрено применение комплексной формы леммы дуальности к анализу энергетических процессов при суперпозиции полей от нескольких источников в средах с диэлектрическими и магнитными потерями. Лемма позволяет выделить пространственные области взаимодействия источников с полем и области обмена энергией поля со средой, упрощая тем самым описание энергетического баланса в задачах рассеяния. Ее действительная часть описывает усредненные потоки мощности, а мнимая — реактивные компоненты, важные для анализа ближнепольных взаимодействий. В интегральной форме леммы вводится разделение комплексных мощностей на симметричную и антисимметричную (по индексам источников) части, что позволяет раздельно описывать суммарные и разностные эффекты взаимодействия. Применимость подхода проиллюстрирована на задачах энергообмена двух сторонних токов, фактора Перселла, оптической теоремы в поглощающей среде, а также простой модели ферстеровского безызлучательтного переноса энергии. Предложенный метод допускает обобщение на другие квадратичные по полю интегралы движения, удовлетворяющие уравнению непрерывности.

Ключевые слова: рассеяние в поглощающей среде, энергетический баланс, интерференция, диэлектрические и магнитные потери, фактор Перселла, оптическая теорема, безызлучательный обмен энергией.

DOI: 10.61011/JTF.2027.01.64177.91-26

Введение

Наложение полей от нескольких когерентных источников вызывает интерференционные эффекты, играющие определяющую роль как для многих волновых явлений, так и при описании взаимодействия излучения с веществом. Среди таких источников можно выделить случаи первичных, т.е. заданных излучателей, и вторичных поляризационных токов. К первой категории относятся многие задачи теории антенн, где когерентные излучатели в антенной решетке формируют диаграмму направленности [1]. К ней же можно отнести также важный случай совместного воздействия на материальные объекты двух когерентных волн, привлекающий в последние годы особое внимание в оптике [2] и в акустике [3], в связи с возможностью создания так называемого идеального когерентного поглотителя или „антилазера“ [4]. Это позволяет управлять поглощением заданного светового пучка с помощью внешнего светового воздействия [5]. С развитием этого направления связано и недавнее возникновение так называемой неэрмитовой оптики [6], в которой совместное воздействие поглощения, усиления и интерференции используется для получения новых физических эффектов. Вторая группа, к которой, в первую очередь, относится дальнейшее рассмотрение, охватывает задачи теории рассеяния. В них полное поле естественно разделяется на падающую волну, создаваемую заданным сторонним источником, и рассеянную волну, обусловленную вызванными падающей волной в рассеивателе вторичными токами [7]. Если речь идет о рассеянии на ансамбле дискретных частиц, то и само рассеянное поле распадается на вклады от каждой из частиц, что приводит к увеличению аддитивных когерентных компонент полного поля [8].

Во всех задачах такого рода полное поле представляется в виде суммы когерентных компонент, отвечающих разным (сторонним или индуцированным) источникам. При этом квадратичная по полю величина интенсивности (или потока энергии), помимо интенсивностей каждой из составляющих, содержит также перекрестные слагаемые, описывающие интерференцию каждой из пар рассматриваемых полей. Важная роль и целесообразность выделения таких интерференционных компонент в различных задачах отмечалась достаточно давно (см., например, [9] и цитированную там литературу). Хотя в линейных средах волны от независимо заданных источников дают не зависящие друг от друга поля, интерференция при наложении этих полей существенно влияет на потоки энергии и, как следствие, на энергообмен суммарного поля со средой. Последний описывается условиями энергетического баланса, которые позволяют не только получить наглядную физическую картину рассматриваемых явлений, но и определить фундаментальные границы изменений различных физических параметров системы, что находит важные прак-

тические приложения в современных задачах оптики наноструктур [10,11].

Ранее в работе [8] для консервативной среды, а в [12] — для среды с поглощением была получена „лемма дуальности“, которая представляет собой полезное локальное соотношение, обобщающее обычный закон сохранения энергии и упрощающее описание энергетического баланса при описании интерференции полей от двух когерентных источников, каждый из которых может быть распределенным в пространстве. Использование этой леммы в задачах теории рассеяния позволяет описывать энергообмен между произвольно выбранными объемами среды, содержащей макроскопические рассеиватели. При этом отдельные члены леммы приобретают простой физический смысл, позволяя связать локальные источники энергии поля с работой токов над создаваемым ими полем, разделить пространственно области взаимодействия токов с полем и поля со средой, а также выделить слагаемые, отвечающие поглощению или усилению поля в процессе распространения излучения.

В настоящей работе рассматривается комплексная форма этой леммы для общего случая рассеивателей в среде с диэлектрическими и магнитными потерями. Взятие вещественной части от нее связано с вычислением активных, т. е. средних за период, энергетических характеристик поля, которыми ограничивалось предыдущее рассмотрение [12], причем только для немагнитных сред. Мнимая часть леммы определяет реактивные потоки. Эти потоки связаны с мнимой частью комплексного вектора Пойнтинга и не тождественны амплитуде колебательной мощности (которая имеет нулевое среднее по времени), а характеризуют запасенную энергию ближнего поля и в среднем за период не обращаются в нуль; подробное обсуждение см. в [13,14]. Не обладая непосредственным энергетическим смыслом, реактивные потоки несут информацию о пространственной структуре поля. Важная роль этих мощностей обнаружена также в недавних обобщениях [15,16], связанных с описанием оптических сил, действующих на микрочастицы, где они интерпретируются как мера запасаемой энергии ближнего поля, определяющая силу градиентного захвата.

Как будет показано ниже, многие (но не все) балансовые условия для активных и реактивных компонент в общем случае при учете диэлектрических и магнитных потерь имеют одинаковый вид. Далее мы будем использовать комплексные потоки, выделяя различия между поведением их активных и реактивных компонент. В качестве первого применения леммы мы рассмотрим случай интерференции полей от двух независимых источников, что позволило выделить в мощностях симметричную и антисимметричную части, отделив тем самым радиационные потери системы как целого от безызлучательного (ферстеровского) энергообмена. В отличие от традиционного подхода к задаче о передаче энергии от донора к акцептору [17], предлагаемое выражение позволяет учесть вклад, связанный с рассеянием на акцепторе. Затем мы кратко опишем влияние поглощения среды на фактор Перселла и оптическую теорему. Предлагаемый метод выходит за рамки приведенных примеров и может быть распространен на любые квадратичные по полю величины, для которых выполняется локальное уравнение непрерывности, выражающее законы сохранения.

