11

Разрешающая способность дискретных линейных апертур при синтезе нулей в диаграмме направленности

© А.А. Ерохин, Е.Р. Гафаров, Ю.П. Саломатов

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия
E-mail: aerokhin@sfu-kras.ru

Поступило в Редакцию 3 июля 2026 г.
В окончательной редакции 9 сентября 2026 г.
Принято к публикации 9 сентября 2026 г.

Рассмотрена задача оценки предельной разрешающей способности дискретных линейных апертур при формировании глубоких нулей диаграммы направленности в условиях предельного количества нулей $(N-1)$. Проведен сравнительный анализ метода полиномов Щелкунова и метода парциальных диаграмм. Установлено, что метод Щелкунова обеспечивает точное формирование нулей, а метод парциальных диаграмм — бóльшую стабильность главного лепестка.

Ключевые слова: линейная апертура, антенная решетка, синтез нулей, диаграмма направленности, полином Щелкунова.

DOI: 10.61011/PJTF.2027.01.64124.20832

Пространственная фильтрация сигналов с помощью антенных решеток (АР) — один из наиболее эффективных способов защиты от когерентных помех [1,2]. Ключевой задачей при этом является синтез глубоких провалов (нулей) диаграммы направленности (ДН) в направлениях на источники помех при одновременном удержании главного лепестка в направлении на полезный сигнал. За последние десятилетия было разработано множество методов решения этой задачи: от классических алгебраических подходов для узкополосных систем до сложных алгоритмов оптимизации и цифрового диаграммообразования для широкополосных и частотно-независимых решеток [3–5]. Кроме того, данная задача может быть решена в классической постановке синтеза ДН, например, методами выпуклого программирования [6], где в направлениях нулей задаются линейные ограничения, либо методом роя частиц [7], где направления нулей закладываются в целевую функцию в виде штрафных коэффициентов.

Математически задача синтеза ДН сводится к нахождению такого распределения поля по апертуре антенны, т.е. весовых коэффициентов в элементах дискретной решетки, которое обеспечивает требуемую форму ДН, включая расположение нулей в заданных направлениях [8]. Таким образом, дискретная апертура описывается взвешенной суммой диаграмм ее элементов, а число степеней свободы ограничено количеством элементов, что напрямую влияет на возможность и точность формирования нулей [9].

Одним из фундаментальных алгебраических подходов к решению задачи синтеза ДН с заданными нулями является метод полиномов Щелкунова [10]. Согласно этому методу, множитель эквидистантной линейной АР может быть представлен в виде полинома комплексной переменной. Аргумент переменной определяется пространственным набегом фазы между соседними элементами, а корни полинома однозначно задают направления, в которых ДН обращается в нуль. Синтез глубоких провалов в ДН с помощью данного метода сводится к размещению корней полинома Щелкунова на единичной окружности комплексной плоскости в точках, соответствующих пространственным частотам источников помех. При этом оставшиеся степени свободы, т.е. положение других корней, могут быть использованы для оптимизации уровня боковых лепестков или формирования главного максимума в направлении на полезный сигнал [11].

Также известен метод, при котором ДН с заданным количеством нулей можно представить в виде взвешенной суммы парциальных диаграмм этой же АР, максимумы которых ориентированы в направлениях на полезный сигнал и источники помех [9]. Математически задача синтеза сводится к составлению и решению матричной системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных комплексных весовых коэффициентов. Точное решение такой системы обеспечивает формирование глубоких провалов и существует при условии, что количество элементов решетки превышает число нулей ДН. Этот метод может быть обобщен на случай частотно-независимых АР, в которых после каждого элемента используются фильтры с конечной импульсной характеристикой [3].