1. Комплексная лемма дуальности

Рассмотрим стандартную систему уравнений Максвелла со сторонними электрическим $\mathbf{j}$ и магнитным $\mathbf{j}_m$ токами:

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mu\mathbf{H} - \mathbf{j}_m, \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{j} \tag{2}$$

для неоднородной изотропной среды с комплексными диэлектрической и магнитной проницаемостями

$$\varepsilon \equiv \varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon' + i\varepsilon'', \tag{3}$$

$$\mu \equiv \mu(\mathbf{r}) = \mu' + i\mu''. \tag{4}$$

Здесь ω — угловая частота, зависящий от времени множитель $\exp(-i\omega t)$ опускается, а ε_0 и μ_0 — диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума соответственно. В (3) и далее мы будем для краткости обозначать одним штрихом вещественные части и двумя штрихами — мнимые части комплексных величин (так что $\varepsilon' \equiv \mathrm{Re}\,\varepsilon$ и $\varepsilon'' \equiv \mathrm{Im}\,\varepsilon$ и т. д.), опуская всюду зависимости от пространственных аргументов. Пространственные изменения проницаемостей предполагаются непрерывными, что позволяет избежать необходимости учета дополнительных условий на границах разрывов. Магнитные токи вводятся в (1) для формального учета магнитных потерь и обеспечения симметрии уравнений Максвелла, что позволяет единообразно описывать электрические и магнитные источники.

Записав систему (1), (2) для двух наборов токов $(\mathbf{j}_\alpha,\ \mathbf{j}_{m\alpha})$ и $(\mathbf{j}_\beta,\ \mathbf{j}_{m\beta})$, создающих соответственно поля $(\mathbf{E}_\alpha, \mathbf{H}_\alpha)$ и $(\mathbf{E}_\beta, \mathbf{H}_\beta)$, и используя известное векторное соотношение $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$, после простых преобразований (см. [8,12]) мы получаем комплексную форму „леммы дуальности“

$$\nabla \cdot \big(\mathbf{s}_{\alpha\beta} + \mathbf{s}_{\beta\alpha}\big) = \big(w_{\alpha\beta} + w_{\beta\alpha}\big) - \big(q_{\alpha\beta} + q_{\beta\alpha}\big). \tag{5}$$

Здесь „перекрестный вектор Пойнтинга“ есть

$$\mathbf{s}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\mathbf{E}_\alpha \times \mathbf{H}^*_\beta, \tag{6}$$

величина

$$w_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\big(\mathbf{E}_\alpha \cdot \mathbf{j}^*_\beta + \mathbf{H}^*_\alpha \cdot \mathbf{j}_{m\beta}\big) \tag{7}$$

имеет смысл энергетической функции источников, вещественная часть которой описывает работу тока с индексом β над полем с индексом α, а связанная

с обменом энергией между полем и средой функция $q_{\alpha\beta}$ выражается как

$$q_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} i\omega \left(\varepsilon_0 \varepsilon^* \mathrm{Re}\, \mathbf{E}_\alpha \cdot \mathbf{E}_\beta^* - \mu_0 \mu \mathrm{Re}\, \mathbf{H}_\alpha \cdot \mathbf{H}_\beta^* \right). \quad (8)$$

Отметим, что символ Re в (8) возникает из-за выбора симметричной по индексам α и β формы леммы (5), отвечающей симметрии суммарного интерференционного потока при описании наложения полей от двух источников. В результате величина $q_{\alpha\beta}$ оказывается симметричной по индексам α, β, т. е. $q_{\alpha\beta} = q_{\beta\alpha}$, тогда как перекрестные потоки и источники при $\alpha \neq \beta$ в общем случае не симметричны, $s_{\alpha\beta} \neq s_{\beta\alpha}$, $w_{\alpha\beta} \neq w_{\beta\alpha}$. Заметим также, что аналогичные, но не тождественные (5) соотношения для перекрестных потоков и мощностей ранее неоднократно использовались в литературе (например, в классической теории тепловых флуктуаций [18] при описании корреляций равновесных тепловых полей). Однако именно форма леммы (5) представляется наиболее удобной для использования в теории рассеяния. Отметим также, что соотношение (6) привязано к стандартному определению вектора Пойнтинга в недиспергирующих средах как $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ (о других определениях $\mathbf{S}$ см., например, [19,20]).

Интегрирование обеих частей леммы (5) по произвольному объему V с учетом теоремы Гаусса–Остроградского дает

$$\oint\limits_{\partial V} \left(\mathbf{s}_{\alpha\beta} + \mathbf{s}_{\beta\alpha} \right) d\mathbf{\Sigma} = \int\limits_V \left(w_{\alpha\beta} + w_{\beta\alpha} - 2q_{\alpha\beta} \right) d^3 r. \quad (9)$$

Это соотношение выражает баланс выходящих через поверхность ∂V комплексных потоков через объемный интеграл по V от создающих эти потоки источников с учетом влияния среды. Для дальнейшего удобно записать его в сокращенном виде как

$$\left(S_{\alpha\beta} + S_{\beta\alpha} \right) = \left(W_{\alpha\beta} + W_{\beta\alpha} \right) - 2Q_{\alpha\beta}, \quad (10)$$

где введены обозначения

$$S_{\alpha\beta} = \oint\limits_{\partial V} \mathbf{s}_{\alpha\beta} d\mathbf{\Sigma}, \quad W_{\alpha\beta} = \int\limits_V w_{\alpha\beta} d^3 r,$$

$$Q_{\alpha\beta} = \int\limits_V q_{\alpha\beta} d^3 r. \quad (11)$$

В общем случае для разных наборов токов $(\mathbf{j}_\alpha, \mathbf{j}_{m\alpha})$ и $(\mathbf{j}_\beta, \mathbf{j}_{m\beta})$ лемму (5) и ее интегральную форму (10) можно рассматривать как определенные соотношения симметрии, связывающие поля $(\mathbf{E}_\alpha, \mathbf{H}_\alpha)$ и $(\mathbf{E}_\beta, \mathbf{H}_\beta)$ для двух различных (независимых) задач в одной и той же среде. При этом все токи могут задаваться, вообще говоря, произвольно. Если оба набора токов действуют одновременно, то полное поле есть сумма полей от двух источников. Тогда (5) при $\alpha \neq \beta$ будет отвечать описанию интерференционных компонент полного поля. При $\alpha = \beta$ (т. е. для одиночного источника) лемма (5) переходит в обычный комплексный закон сохранения [13]:

$$\nabla \cdot \mathbf{s}_{\alpha\alpha} = w_{\alpha\alpha} - q_{\alpha\alpha} \quad (12)$$

и соответствующую интегральную форму

$$S_{\alpha\alpha} = W_{\alpha\alpha} - Q_{\alpha\alpha}. \quad (13)$$

Величины $S_{\alpha\alpha}$ мы будем называть „энергетическими потоками“, в отличие от „интерференционных компонент“ $S_{\alpha\beta}$ при $\alpha \neq \beta$. Соотношения (12) и (13) представляют собой локальную и интегральную формы комплексного закона сохранения энергии [13], в котором поток средней мощности поля $S_{\alpha\alpha}$, выходящий из рассматриваемого объема, выражается в виде разности мощности связанной с работой токов источников $W_{\alpha\alpha}$ и функции потерь $Q_{\alpha\alpha}$.

Закон сохранения (12) дает простой альтернативный способ получения леммы (5): для этого достаточно подставить в (12) поле от суммы двух источников и сократить слагаемые с одинаковыми индексами. Такой способ можно распространить на другие квадратичные по полю интегралы движения, удовлетворяющие условию непрерывности (12), такие как „зильчи“ Липкина [21] и их различные нетривиальные обобщения, отражающие скрытые симметрии уравнений Максвелла [22,23]. Однако последние, за исключением спиральности [15], пока еще не нашли достаточно физических приложений.

2. Мощности радиационных и обменных потоков

Введенные в исходные уравнения Максвелла (1), (2) магнитные токи, как отмечалось выше, служат, прежде всего, для описания магнитных потерь, и в качестве сторонних токов играют лишь вспомогательную роль. Рассмотрим подробней случай отсутствия сторонних магнитных токов, $\mathbf{j}_{1m} = \mathbf{j}_{2m} = 0$, когда связанная с магнитным полем часть мощностей $W_{\alpha\beta}$ (7) обращается в нуль.

Компоненты E_l электрического поля $\mathbf{E}$, создаваемого произвольным электрическим током $\mathbf{j}$ с компонентами j_n, выражаются как

$$\mathrm{E}_l(\mathbf{r}) = \int \mathrm{G}_{ln}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') j_n(\mathbf{r}') d^3 r'. \quad (14)$$

Здесь интегрирование проводится по всему объему тока, причем тензорное ядро $\mathrm{G}_{ln}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ оператора Грина G (явный вид которого в общем случае известен лишь для однородной среды, когда $\mathrm{G} = (\nabla \times \nabla \times -k^2 \varepsilon\mu)^{-1} i\omega\mu_0\mu$), в силу теоремы взаимности [18], удовлетворяет условию симметрии:

$$\mathrm{G}_{lm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathrm{G}_{ml}(\mathbf{r}', \mathbf{r}). \quad (15)$$

Если ввести аргумент $x = (l, \mathbf{r})$, то условие (15) можно записать сокращенно как $G(x, y) = G(y, x)$. Учитывая (14) и (15), для полной комплексной мощности,

выражающей комплексную работу тока $\mathbf{j}_\beta$ над полем $\mathbf{E}_\alpha$, в соответствии с (7) и (11) имеем

$$W_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\iint \mathrm{G}_{ln}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}')j_{\alpha n}(\mathbf{r}')j^*_{\beta l}(\mathbf{r}'')d^3r'd^3r'', \quad (16)$$

или в сокращенной записи, опуская „немые“ тензорные индексы и пространственные аргументы:

$$W_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\mathrm{G} : j_\alpha j^*_\beta, \quad (17)$$

Входящее сюда произведение токов $j^*_\alpha j_\beta \equiv j^*_\alpha(x)j\beta(y)$ можно разделить на вещественную $R_{\alpha\beta} \equiv \mathrm{Re}\, j^*_\alpha j_\beta$ и мнимую $I_{\alpha\beta} \equiv \mathrm{Im} j^*_\alpha j_\beta$ части, $j^*_\alpha j_\beta = R_{\alpha\beta} + \mathrm{i}I_{\alpha\beta}$, так что $R_{\alpha\beta}(x, y) = R_{\beta\alpha}(y, x)$, $I_{\alpha\beta}(x, y) = -I_{\beta\alpha}(y, x)$. В соответствии с этим мощность $W_{\alpha\beta}$ разделяется на (комплексные) симметричную $W^s_{\alpha\beta} = W^s_{\beta\alpha}$ и антисимметричную $W^a_{\alpha\beta} = -W^a_{\beta\alpha}$ по индексам α и β части:

$$W_{\alpha\beta} = W^s_{\alpha\beta} + W^a_{\alpha\beta}, , \quad (18)$$

$$W^s_{\alpha\beta} \equiv -\frac{1}{2}\mathrm{G} : \mathrm{R}_{\alpha\beta}, \quad W^a_{\alpha\beta} \equiv -\frac{i}{2}\mathrm{G} : \mathrm{I}_{\alpha\beta}. \quad (19)$$

Разделение (18) нетривиально лишь для интерференционных мощностей, т.е. при $\alpha \neq \beta$, для „энергетических“ мощностей, при $\alpha = \beta$, антисимметричная часть (18) тождественно обращается в нуль, $W^a_{\alpha\alpha} = 0$. При этом выражения (19) дают конкретный вид симметричной и антисимметричной частей мощности $W_{\alpha\beta}$ (в общем случае такое разделение дается простой суммой $W_{\alpha\beta} = (W_{\alpha\beta} + W_{\beta\alpha})/2 + (W_{\alpha\beta} - W_{\beta\alpha})/2$).

Для объема V, охватывающего оба источника, из входящей в интегральную форму леммы (10) суммы $(W_{\alpha\beta} + W_{\alpha\beta})$ антисимметричная часть $W^a_{\alpha\beta}$ выпадает. Ниже будет показано, что эта часть непосредственно связана с нерадиационным обменом энергией между источниками. В отличие от традиционного расчета безызлучательной (ферстеровской) передачи энергии от донора к акцептору [17], в котором в качестве передаваемой мощности используется непосредственно величина Re $W_{\alpha\beta}$ без выделения в ней антисимметричной части (что отвечает пренебрежению рассеянием акцептором, т.е. отождествлению экстинкции с поглощением, и вполне допустимо при тописании ферстеровского энергообмена между молекулами, когда поправки на рассеяние на акцепторе вносят пренебрежимо малый вклад).

3. Свободное распространение в консервативной среде

Для консервативной среды, т.е. в отсутствие поглощения и усиления, мнимые части проницаемостей обращаются в нуль, $\varepsilon'' = 0$, $\mu'' = 0$. Отсюда следует, что равны нулю вещественные (активные) части функций (8):

$$q'_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\omega\left(\varepsilon_0\varepsilon''\mathrm{Re}\,\mathbf{E}_\alpha \cdot \mathbf{E}^*_\beta + \mu_0\mu''\mathrm{Re}\,\mathbf{H}_\alpha \cdot \mathbf{H}^*_\beta\right) = 0. \quad (20)$$

Их мнимые (реактивные) части

$$q''_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\omega\left(\varepsilon_0\varepsilon'\mathrm{Re}\,\mathbf{E}_\alpha \cdot \mathbf{E}^*_\beta + \mu_0\mu'\mathrm{Re}\,\mathbf{H}_\alpha \cdot \mathbf{H}^*_\beta\right) \quad (21)$$