При синтезе нулей данным методом ДН можно записать в виде

$$\dot{F}(\theta) = \sum_{i=0}^{K} \alpha_i \dot{F}_i(\theta, \theta_i), \qquad (1)$$

где $\dot{F}_i(\theta, \theta_i)$ — ДН, имеющая максимумы в направлениях θ_i ($i = 0$ определяет направление максимума суммарной ДН, $1 \leqslant i \leqslant K$ определяет направление нулей суммар-

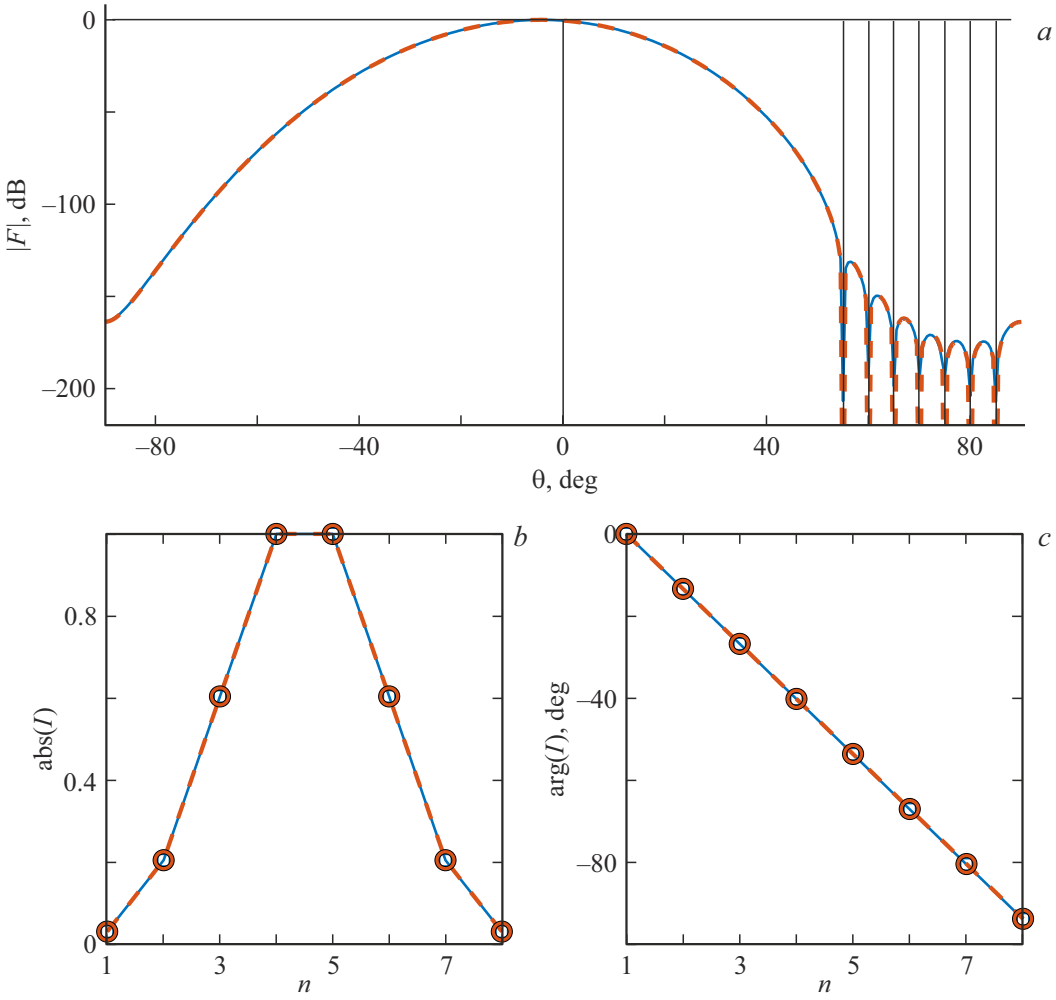


Рис. 1. Диаграмма направленности (a) и амплитудно-фазовые распределения (b, c) для антенной решетки длиной 3.5λ.

ной ДН), α_i — неопределенные коэффициенты, K — количество синтезируемых нулей ДН.