в общем случае отличны от нуля, $q''_{\alpha\beta} \neq 0$. Для области пространства, не содержащей токов, обращаются в нуль также все мощности (7), $W_{\alpha\beta} = W_{\beta\alpha} = 0$. Учитывая это и разделяя в (10) вещественную и мнимую части, для активных потоков имеем

$$\left(S'_{\alpha\beta} + S'_{\beta\alpha}\right) = 0, \quad (22)$$

а для реактивных

$$\left(S''_{\alpha\beta} + S''_{\beta\alpha}\right) = -2Q''_{\alpha\beta}. \quad (23)$$

Из (22) следует, что для двух одновременно действующих источников при свободном распространении волн в консервативной среде описывающая интерференцию сумма вещественных (активных) частей перекрестных потоков $(S'_{\alpha\beta} + S'_{\beta\alpha})$ сохраняется, т.е. входящий в рассматриваемый объем V полный поток этой величины равен выходящему. Это справедливо и при наличии в среде многих источников, когда условие сохранения активных потоков будет выполняться для любой из пар выбранных источников, если только объем V свободен от рассматриваемой пары. Наличие или отсутствие внутри V других источников поля никак не влияет на условие (22). Подчеркнем также, что этим свойством не обладают потоки $S'_{\alpha\beta}$ и $S'_{\beta\alpha}$ по отдельности — их дивергенции в общем случае отличны от нуля. Таким образом, интерференционное взаимодействие двух источников не распадается на независимые вклады от каждого из них; сохраняется именно суммарный эффект.

Для одного источника (т.е. при $\alpha = \beta$) отсюда следует сохранение величины $S'_{\alpha\alpha}$, т.е. среднего потока мощности вне области источника $\mathbf{j}_\alpha$ (что не означает отсутствия энергообмена между источниками, описываемого интерференционными слагаемыми). В отличие от этого, сумма мнимых (реактивных) частей (23) $(S''_{\alpha\beta} + S''_{\beta\alpha})$ отлична от нуля, т.е. в общем случае не сохраняется даже при распространении в свободном пространстве. Это связано с наличием эванесцентных (затухающих) волн, которые обусловливают пространственное перераспределение реактивных потоков. Говорить при этом о величине мнимой части $2Q''_{\alpha\beta}$ как о перекрестной „реактивной мощности“ или „плотности реактивной энергии“ можно лишь условно, поскольку эта величина не несет непосредственно энергетического смысла.

4. Некоторые следствия

4.1. Интерференция полей от двух источников в неконсервативной среде

Рассмотрим интерференцию полей $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$ и $(\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2)$, создаваемых двумя когерентными пространственно раз-

несенными источниками $(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_{m1})$ и $(\mathbf{j}_2, \mathbf{j}_{m2})$, действующими в неконсервативной, т.е. поглощающей или усиливающей среде, для которой $\varepsilon'' \neq 0$ или $\mu'' \neq 0$ (для определенности мы будем говорить далее о поглощении, имея в виду возможность усиления как „отрицательного поглощения" средой). Будем считать, что источники занимают ограниченные объемы V_1 и V_2. В качестве таких источников могут выступать как независимые токи, создаваемые некоторыми сторонними силами, так и токи взаимозависимые, фигурирующие в задачах теории рассеяния, когда заданный сторонний источник индуцирует вторичные токи внутри рассеивателя (см. ниже).

Полное поле выражается в виде суммы $(\mathbf{E}_t,\ \mathbf{H}_t) = (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2,\ \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2)$, так что

$$\mathbf{s}_{tt} \equiv (1/2)\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t^* = \mathbf{s}_{11} + \mathbf{s}_{22} + (\mathbf{s}_{12} + \mathbf{s}_{21}), \tag{24}$$

$$w_{tt} = w_{11} + w_{22} + (w_{12} + w_{21}), \tag{25}$$

$$q_{tt} = q_{11} + q_{22} + (q_{12} + q_{21}). \tag{26}$$

Здесь $\mathbf{s}_{\alpha\beta}$, $w_{\alpha\beta}$ и $q_{\alpha\beta}$ определяются, как и ранее, соотношениями (6)–(8) с $\alpha, \beta = t, 1, 2$.

Для $\mathbf{s}_{\alpha\beta}$ выполняются очевидные правила сложения

$$\mathbf{s}_{t0} = \mathbf{s}_{00} + \mathbf{s}_{s0}, \quad \mathbf{s}_{0t} = \mathbf{s}_{00} + \mathbf{s}_{0s}, \quad \mathbf{s}_{tt} = \mathbf{s}_{00} + \mathbf{s}_{ss} + \mathbf{s}_{0s} + \mathbf{s}_{s0}. \tag{27}$$

Аналогичные условия выполняются и для плотностей $w_{\alpha\beta}$ и $q_{\alpha\beta}$, а также для соответствующих интегральных мощностей.

Рассматривая случай заданных сторонних источников тока, можно получить связанные с активными мощностями энергозатраты, необходимые для поддержания этих токов, трактуя вещественную мощность $w'_{\alpha\beta} \equiv \mathrm{Re}\, w_{\alpha\beta}$ (7) как локальную работу токов с индексом β над полями с индексом α. В соответствии с соотношениями вида (27) локальное значение работы тока с индексом 1 над полным полем с индексом t выражается как $w'_{t1} = w'_{11} + w'_{21}$. Здесь первое слагаемое отвечает работе этого тока над собственным полем, создающей его собственное излучение, а второе — его работе над полем от второго источника, которая описывает энергообмен между источниками. Интегрирование этого соотношения по объему первого тока дает полную работу этого тока. Аналогичные соотношения с заменой местами индексов 1 и 2 справедливы для второго тока.

Для произвольного объема V от локальных характеристик можно перейти к интегральным (11), которые, как и ранее, обозначаются большими буквами с теми же индексами:

$$S_{tt} = S_{11} + S_{22} + (S_{12} + S_{21}) \tag{28}$$

и аналогичным соотношениям для W_{tt} и Q_{tt}:

$$W_{tt} = W_{11} + W_{22} + (W_{12} + W_{21}), \tag{29}$$

$$Q_{tt} = Q_{11} + Q_{22} + (Q_{12} + Q_{21}), \tag{30}$$

для которых выполняются интегральные соотношения (10) и (13). Соотношение (28) описывает потоки комплексной мощности, выходящие из поверхности рассматриваемого объема V, тогда как (29) и (30) соответствуют источникам и потерям, отвечающим этим мощностям и заключенным внутри V. Хотя физический смысл имеет лишь суммарные величины (28)–(30), входящие в них парциальные потоки и мощности можно рассматривать независимо в том смысле, что они удовлетворяют разным условиям баланса (10) и (13).