Для нахождения коэффициентов α_i решается система линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{K} \alpha_i \dot{F}_i(\theta_0, \theta_i) = 1; \\ \sum\limits_{i=0}^{K} \alpha_i \dot{F}_i(\theta_1, \theta_i) = 0; \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=0}^{K} \alpha_i \dot{F}_i(\theta_K, \theta_i) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Данную систему уравнений можно записать в матричном виде

$$\mathbf{F}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}. \tag{3}$$

Далее рассмотрим формирование нулей в ДН с помощью указанных методов. Пусть линейная дискретная апертура состоит из восьми элементов. Сформируем в ДН семь равномерно распределенных по углу нулей в интервале $\theta = [55°;\ 85°]$. Рассмотрим два случая с разной длиной АР, равной 3.5λ и 1.75λ, где λ — длина волны на рабочей частоте.

На рис. 1 и 2 показаны полученные ДН (a) и амплитудно-фазовые распределения (АФР) (b, c). На обоих рисунках штриховая линия соответствует методу с использованием полиномов Щелкунова, а сплошная — методу парциальных ДН. Вертикальные линии на рисунках с ДН показывают ожидаемое направление главного лепестка и направления, в которых формируются нули ДН. Как видно из рис. 1, a, при длине АР, равной 3.5λ, обоими методами удается получить глубокие провалы в ДН, которые расположены строго в заданных направлениях. При этом АФР, полученные обоими методами, совпадают (рис. 1, b, c). С уменьшением длины апертуры при использовании метода парциальных ДН в заданных направлениях уже не удается сформировать именно численные нули ДН (рис. 2, a). При этом уровень ДН в ожидаемом направлении главного лепестка больше (на величину около 13 dB), чем при использовании метода полиномов Щелкунова, что также выражается в отличии полученных АФР (рис. 2, b, c).