Рассмотрим сначала произвольный объем V_1^*, охватывающий лишь первые источники (j_1, j_{m1}), но не затрагивающий вторых $(\mathbf{j}_2, \mathbf{j}_{m2})$, так что $w_{12} = w_{22} = 0$ внутри V_1^* и, как следствие, $W_{12} = W_{22} = 0$. Тогда из (10) и (13) для входящих в (28)–(30) величин имеем

$$S_{12}^{\mathrm{int}}(V_1^*) \equiv (S_{12} + S_{21}) = W_{21} - 2Q_{12}, \tag{31}$$

$$S_{11} = W_{11} - Q_{11}, \tag{32}$$

$$S_{22} = -Q_{22}. \tag{33}$$

В (31) введено обозначение $S_{12}^{\mathrm{int}}(V_1^*)$ для интерференционного потока, связанного с объемом V_1^*. Аналогичные соотношения с заменой местами индексов 1 и 2 справедливы и для второго источника, если рассматривать объем V_2^*, охватывающий лишь второй источник.

Соотношениям (31)–(33) можно придать простой физический смысл. Согласно (31), интерференционноый поток поля $S_{12}^{\mathrm{int}} \equiv (S_{12} + S_{21})$ создается комплексной мощностью W_{21} минус слагаемое $2Q_{12}$, описывающее взаимодействие поля со средой. Поток S_{11} (32) связан с мощностью W_{11} за вычетом Q_{11}. Для потока S_{22} (33) источник W_{22} внутри рассматриваемого объема отсутствует, так что для него величина Q_{22} играет роль стока (или источника, в случае активной среды).

Для объема $V_{12}^* = V_1^* + V_2^*$ (здесь и ниже „+" понимается в смысле теории множеств, как объединение объемов), охватывающего оба источника, имеем

$$S_{12}^{\mathrm{int}}(\mathrm{V}_{12}^*) = W_{21}(\mathrm{V}_1) + W_{12}(\mathrm{V}_2) - 2Q_{12}(V_{12}^*), \tag{34}$$

$$S_{11}(\mathrm{V}_{12}^*) = W_{11}(\mathrm{V}_1) - Q_{11}(\mathrm{V}_{12}^*), \tag{35}$$

$$S_{22}(\mathrm{V}_1^*) = W_{22}(\mathrm{V}_2) - Q_{22}(\mathrm{V}_1^*). \tag{36}$$

Здесь учтено, что источники $w_{\alpha\beta}$ локализованы внутри объемов V_β, так что увеличение объема V_β сверх объема источника с индексом β не меняет $W_{\alpha\beta}$. В отличие от этого „функции потерь" $q_{\alpha\beta}$ распределены по всему пространству, причем если объемы V_1^* и V_2^* не пересекаются, то $Q_{\alpha\beta}(V_1^* + V_2^*) = Q_{\alpha\beta}(V_1^*) + Q_{\alpha\beta}(V_2^*)$. Почленное сложение соотношений (34)–(36) дает комплексный поток полного поля (28):

$$\begin{aligned} S_{tt}(\mathrm{V}_{12}^*) &= W_{11}(\mathrm{V}_1) + W_{22}(\mathrm{V}_2) + W_{12}(\mathrm{V}_2) + W_{21}(\mathrm{V}_1) \\ &- Q_{tt}(\mathrm{V}_{12}^*) = W_{t1}(\mathrm{V}_1) + W_{t2}(\mathrm{V}_2) - Q_{tt}(\mathrm{V}_{12}^*), \end{aligned} \tag{37}$$

где мы учли условия вида (30) для W_{t1}, W_{t2} и Q_{tt}.

Согласно (37), полный комплексный поток S_{tt}, выходящий через поверхность объема $V_{12}^* = V_1^* + V_2^*$, учитывающий оба источника, равен работе первого тока над полным полем W_{t1} в объеме этого тока V_1, плюс аналогичный вклад от второго тока и за вычетом „функции потерь“ полного поля Q_{tt}, в общем случае распределенных по всему рассматриваемому объему V_{12}^*.

В соответствии со сказанным выше сумма $W_{21} + W_{12}$ в (37) описывает усредненную за период комплексную „взаимную работу“ первого и второго источников над соседними полями. Каждое слагаемое в этой сумме, согласно (18), можно выразить в виде симметричной и антисимметричной частей, причем антисимметричная часть из суммы выпадает (поскольку $W_{\alpha\beta}^a + W_{\beta\alpha}^a = 0$). Величина W_{21}^a возникает в (18) при рассмотрении объема V_1^*, не затрагивающего соседний источник. Она отвечает ферстеровской [24] безызлучательной (т.е. не связанной с полным радиационным потоком, уходящим на бесконечность от двух источников) передаче энергии от первого источника ко второму. Для второго источника обменный член W_{21}^a, естественно, имеет обратный знак $W_{21}^a = -W_{12}^a$, так что для полностью одинаковых (но пространственно разнесенных) источников $W_{21}^a = W_{12}^a = 0$.

Этот результат для частного случая точечных диполей в свободном пространстве был получен ранее прямым интегрированием потоков в работе [25] с выделением при этом их симметричных и антисимметричных частей. Указанная работа развивала идею о формировании активного интерференционного потока энергии при наложении полей с изначально нулевым переносом, высказанную и проиллюстрированную А.А. Колоколовым и Г.В. Скроцким в [26] на примере полного внутреннего отражения и безызлучательного переноса энергии между атомами. В рамках развитого здесь формализма можно говорить о том, что эффекты, описанные в [26], соответствуют частному случаю предлагаемой общей леммы, а именно проявлению ее антисимметричной части, которая описывает перенос активной мощности без участия излучения на бесконечность. В частности, в [26] для двух параллельных диполей с дипольными моментами p_1 и p_2 в ближней зоне был вычислен интерференционный поток энергии через плоскость между ними, оказавшийся пропорциональным Im $(p_1 p_2^*)$. Согласно развитому здесь формализму, эта величина в точности равна антисимметричной части мощности $\mathrm{Re}W_{12}^a$, вычисление которой в случае точечных диполей не требует дополнительного интегрирования, а непосредственно выражается через функцию Грина. Тем самым общий подход позволяет интерпретировать известный результат как проявление направленного безызлучательного обмена, описываемого антисимметричной компонентой, в то время как симметричная часть отвечает за суммарные радиационные потери системы.

До сих пор мы рассматривали комплексные мощности, так что общие соотношения (22)–(37) можно записать применительно как к активной, так и к реактивной мощностям, взяв от них вещественную и мнимую части. Дальнейшая трактовка входящих в них величин $Q_{\alpha\beta}$ для активных и реактивных частей различается. Взятие вещественных частей (т.е. переход к активным мощностям) дает энергетические характеристики. При этом вещественные части $Q'_{\alpha\beta}$ обусловлены неконсервативностью среды. Они описывают энергообмен излучения с материалом среды и обращаются в нуль в отсутствие поглощения или усиления. Мнимые части (22)–(37) дают аналогичные соотношения для реактивных мощностей, для которых в общем случае мнимые части $Q''_{\alpha\beta} \neq 0$ даже для консервативной среды. Последние не связаны непосредственно с обменом энергией поле–среда, но зависят, в первую очередь, от сруктуры поля. Так, при совпадающих индексах (условно говоря, „энергетические“) реактивные величины $Q''_{\alpha\alpha}$ при распространении в свободном пространстве не содержат вклада от бегущих волн, т.е. целиком обусловлены затухающими (эванесцентными) компонентами поля. Действительно, согласно (8), в случае свободного пространства $\varepsilon' = \mu' = 1$, имеем

$$q''_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2}\omega\big(\varepsilon_0|\mathbf{E}_\alpha|^2 - \mu_0|\mathrm{H}_\alpha|^2\big). \tag{38}$$

Для бегущей плоской волны $H_\alpha \sim \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_\alpha$, так что эта величина обращается в нуль (в частности, в спектральном представленнии интегральной мощности $Q''_{\alpha\alpha}$ остается вклад лишь от эванесцентных волн [15]). Таким образом, отличие от нуля величины $Q''_{\alpha\alpha}$ обусловлено отличием структуры поля от плоской бегущей волны. Поскольку вдали от источников поля зачастую приобретают близкую к бегущей волне локальную структуру, в этой области величина (38) приближается к нулю, что отвечает асимптотическому сохранению реактивной мощности. Более подробное описание этого вопроса не входит в наши цели.

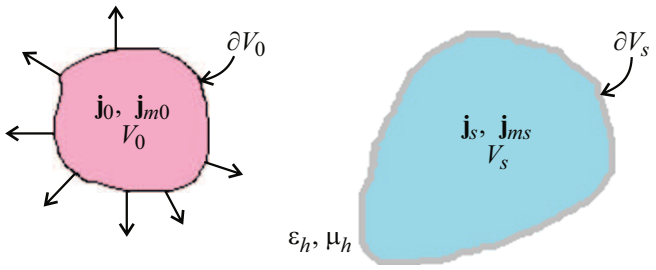
4.2. Комплексная лемма дуальности и задача рассеяния

Рассмотрим применение леммы (5) и полученных выше соотношений к стандартной задаче о рассеянии на изолированном рассеивателе (частице), находящемся в однородной среде с проницаемостями ε_h и μ_h. Будем считать, что падающая волна создается источниками $(\mathbf{j}_0, \mathbf{j}_{m0})$, заключенными в объеме V_0, а рассеиватель представляет собой неоднородную структуру, ограниченную объемом V_s , причем источники находятся вне рассеивателя (т.е. объемы V_0 и V_s не пересекаются, см. рисунок).

Диэлектрическая и магнитная проницаемости в этом случае имеют вид

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon_s(\mathbf{r})\theta(\mathbf{r}) + \varepsilon_h\big(1-\theta(\mathbf{r})\big) \equiv \varepsilon_h + \big(\varepsilon_s(\mathbf{r}) - \varepsilon_h\big)\theta_s(\mathbf{r}), \tag{39}$$

$$\mu(\mathbf{r}) = \mu_s(\mathbf{r})\theta(\mathbf{r}) + \mu_h\big(1-\theta(\mathbf{r})\big) \equiv \mu_h + \big(\mu_s(\mathbf{r}) - \mu_h\big)\theta_s(\mathbf{r}), \tag{40}$$



Рассеиватель и излучатель в однородной среде.

где $\theta_s(\mathbf{r})$ — характеристическая функция рассеивающего объема V_s, равная единице внутри и нулю вне V_s. Векторы электрического и магнитного полей записываются в виде сумм полей падающей и рассеянной волн

$$\mathbf{E_t} = \mathbf{E_0} + \mathbf{E_s}, \quad \mathbf{H_t} = \mathbf{H_0} + \mathbf{H_s}, \tag{41}$$

удовлетворяющих уравнениям Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{E}_\alpha = i\omega\mu_0\mu_h\mathbf{H}_\alpha - \mathbf{j}_{m\alpha}, \tag{42}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_\alpha = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_h\mathbf{E}_\alpha + \mathbf{j}_\alpha. \tag{43}$$

Здесь индекс принимает значения $\alpha = t, 0, s$, причем электрические и магнитные токи выражаются как

$$\mathbf{j}_t = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_s, \quad \mathbf{j}_{mt} = \mathbf{j}_{m0} + \mathbf{j}_{ms}, \tag{44}$$

где к сторонним токам $\mathbf{j}_0$ и $\mathbf{j}_{m0}$ добавляются соответствующие индуцированные токи

$$\mathbf{j}_s = -i\omega\varepsilon_0\big(\varepsilon_s(\mathbf{r}) - \varepsilon_h\big)\theta_s(\mathbf{r})\mathbf{E_t}, \tag{45}$$

$$\mathbf{j}_{ms} = -i\omega\varepsilon_0\big(\mu_s(\mathbf{r}) - \mu_h\big)\theta_s(\mathbf{r})\mathbf{H_t}. \tag{46}$$

В правых частях (44) токи с индексами „0“ и „s“ не являются независимыми, однако полученные выше в разд. 1 соотношения сохраняются. Комплексные мощности для полного поля выражаются в виде сумм (28)–(30) с заменой индексов 1 и 2 на 0 и s и парциальными потоками $s_{\alpha\beta}$ (6), где $\alpha, \beta = t, 0, s$. Записывая эти соотношения при разном выборе объемов V и учитывая разную физическую природу сторонних (активных) и индуцированных (пассивных) токов, нетрудно получить различные формы условий энергетического баланса для задачи рассеяния в поглощающей среде.

4.3. Излучатель и фактор Перселла

Рассмотрим объем V_0^*, полностью охватывающий сторонние токи (объем V_0), но не затрагивающий рассеиватель (объем V_s). Выходящий из V_0^* полный комплексный поток мощности поля $S_{em} = S_{tt}$ удовлетворяет общему соотношению (28):

$$S_{em} = S^0_{em} + S_{ss} + (S_{0s} + S_{s0}), \tag{47}$$

где $S^0_{em} \equiv S_{00}$ — аналогичный поток в отсутствие рассеивателя, а для отдельных слагаемых выполняются соотношения (29)–(33) с заменой индексов 1 и 2 на 0 и s. В соответствии с ними полный поток можно записать как

$$S_{em} = W_{00} + W_{s0} - Q_{tt}. \tag{48}$$

Вещественная часть этого соотношения выражает средний за период поток мощности, выходящий из рассматриваемого объема $S'_{em} \equiv \mathrm{Re}\, S_{em}$, в виде работы источника над создаваемым им полем в отсутствие рассеивателя $W'_{00} \equiv \mathrm{Re}\, W_{00}$, плюс мощность $W'_{s0} \equiv \mathrm{Re}\, W_{s0}$, описывающую влияние рассеивателя на излучение источника и за вычетом мощности поглощения полного поля средой $Q'_{tt} \equiv \mathrm{Re}\, Q_{tt}$. Для непоглощающей среды все связанные с поглощением стоки обращаются в нуль, $Q'_{\alpha\beta} \equiv \mathrm{Re}\, Q_{\alpha\beta} = 0$, так что, согласно (33), $S'_{ss} \equiv \mathrm{Re}\, S_{ss} = 0$, что отвечает сохранению полного потока мощности рассеяния при прохождении рассеянного поля через объем источника V_0^*. При этом вещественная часть (31), описывающая влияние рассеивателя на мощность источника, принимает вид поправки Перселла

$$S^{\mathrm{int}\prime}_{os} \equiv (S'_{s0} + S'_{s0}) = W'_{s0} = \int\limits_{V_0} w'_{s0} d^3\mathrm{r}, \tag{49}$$

отвечающей работе рассеянного поля $(\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s)$ над сторонними токами $(\mathbf{j}_0, \mathbf{j}_{m0})$. В соотношении для мнимой части (48) величина Q''_{tt} в общем случае отлична от нуля даже при распространении в свободном пространстве.