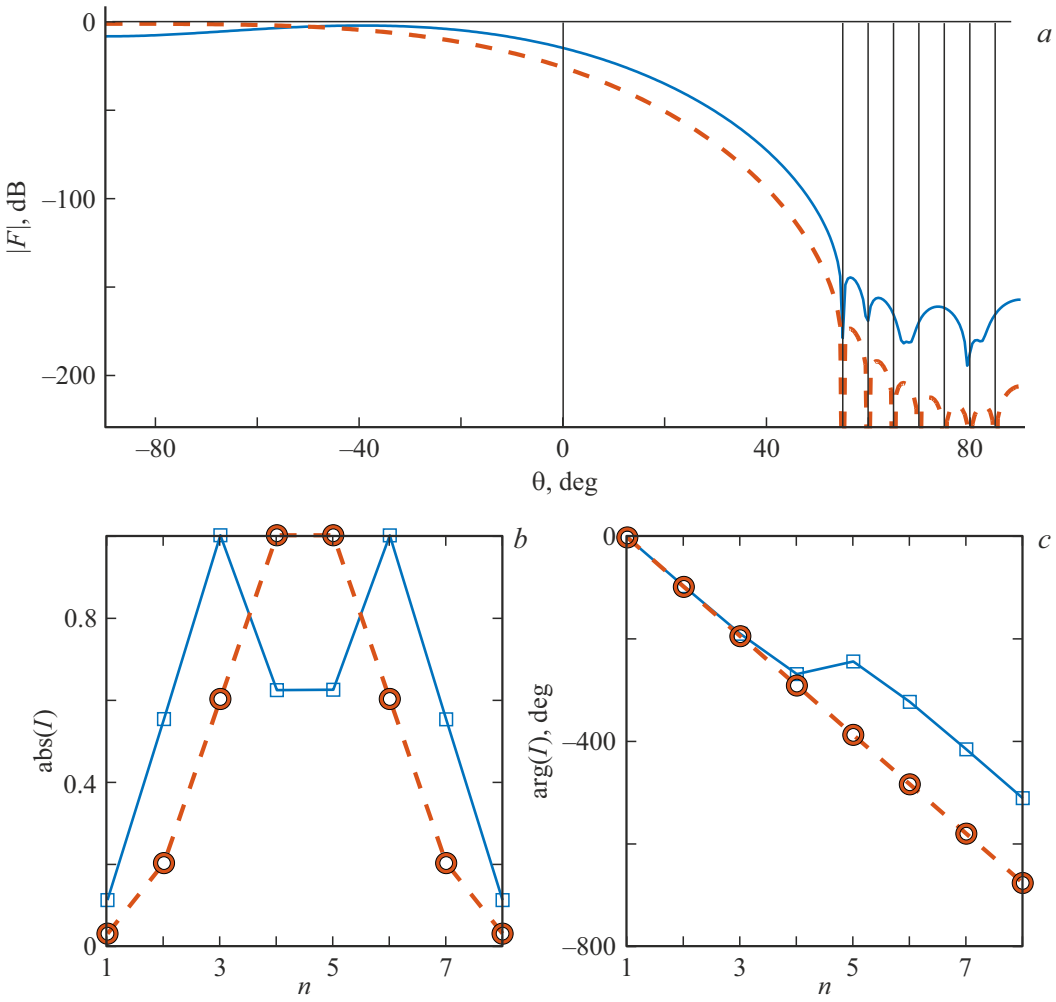


Рис. 2. Диаграмма направленности (a) и амплитудно-фазовые распределения (b, c) для антенной решетки длиной 1.75λ.

Это связано с тем, что метод Щелкунова основан на поиске корней. Данный метод ставит условие $F(\theta_i) = 0$, что эквивалентно точному прохождению полинома через заданные точки на комплексной плоскости. Метод не оптимизирует ДН целиком, а лишь находит коэффициенты через явное аналитическое произведение сомножителей. В свою очередь метод парциальных ДН сводится к составлению системы линейных алгебраических уравнений, решение которой при большом числе ограничений ищется в среднеквадратичном смысле. В результате вместо строгого нуля функции в заданных направлениях метод минимизирует мощность излучения в заданных направлениях. Когда число ограничений достигает предельного количества нулей $(N-1)$, матрица $\mathbf{F}$ не может обеспечить нулевую ошибку в каждой точке одновременно, а дает „сглаженное“ решение, т. е. при уменьшении длины апертуры матрица $\mathbf{F}$ в выражении (3) становится плохо обусловленной.

На рис. 3 показана зависимость числа обусловленности матрицы $\mathbf{F}$ от ширины углового сектора $60^\circ \pm \Delta\theta/2$, в котором находятся синтезируемые нули ДН. В данном случае количество синтезируемых нулей $K = 7$, т. е. равно доступному числу степеней свободы. На этом рисунке вертикальными штриховыми линиями отмечен предел Рэлея, при котором антенна может различить два излучающих источника. Предел Рэлея численно равен ширине главного лепестка диаграммы направленности по первым нулям ДН и определяется как отношение длины волны к длине апертуры λ/L. При сужении сектора расположения нулей ниже предела Рэлея задача синтеза становится некорректно поставленной, т. е. число обусловленности матрицы $\mathbf{F}$ достигает предела разрядности ЭВМ (15–17 значащих десятичных цифр, что является порогом для машинной точности double). Если число обусловленности превышает 10^{16}, матрица становится вырожденной, а строки системы уравнений — линейно зависимыми. Таким образом, при сужении сектора подавления $\Delta\theta < \lambda/L$ столбцы матрицы $\mathbf{F}$ становятся линейно зависимыми. Составляющие пространственного спектра $K = 7$ помех сливаются внутри ширины одного парциального луча апертуры, что делает их точечное разделение матричными методами невозможным.