В рассматриваемом случае „причиной“, т. е. источником энергии поля является создаваемая сторонним током падающая волна. Если поставить задачу с начальными условиями, то источник будет создавать начальное поле, которое распространяется к рассеивателю и затем в виде рассеянной волны возвращается обратно к источнику. Однако в стационарном режиме, отвечающем описанию монохроматического излучения, падающая и рассеянная волны „уравниваются в правах“, выступая как равноправные компоненты полного поля. „Следы“ причинности можно обнаружить в соотношениях, связанных с балансом потоков энергии. Так, величина W_{00} играет роль „затравочной“ комплексной мощности источника, и имеет такой же вид, как и в отсутствие рассеивателя, т. е. „до того“ как поле источника достигнет рассеиватель. При этом для мощности S^0_{em} выполняется условие баланса вида (48), такое же, как в отсутствие рассеивателя. Оставшиеся энергетические соотношения учитывают взаимное влияние источника и рассеивателя на создаваемые ими поля.

4.4. Оптическая теорема для комплексного потока в поглощающей среде

Для объема V_s^*, полностью охватывающего рассеиватель, но не затрагивающего сторонние токи, (28) при-

нимает вид оптической теоремы, связывающей комплексные потоки. Для поглощающего рассеивателя (28) удобно записать в виде

$$S_{ext} = S_{abs} - S^0_{abs} + S_{sc}. \tag{50}$$

Здесь $S_{ext} \equiv -(S_{0s} + S_{s0})$ — втекающий в V^*_s поток экстинкции, $S_{abs} \equiv -s_{tt}$ и $S^0_{abs} \equiv -S_{00}$ — потоки поглощения при наличии и в отсутствие рассеивателя соответственно, а $S_{sc} \equiv S_{ss}$ — поток рассеяния. Каждому из потоков в (50) отвечает соответствующее (31)–(33) представление в виде интегралов по объему:

$$S_{abs} = -(W_{tt} - Q_{tt}), \quad S^0_{abs} = Q_{00},$$
$$S_{sc} = W_{ss} - Q_{ss}, \quad S_{ext} = -W_{0s} + 2Q_{0s}. \tag{51}$$

Отсюда следует равенство

$$-W_{0s} = (S_{abs} - Q_{tt}) + W_{ss}. \tag{52}$$

Поясним физический смысл (52). Совершаемая внутри частицы „комплексная работа“ падающей волны над индуцированным в рассеивателе током — W_{0s}, равна части поглощения, связанной с наличием частицы (т.е. полному потоку S_{abs}, поглощенному в объеме V^*_s за вычетом поглощения полного поля средой Q_{tt}), плюс работе индуцированного тока над рассеянной волной W_{ss}, локализованной внутри частицы и создающей рассеянное поле. В отсутствие частицы $W_{0s} = W_{ss} = 0$ полное поле совпадает с полем падающей волны, так что $Q_{tt} = Q_{00}$ и (52) принимает вид $0 = S_{abs} - Q_{00} + 0$, так что комплексный „поглощенный“ поток S_{abs} равен поглощению поля средой Q_{00}.

Для консервативной среды поглощение в ней отсутствует, $S^{0'}_{abs} = -Q'_{00} = 0$, и полностью сконцентрировано внутри частицы. При этом $W'_{ss} = S'_{SS}$, так что вещественная часть (52) принимает вид обычной оптической теоремы, выражающей поток экстинкции в виде суммы потоков поглощения и рассеяния:

$$S'_{ext} = -W'_{0s} = S'_{abs} + S'_{sc}. \tag{53}$$

Здесь определяющая экстинкцию величина мощности

$$W'_{0s} \equiv \mathrm{Re}W_{0s} = -\int\limits_{V_{sc}} \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{j}^*_s + \mathbf{H}^*_0 \cdot \mathbf{j}_{ms}\right) d^3\mathrm{r} \tag{54}$$

равна средней работе падающей волны над индуцированными в рассеивателе токами $\mathbf{i}_s$ и $\mathbf{j}_{sm}$. При этом для мнимой части (52) реактивная мощность „поглощения“ среды $S^{0''}_{abs} = -Q''_{00} \neq 0$ и связана с изменениями структуры электромагнитного поля, что отвечает описанному выше несохранению реактивного потока в процессе свободного распространения.

4.5. Баланс комплексных потоков для системы излучатель с рассеивателем в поглощающей среде

Для объема V^*_{0s}, охватывающего излучатель вместе с рассеивателем, выполняются рассмотренные выше соотношения (34)–(37). Запишем $V^*_{0s} = V_0 + V_s + V_{out}$, где V_{out} — объем внешней по отношению к V_0 и V_s части V^*_{0s}. Тогда для полной мощности потерь Q_{tt} имеем

$$Q_{tt} \equiv Q_{tt}(\mathrm{V}^*_{0s}) = Q_{tt}(\mathrm{V}_0) + Q_{tt}(\mathrm{V}_s) + Q_{tt}(\mathrm{V}_{out}). \tag{55}$$

Поскольку плотности $w_{\alpha\beta}$ локализованы внутри объемов V_β, мощность W_{tt} в аналогичных обозначениях принимает вид

$$W_{tt} \equiv W_{tt}(\mathrm{V}^*_{0s}) = W_{00}(\mathrm{V}_0) + W_{ss}(\mathrm{V}_s) + W_{s0}(\mathrm{V}_0) + W_{0s}(\mathrm{V}_s). \tag{56}$$

Применительно к такому объему полную мощность излучения можно записать как

$$S_{em} \equiv S_{tt}(V^*_{0s}) \equiv W_{tt}(V^*_{0s}) - Q_{tt}(V^*_{0s})$$
$$= S_{em}(V_0) - S_{abs}(V_s) - Q_{tt}(V_{out}). \tag{57}$$

Здесь $S_{em}(V_0)$ (48) описывает комплексную мощность излучения, вытекающую из объема источника, а втекающий поток $S_{abs}(V_s)$ (51) дает поглощение в объеме частицы V_s.