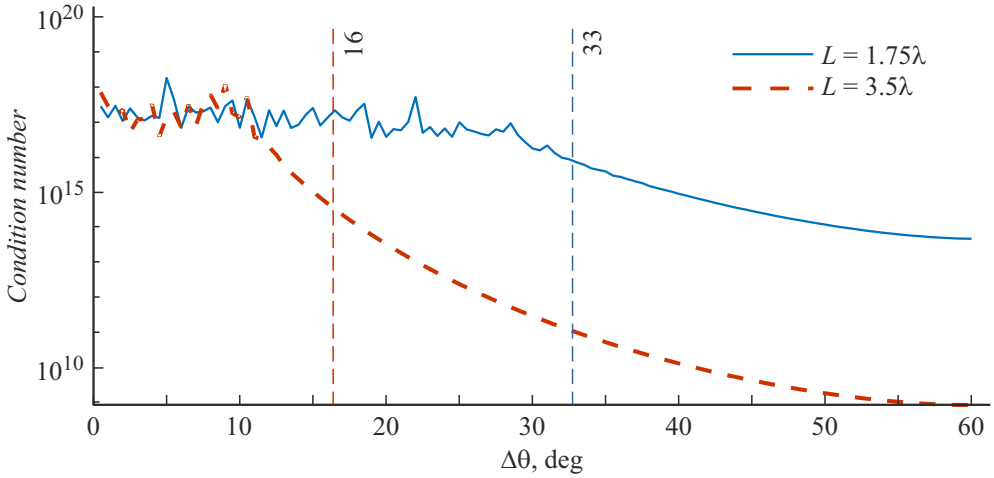


Рис. 3. Число обусловленности матрицы **F** для различной длины линейной апертуры.

Таким образом, результаты проведенного моделирования позволили установить, что при синтезе предельного количества нулей в дискретной апертуре (число нулей $K = N - 1$) невозможно одновременно обеспечить идеальные нули ДН и максимальный коэффициент усиления в ожидаемом направлении полезного сигнала. Метод полиномов Щелкунова решает задачу синтеза, гарантируя точные нули ДН. При этом полностью исключается контроль над главным лучом. С другой стороны, метод парциальных ДН направлен на сохранение формы главного луча, но сталкивается с проблемой вырождения матриц при малой длине апертуры. Исследование характеристик направленности при других способах расположения нулей ДН представляет собой самостоятельную задачу, которую следует отнести к направлениям дальнейших исследований.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-19-20106 (https://rscf.ru/project/25-19-20106/), гранта Красноярского краевого фонда науки.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] Q. Wei, Y. Gao, X. Chen, Z. Huang, L. Kuang, IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., **59** (1), 274 (2022). DOI: 10.1109/TAES.2022.3178662

[2] М.Е. Шевченко, В.Н. Малышев, А.В. Горовой, А.С. Черепанов, Изв. вузов России. Радиоэлектроника, **26** (6), 27 (2023). DOI: 10.32603/1993-8985-2023-26-6-27-40

[3] А.А. Ерохин, Письма в ЖТФ, **47** (7), 35 (2021). DOI: 10.21883/PJTF.2021.07.50797.18469 [A.A. Erokhin, Tech. Phys. Lett., **47**, 333 (2021). DOI: 10.1134/S1063785021040064]

[4] R. Zhang, Y. Zhang, J. Sun, Q. Li, Sensors, **20** (18), 5158 (2020). DOI: 10.3390/s20185158

[5] X. Yang, S. Li, Y. Sun, T. Long, T.K. Sarkar, IEEE Trans. Antennas Propag., **67** (8), 5380 (2019). DOI: 10.1109/TAP.2019.2916607

[6] A.F. Vaquero J. Corcoles, Mathematics, **13** (11), 1796 (2025). DOI: 10.3390/math13111796

[7] M.A. Mangoud, H.M. Elragal, Prog. Electromagn. Res. B, **17**, 1 (2009). DOI: 10.2528/PIERB09070205

[8] S. Panigrahi, H.T. Chou, C.Y. Chang, Radio Sci., **57** (4), e2021RS007342 (2022). DOI: 10.1029/2021RS007342

[9] A.A. Erokhin, Yu.P. Salomatov, V.S. Panko, M.I. Sugak, in *2016 Int. Siberian Conf. on control and communications (SIBCON)* (IEEE, 2016), p. 1–4. DOI: 10.1109/SIBCON.2016.7491854

[10] S.A. Schelkunoff, Bell Syst. Tech. J., **22** (1), 80 (1943). DOI: 10.1002/j.1538-7305.1943.tb01306.x

[11] A. Afsari, A.M. Abbosh, Y. Rahmat-Samii, IEEE Trans. Antennas Propag., **70** (6), 4485 (2022). DOI: 10.1109/TAP.2022.3140347