Соотношение (57) показывает, что полная комплексная мощность излучения из объема V^*_{0s} складывается из мощности, излучаемой источником с поправкой на рассеиватель (S_{em}), и мощности, поглощаемой в рассеивателе (S_{abs}) и во внешней среде (Q_{tt}). В частности, для активной (вещественной) части это позволяет записать условие максимизации поглощения в рассеивателе путем подбора параметров среды и геометрии, что выражается, например, в фундаментальных ограничениях, вытекающих из баланса мощностей (см., например, [27,28]).

Заключение

В работе представлено комплексное обобщение леммы дуальности, предназначенное для описания энергетических и интерференционных потоков при суперпозиции полей от нескольких источников в средах с диэлектрическими и магнитными потерями. Предложенный подход существенно упрощает анализ энергетического баланса, позволяя выделить пространственные области взаимодействия поля с создающими его токами и области обмена энергией поля со средой. Вещественная часть леммы описывает усредненные за период потоки активной мощности, тогда как мнимая часть соответствует реактивной мощности, которая не связана непосредственно с диссипацией, а определяется пространственной структурой поля, включая вклад эванесцентных (затухающих) компонент. Это различие важно для анализа ближнепольных взаимодействий, например, при описании градиентных сил в оптическом захвате частиц.

Предложенный подход позволяет естественно разделять комплексные мощности на компоненты, отвечающие радиационным потерям системы и безызлучательному (ферстеровскому) обмену энергией между источниками. В отличие от традиционного подхода, где безызлучательная передача часто описывается без учета обратного влияния рассеивателя на источник, данный формализм дает возможность симметризовать описание энергообмена и явно учесть локальные обменные эффекты в ближней зоне.

Применимость развитого подхода продемонстрирована на ряде задач: энергообмен двух сторонних токов в поглощающей среде, фактор Перселла (влияние рассеивателя на излучение источника), обобщение оптической теоремы на случай поглощающей среды, а также безызлучательный перенос энергии Ферстера.

Предложенный формализм не ограничивается электродинамикой. Он допускает обобщение на любые квадратичные по полю интегралы движения, удовлетворяющие локальному уравнению непрерывности. Это открывает перспективы для применения метода при описании интерференции полей от нескольких источников в акустике, гидродинамике, а также в нанофотонике и смежных областях физики волн.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] В.А. Неганов, Д.П. Табаков, Г.П. Яровой. *Современная теория и практические применения антенн* (Радиотехника, М., 2009)

[2] Н.Н. Розанов. УФН, **187** (8), 879 (2017). DOI: 10.3367/UFNr.2016.11.037963

[3] C. Fu, M. Yang, Z.H. Hang. Phys. Rev. Res., **5**, L042020 (2023). DOI: 10.1103/PhysRevResearch.5.L042020

[4] Y.D. Chong, L. Ge, H. Cao, A.D. Stone. Phys. Rev. Lett., **105** (5), 053901 (2010). DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.053901

[5] D.G. Baranov, A. Krasnok, T. Shegai, A. Alù, Y. Chong. Nature Rev. Mater., **2**, 17064 (2017). DOI: 10.1038/natrevmats.2017.64

[6] C. Wang, Z. Fu, W. Mao, J. Qie, A.D. Stone, L. Yang. Adv. Opt. Photon., **15** (2), 442 (2023). DOI: 10.1364/AOP.475477

[7] К. Борен, Д. Хафмен. *Рассеяние и поглощение света малыми частицами* (Мир, М., 1986)

[8] Л.А. Апресян, В.И. Красовский, С.И. Расмагин. ЖТФ, **95** (8), 1479 (2025). DOI: 10.61011/JTF.2025.08.60893.412-24

[9] С.А. Афанасьев, Д.И. Семенцов. УФН, **178** (4), 377 (2008). DOI: 10.3367/UFNr.0178.200804b.0377

[10] Y. Ivanenko, M. Gustafsson, S. Nordebo. Opt. Express, **27** (23), 34323 (2019). DOI: 10.1364/OE.27.0347323

[11] S. Molesky, P. Chao, W. Jin, A.W. Rodriguez. Phys. Rev. Res., **2** (3), 033172 (2020). DOI: 10.1103/physrevresearch.2.033172

[12] L.A. Apresyan, T.V. Vlasova. Phys. Wave Phenomena, **33** (4), 322 (2025). DOI: 10.3103/S1541308X25700232

[13] Л.А. Вайнштейн. *Электромагнитные волны* (Радио и связь, М., 1988)

[14] Л.А. Бессонов. *Теоретические основы электротехники* (Высшая школа, М., 1968)

[15] M. Nieto-Vesperinas, X. Xu. Phys. Rev. Res., **3** (4), 043080 (2021). DOI: 10.1103/PhysRevResearch.3.043080

[16] M. Nieto-Vesperinas, X. Xu. Light: Sci. Applications, **11**, 297 (2022). DOI: 10.1038/s41377-022-00979-2

[17] Л. Новотный, Б. Хехт. *Основы нанооптики* (Физматлит, М., 2009)

[18] М.Л. Левин, С.М. Рытов. *Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике* (Наука, М., 1967)

[19] P. Kinsler, A. Favaro, M.W. McCall. *Conference on Lasers and Electro-Optics/Pacific Rim, 2009* (Optical Society of America, Paper WF4_3, 2009) URL: https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=CLEOPR-2009-WF4_3

[20] A. Favaro, P. Kinsler, M.W. McCall. Opt. Express, **17** (17), 15167 (2009). DOI: 10.1364/oe.17.015167

[21] D.M. Lipkin. J. Mathem. Phys., **5** (5), 696 (1964). DOI: 10.1063/1.1704165

[22] G. Smith, P. Strange. J. Phys. A: Mathem. Theoret., **51** (43), 435204 (2018). DOI: 10.1088/1751-8121/aae15f

[23] V.A. Letsios. Lett. Mathem. Phys., **113** (4), № 76 (2023). DOI: 10.1007/s11005-023-01697-5

[24] A. Govorov, P.L.H. Martínez, H.V. Demir. *Understanding and Modeling Frster-type Resonance Energy Transfer* (FRET) (Springer, 2016), v. 1.

[25] Ю.Н. Кузнецов, Д.И. Семенцов. Физика волновых процессов и радиотехнические системы, **10** (1), 21 (2007).

[26] А.А. Колоколов, Г.В. Скроцкий. УФН, **162** (12), 165 (1992). DOI: 10.3367/UFNr.0162.199212f.0165

[27] I. Liberal, R.W. Ziolkowski. IEEE Trans. Antennas Propag., **61** (5), 2714 (2013). DOI: 10.1109/TAP.2013.2246535

[28] M. Gustafsson, K. Schab, L. Jelinek, M. Capek. New J. Phys., **22** (7), 073013 (2020). DOI: 10.1088/1367-2630/ab83d3